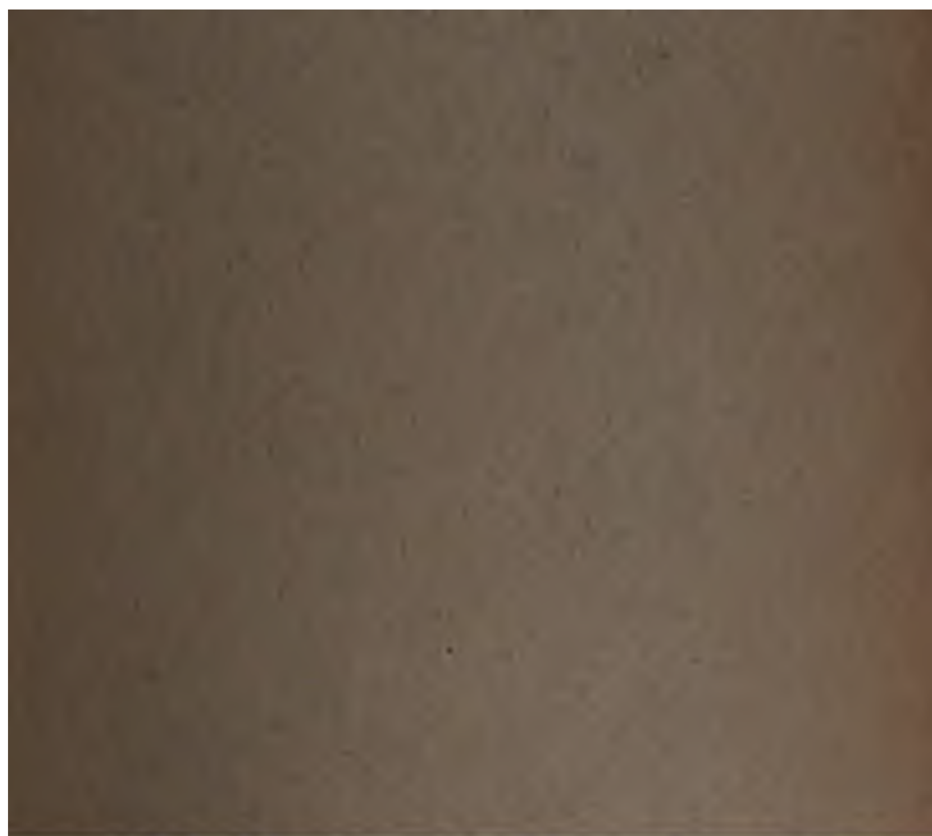
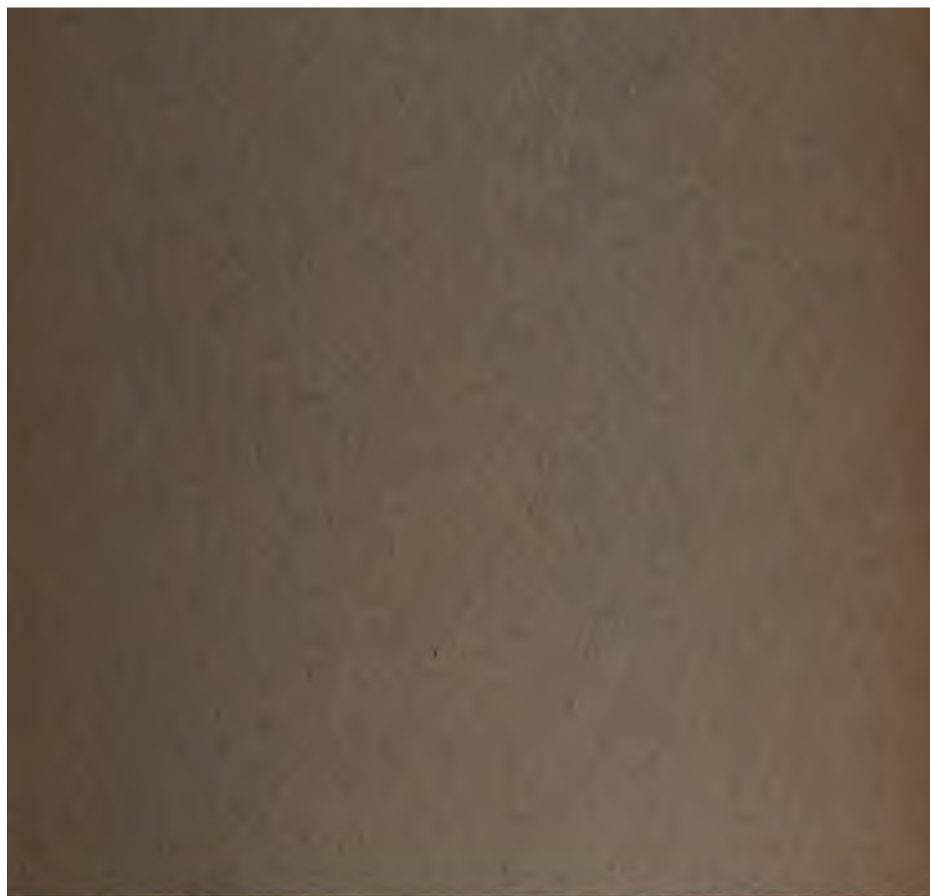

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06634995 6











Mathematics

Jahrbuch

über die

Fortschritte der Mathematik

im Verein mit anderen Mathematikern

und unter besonderer Mitwirkung der Herren

Felix Müller und Albert Wangerin

herausgegeben

von

Carl Ohrtmann.

Vierzehnter Band.

Jahrgang 1882.

Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1885.

Erklärung der Citate.

Eine eingeklammerte (arabische) Zahl vor der (römischen) Bandzahl bezeichnet die Reihe (Serie), zu der der Band gehört.

Abh. z. Gesch. d. Math.: Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Leipzig. Teubner. IV.

Act. Math.: Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm. I-III.

Almeida J.: Journal de physique théorique et appliquée, publié par J. Ch. d'Almeida. Paris. 8°.

Am. Ass.: Proceedings of the American Association for the advancement of sciences.

Am. J. Sc.: American Journal of sciences and arts.

Amst. Jaarb.: Jaarboek van de Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Verh.: Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Amsterdam.

Amst. Versl. en Meded.: Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Amsterdam. XVII.

Anal.: The Analyst, a monthly journal of pure and applied mathematics. Edited and published by J. E. Hendricks. Des Moines, Jowa. gr. 8°. IX.

Andresen Tekn. Foren. Tidsskr.: Den tekniske Forenings Tidsskrift udgivet af A. Andresen. Kopenhagen.

Ann. d. Chim. et Phys.: Annales de Chimie et de Physique par MM. Chevreul, Dumas etc. Paris. Masson. 8°. XXXIII. XXXIV.

Ann. de l'Éc. Norm.: Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, publiées sous les auspices du Ministre de l'instruction publique par M. Le Pasteur. Paris. Gauthier-Villars. 4°. (2) XI.

Arch. f. Art.: Archiv für die Artillerie- und Ingenieur-Officiere des Deutschen Reichsheeres.

Astr. Nachr.: Astronomische Nachrichten, begründet von H. C. Schumacher, herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona. 4°. 2446-2453.

Astr. Viertschr.: Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von E. Schoenfeld in Bonn, A. Winnecke in Strassburg i. E. Leipzig. W. Engelmann. 8°.

Bair. Bl.: Blätter für das bairische Gymnasial- und Realschulwesen, redigirt von W. Bauer und A. Kurz. München. 8°. XVII, XVIII.

Batt. G.: Giornale matematico ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Napoli. gr. 8°. XX.

Belg. Ann.: Annuaire de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. F. Hayez.

Belg. Ann.: Annales de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles.

Belg. Bull.: Bulletin de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Bruxelles. 8°. (3) III, IV, V.

Belg. Mém. C.: Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°. XLIV, XLV.

Belg. Mém. S. E.: Mémoire in 4° des Savants Étrangers de l'Académie de Belgique. XLIV.

Belg. M. N.: Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Belgique. Bruxelles. 4°.

Berl. Abh.: Mathematisch-physikalische Abhandlungen der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 4°.

Berl. Monatsber.: Monatsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Berlin. 8°. 1882.

Bibl. un.: Bibliothèque universelle et revue suisse. Archives des sciences physiques et naturelles. Lausanne. Bridel.

Bologna Mem.: Memorie dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna. Bologna. 4°.

Bologna Rend.: Rendiconti dell' Accademia Reale di scienze dell' Istituto di Bologna Bologna.

Bonc. Bull.: Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 4°. XIV, XV.

Bord. Mém.: Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles à Bordeaux. Bordeaux. Paris. 8°. (5) V.

Brioschi Ann.: Annali di matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini. Milano. 4°. (2) X.

Brit. Ass. Rep.: Reports of the meeting of the British Association for the advancement of science. London. gr. 8°. 1882.

Brux. Ann.: Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publieés aux frais de l'État. Bruxelles. F. Hayez. 4°.

Brux. S. sc.: Annales de la société scientifique de Bruxelles. Bruxelles. F. Hayez. (Doppelt paginirt, unterschieden durch A und B.). VI, VII.

Cambr. Proc.: Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge. IV.

Cambr. Trans.: Transactions of the Philosophical Society of Cambridge. Cambridge. XIII.

Carl Rep.: Repertorium für Experimental-Physik, herausgegeben von Ph. Carl. München. gr. 8°.

Cas.: Casopis; Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und Physik, redigirt mit besonderer Rücksicht auf Studirende der Mittel- und Hochschulen von F. J. Studnička, herausgegeben vom Vereine böhmischer Mathematiker in Prag. Prag. 8°. (Böhmisch). XI.

Centr. f. Forstw.: Centralblatt für das gesammte Forstwesen.

Chark. Ges.: Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Charkow.

Christiania Forh.: Forhandlingar i Videnskabs-Selskabet i Christiania. 8°. XXI, XXII.

Christ. G. d. W.: Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania. Christiania.

Civiling.: Der Civilingenieur. Herausgegeben von K. H. Bornemann.

Conn. d. temps: Connaissance des temps ou des mouvements célestes. Paris. Gauthier-Villars. 8°.

Conn. Trans.: Transactions of the Connecticut Academy of arts and sciences. New-Haven.

C. R.: Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. Paris. 4°. XCIV, XCV.

Cron. cient.: Cronica cientifica revista international de ciencias, fundador proprietario y director D. Rafael Roig y Torres. Barcelona. 8°.

D. Versz.: Deutsche Versicherungszeitung.

Darb. Bull.: Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, rédigé par MM. G. Darboux et J. Hoüel avec la collaboration des MM. André, Lespiault, Painvin et Radau, sous la direction de la Commission des Hautes Études. Paris. Gauthier-Villars. 8°. (2) VI.

Dublin Trans.: Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. XXVIII.

Edinb. Proc.: Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 8°. XXXII, XXXIII, XXXIV.

Edinb. Trans.: Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Edinburgh. 4°. XXX.

Ed. Times: Mathematical questions, with their solutions from the „Educational Times" with many papers and solutions not published in the „Educational Times." Edited by W. J. C. Miller. London. 8°. C. F. Hodgson and Son. XXXVI, XXXVII.

Electrot. Z.: Elektrotechnische Zeitschrift. Herausgegeben vom elektrotechnischen Verein. Berlin. 4°. III.

Erlang. Ber.: Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Erlangen. 8°.

Franc. Ass.: Association Française pour l'avancement des sciences naturelles. 1880.

Gen. Mém.: Mémoire de la société de physique et d'histoire naturelle de Geneve. Genève. 4°. Librairie H. Georg. XXVIII.

Gött. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen. 4°. XXIX.

Gött. N.: Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-August-Universität zu Göttingen. Göttingen. 12°. 1882.

Hamb. Mitt.: Mitteilungen der Hamburger Mathematischen Gesellschaft. Hamburg. 8°. 1882.

Helsingf. Afh.: Akademiens Afhandlingar Helsingfors.

Herm.: Hermathena, a series of papers on literature, science and philosophy, by members of Trinity College. Dublin. Ponsonby. 8°. 1882.

Hoffmann Z.: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. Leipzig. Teubner. 8°. XIII.

Hoppe Arch.: Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Lehrer an den höheren Lehranstalten gegründet von J. A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. Leipzig. C. A. Koch. 8°. LXVII, LXVIII, LXIX.

J. de l'Éc. Pol.: Journal de l'École Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement. Paris. Gauthier-Villars. 4°.

J. Hopkins circ.: Johns Hopkins University Circulars. 1882. (Bd. II.)

Jordan, Z. f. V.: Zeitschrift für Vermessungskunde, herausgegeben von W. Jordan.

Kazan Ber.: Sitzungsberichte der mathematischen Section des Naturforschenden Vereins zu Kazan. 1881-1882.

Kazan Ges.: Sammlung der Mitteilungen der physikalisch-mathematischen Gesellschaft zu Kazan.

Kazan Nachr.: Nachr. der Kaiserlichen Universität zu Kazan.

Kjob. Skrift.: Schriften der Kopenhagener Akademie. Kopenhagen. (6) I.

Klein Ann.: Mathematische Annalen. In Verbindung mit C. Neumann begründet durch R. F. A. Clebsch. Unter Mitwirkung der Herren P. Gordan, C. Neumann, K. v. d. Mühll gegenwärtig herausgegeben von F. Klein und A. Mayer. Leipzig. Teubner. 8°. XIX, XX.

Königsb. Schr.: Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. Königsberg i. Pr. 4°.

Kopenh. Overs.: Oversigt over Videnskabs Selskabet Forhandlingar. Kopenhagen.

Krak. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der Krakauer Akademie. Krakau. (Polnisch.)

Krak. Denkschr.: Denkschriften der Krakauer Akademie der Wissenschaften. Krakau. (Polnisch.)

Kronecker J.: Journal für reine und angewandte Mathematik. In zwanglosen Heften. Herausgegeben von L. Kronecker und K. Weierstrass mit tätiger Beförderung hoher Königl. Preussischer Behörden. Fortsetzung des von A. L. Crelle (1826-1856) und C. W. Borchardt (1856-1880) herausgegebenen Journals. Berlin. G. Reimer. 4°. XCII, XCIII, XCIV.

Leipz. Abh.: Abhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Leipz. Ber.: Berichte über die Verhandlungen der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Leipzig.

Lie Arch.: Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Christiania. 8°. VII.

Liège Mém.: Mémoires de la Société Royale des sciences de Liège. Liège. (2) X.

Lisb. J.: Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturales publicados sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lisb. Mem.: Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Lisboa.

Lomb. Rend.: Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Milano. 8°. (2) XIV, XV.

Lond. M. S., Proc.: Proceedings of the London mathematical Society. London. 8°. XIII.

Lond. Phil. Trans.: Philosophical Transactions of the Royal Society of London. London. 4°. CLXXI, CLXXII, CLXXIII.

Lond. R. S., Proc.: Proceedings of the Royal Society of London. London. 8° XXXIII.

Lund Act.: Acta universitatis Lundensis. Lund.

Lund Afh.: Lunds Akademiens Afhandlingar. Lund.

Lund Arsskr: Lunds Universitets Årsskrift. Lund. XVIII.

Manch. Proc.: Proceedings of the litterary and philosophical Society of Manchester. Manchester.

Marb. Ber.: Sitzungsberichte der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Marburg. 8°. 1882.

Math.: Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissement d'instruction moyenne publié par P. Mansion et J. Neuberg. Gand. Host. Paris. Gauthier-Villars. 8°. I, II.

Mem. R. Astr. S.: Memoirs of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mess.: The Messenger of mathematics, edited by M. Allen Whitworth, C. Taylor, R. Pendlebury, J. W. L. Glaisher. London and Cambridge. Macmillan. 8°. (2) XI, XII.

Modena Mem.: Memorie della Accademia Reale di Modena. Modena. XX.

Monthl. Not.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. London. 4°.

Mosk. Nachr.: Nachrichten der Moskauer Universität Moskau. (Russisch).

Münch. Abh.: Abhandlungen der Kgl. Bairischen Gesellschaft der Wissenschaften zu München. Zweite Classe. München. 1882.

Münch Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Bairischen Akademie der Wissenschaften zu München. München. 8°. 1881,

Nap. Rend.: Rendiconti dell' Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. Napoli. 4°. XXI.

Néerl. Arch.: Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. La Haye. 8°. XVII.

Nieuw Arch.: Nieuw Archief voor wiskunde. Amsterdam. 8°. VIII, IX.

Nouv. Ann.: Nouvelles Annales de mathématiques. Journal des candidats aux écoles Polytechnique et Normale, rédigé par MM. Gerono et Ch. Brisse. Paris. 8°. (3) I.

Observatory: The Observatory, a monthly review of astronomy. Edited by W. N. M. Christie. M. A. London.

Odessa Nachr.: Nachrichten von der Universität Odessa. Odessa.

Padova Atti: Atti della Reale Accademia di scienze, lettere ed arti di Padova. Padova.

Par. Denkschr.: Denkschriften der Pariser Gesellschaft der exacten Wissenschaften. Paris. 4°. (Polnisch).

Paris Mém. prés.: Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France. Paris.

Paris Soc. Phil.: Bulletin de la Société Philomatique de Paris. Paris. 8°.

Petersb. Abh.: Abhandlungen der Kais. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Petersburg. (Russisch). X.

Pétersb. Bull.: Bulletin de l'Académie impériale de St. Pétersbourg. Pétersbourg et Leipzig. Folio. XXVII.

Phil. Mag.: The London, Edinburgh and Dublin philosophical Magazine and journal of science, by Brewster, Kane, Francis. London. 8°.

Phys. Ges. St. Pét.: Journal der physiko-chemischen Gesellschaft zu St.-Petersburg.

Prag. Abh.: Abhandlungen der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. Selbstverlag der Königl. Böhmischen Gesellschaft. 4°. (6) XI.

Prag. Ber.: Sitzungsberichte der Kgl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Prag. 8°. 1881.

Wash. Bull.: Bulletin of the Philosophical Society of Washington.

Wiedemann Ann.: Annalen der Physik und Chemie. Unter Mitwirkung der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin und insbesondere des Herrn H. Helmholtz herausgegeben von G. Wiedemann. Leipzig. Barth. 8°. (2) XV, XVI, XVII.

Wien. Anz.: Anzeigen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien. 8°. 1882.

Wien. Ber.: Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu Wien Zweite Abteilung. Wien. 8°. LXXXV, LXXXVI, LXXXVII.

Wien. Denkschr.: Denkschriften der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe. Wien. 4°. XLV, XLVI.

Wochenschr. f. Astr.: Wochenschrift für Astronomie. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Wolf Z.: Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich von R. Wolf. Zürich. 8°. XXIV, XXV, XXVI, XXVII.

Woolwich, Art. Inst. Proc.: Proceedings of the Royal Artillery Institution. Woolwich. 8°. XI, XII.

Z. dtsch. Ing.: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, herausgegeben von Ziebarth. Berlin. 4°.

Zeuthen T.: Tidsskrift for Mathematik. Udgivet af Zeuthen. Kopenhagen. 8°. (4) VI.

Z. Realsch.: Zeitschrift für das Realschulwesen. VII.

Inhaltsverzeichnis.

(Die mit einem † versehenen Arbeiten sind ohne Referate.)

Erster Abschnitt. Geschichte und Philosophie.

Capitel 1. Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

Capitel 2. Philosophie (Methodik, Pädagogik).

A. Philosophie.

Capitel 3. Elimination und Substitution. Determinanten, symmetrische Functionen.

Dritter Abschnitt. Zahlentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Theorie der Formen.

Seite

Capitel 3. Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

Fünfter Abschnitt. Reihen.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Reihen.

Sechster Abschnitt. Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Differentialrechnung. (Differentiale, Functionen von Differentialen, Maxima und Minima).

Capitel 3. Integralrechnung.

Capitel 4. Bestimmte Integrale.

Seite

Capitel 5. Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Capitel 6. Partielle Differentialgleichungen.

Capitel 7. Variationsrechnung.

Seite

Siebenter Abschnitt. Functionentheorie.

Capitel 1. Allgemeines.

Capitel 2. Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

C. Hyperelliptische und Abel'sche Functionen.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

Achter Abschnitt. Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1. Principien der Geometrie.

Seite

Capitel 4. Darstellende Geometrie.

Capitel 5. Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

B. Besondere ebene Gebilde.

C. Besondere räumliche Gebilde.

D. Abzählende Geometrie.

Neunter Abschnitt. Analytische Geometrie.

Capitel 1. Coordinaten.

Capitel 2. Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

B. Theorie der algebraischen Curven.

Seite

Capitel 3. Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

D. Andere specielle Raumgebilde.

Capitel 4. Liniengeometrie. (Complexe, Strahlensysteme.)

Capitel 5. Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt. Mechanik.

Capitel 1. Allgemeines. (Lehrbücher etc.).

Capitel 2. Kinematik.

Capitel 3. Statik.

A. Statik fester Körper.

B. Hydrostatik.

Capitel 4. Dynamik.

A. Dynamik fester Körper.

B. Hydrodynamik.

Capitel 5. Potentialtheorie.

Elfter Abschnitt. Mathematische Physik.

Capitel 1. Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

B. Elasticitätstheorie etc.

C. Capillaität.

Capitel 2. Akustik und Optik.

A. Akustik.

B. Theoretische Optik.

Seite

C. Geometrische Optik.

Capitel 3. Elektricität und Magnetismus.

Seite

Capitel 4. Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

B. Gastheorie.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

Zwölfter Abschnitt. Geodäsie und Astronomie.

Capitel 1. Geodäsie.

Capitel 2. Astronomie

Anhang.

Verzeichnis

der Herren, welche für den vierzehnten Band Referate geliefert haben.

(Die Verantwortlichkeit für den Inhalt der Referate tragen die Herren Referenten. Die in Klammern gesetzten Chiffern bezeichnen die Uebersetzer der in fremder Sprache eingesandten Referate).

A. Herr Prof. August in Berlin.
B. - Prof. Bruns in Leipzig.
Cly. - Prof. Cayley in Cambridge.
Csy. - Prof. Casey in Dublin.
Dk. - Prof. Dyck in München.
Dn. - Dickstein in Warschau.
E. - Prof. G. Eneström in Stockholm.
G. - Prof. v. Geer in Leiden.
Glr. - Prof. Glaisher in Cambridge.
Gm. - Dr. Gram in Kopenhagen.
Gr. - Prof. Günther in Ansbach.
H. - Prof. Hoppe in Berlin.
Hr. - Dr. Hamburger in Berlin.
H. St. - Prof H. Stahl in Aachen.
Hz. - Dr. Hurwitz in Königsberg i. P.
Jn. - Prof. W. Johnson in Annapolis U. S.
Kr. - Dr. S. Kantor in Prag.
L. - Prof. Lie in Christiania.
Ls. - Lazarus in Hamburg.
M. - Dr. F. Müller in Berlin.
Mi. - Dr. Michaelis in Berlin.
Mn. - Prof. Mansion in Gent.
My. Herr Dr. F. Meyer in Tübingen.
Mz. - Dr. Maynz in Ludwigslust.
No. - Prof. Netto in Berlin.
O. - Dr. Ohrtmann in Berlin.
Ok. - Prof. Oberbeck in Halle a. S.
Rg. - Prof. Rodenberg in Hannover.
Rn. - Dr. Rohn in Leipzig.
Rs. - Dr. Rosochatius in Berlin.
Sbt. - Dr. Siebert in Gross-Lichterfelde.
Schg. - Dr. Schlegel in Waren.
Schn. - Prof. Schumann in Berlin.
Scht. - Dr. Schubert in Hamburg.
Sn. - Dr. Simon in Berlin.
St. - Prof. Stolz in Innsbruck.
Std. - Prof. Studnička in Prag.
T. - Dr. Toeplitz in Breslau.
Tx. - Prof. Teixeira in Coimbra.
Ty. - Prof. Tichomandritzky in Petersburg.
V. - Prof. Voss in München.
Wn. - Prof. Wangerin in Halle a. S.
W. St. - Prof. W. Stahl in Aachen.

Briefe und Zusendungen erbitten wir entweder durch Vermittelung der Verlagshandlung oder unter der Adresse:

Dr. Max Henoch, Berlin W, Victoriastr. 29.

Erster Abschnitt.

Geschichte und Philosophie.

Capitel 1.

Geschichte.

A. Biographisch-Literarisches.

TH v. OPPOLZER. Note über eine von Archilochos erwähnte Sonnenfinsternis. Wien. Ber. LXXXVI. 790-794.

Fragment 74 in Bergk's Ausgabe des Archilochos enthält die offenbar auf Autopsie beruhende Beschreibung einer Sonnenfinsternis. Gestützt auf seine bekannten Syzygientafeln untersuchte nun der Verfasser alle Phänomene dieser Art, welche in die ungefähre Lebenszeit des Dichters (700—640 v. Chr.) fallen, und fand, dass eine am 6. April 647 stattgehabte Finsternis in der Tat ganz gut den Angaben des Bruchstückes entspricht. Thasos, wo sich Archilochos in seinen letzten Lebensjahren aufhielt, gehörte der Zone an, innerhalb welcher die Verfinsterung total gesehen wurde. Allerdings aber begann dieselbe schon am Vormittag, während aus den Dichterworten geschlossen werden kann — nicht muss —, der Beginn sei auf eine Nachmittagstunde gefallen. Gr.

A. Riecke. Pythagoras. Zeit- und Lebensbild aus dem alten Griechenland. Leipzig, Berlin. Spamer.

Das vorliegende Buch will ein Lebensbild des Pythagoras geben. Der Verfasser beruft sich als Quellen seines Buches auf Herodot, Diodoros, Strabon, Diogenes Laertios, Dikaiarchos etc. Die Hauptsache aber hat doch wol die Phantasie des Verfassers hinzugetan. Dagegen aber, dass ein solches Phantasiegebilde als Lebensbild dargeboten wird, muss denn doch von Seiten der Wissenschaft Protest erhoben werden. Als Roman mag es gelten, aber bei der Prätension, mit der der Verfasser in einem Vorwort für seine Arbeit eintritt, kann das Erscheinen des Buches nur bedauert werden. O.

P. Tannery. Seconde note sur le système astronomique d'Eudoxe. Bord. Mém. (2) V. 129-149.

Das lange in seinem eigentlichen Wesen verkannte Planetensystem des Eudoxos ist bekanntlich von Schiaparelli geistreich reconstruirt worden. Jedem Wandelstern sind concentrische Sphären in solcher Anzal zugeteilt, dass, indem jede dieser Kugelflächen einer ihr speciell vorgeschriebenen Bewegung huldigt, durch das Zusammenwirken all' dieser Impulse der Planet die tatsächlich beobachtete Bahncurve (Hippopeda) beschreiben muss. Für die eigentlichen Planeten nun hat Henri Martin in seiner 1881 erschienenen Schrift „Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'Eudoxe, de Calippe et d'Aristote“ Schiaparelli's Theorie angenommen, für Mond und Sonne dagegen stellt er neue Hypothesen auf. Herr Tannery tritt gegen seinen Landsmann und zu Gunsten des Mailänder Astronomen in die Schranken. Er weist nach, dass Eudoxos ein wahrhaft hervorragender Astronom war, der nur in der Leugnung der solaren Eigenbewegung einen schwereren Fehler beging, obwol er geneigt ist, die Beobachtungshilfsmittel des Ersteren auf ein sehr niedriges Niveau herabzusetzen. Auch die Pole der Merkur- und Venussphäre fasst Martin anders auf, als Herrn Tannery zufolge die Handschriften gestatten. Gr.

P. Tannery. Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules. Bord. Mém. (2) V. 211-237.

Bretschneider's Interpretation jenes Stückes aus dem Commentar des Simplicius zur aristotelischen Physik, welches von den älteren Bemühungen um die Quadratur des Kreises handelt, hat sich in neuerer Zeit mehr und mehr als ungenügend herausgestellt. Philologen, welche sich später mit den betreffenden Stellen zu beschäftigen hatten, liessen aus naheliegenden Gründen die sachliche Seite unberührt, und erst der Engländer Allman ging über Bretschneider hinaus, indem er den in die Darstellung des Simplicius eingeflochtenen Urtext des Eudemos herzustellen bemüht war. Er gelangte auch zu einem für's Erste befriedigenden Resultate, doch blieben Herrn Tannery noch manche der Aufklärung bedürftige Punkte übrig, und ein Gleiches galt ihm für die Restitution, welche zwei um die Geschichte der exacten Wissenschaften hochverdiente deutsche Altertumsforcher, Diels und Usener, ihrerseits in Vorschlag gebracht hatten. Der Verfasser geht bezüglich des Eudemos von der an anderem Orte näher begründeten Annahme aus, die geschichtlichen Arbeiten desselben seien im Altertum fast gänzlich vernachlässigt worden. Proklos und alle Autoren, die nach dem vierten Jahrhundert unserer Aera lebten, hätten dieselben aus zweiter Hand gekannt, und speciell Simplicius wie Eutokios hätten lediglich aus der „κηρια“ betitelten Compilation eines gewissen Sporos geschöpft. Weiter erhalten wir den griechischen Text in neuer Recension, soweit er von der hippokratischen Kreisquadratur durch Möndchen handelt, und eine genaue französische Uebersetzung desselben, begleitet von einer Reihe scharfsinniger Noten, aus denen jetzt mit ziemlicher Gewissheit erhellt, welches Mass geometrischen Wissens etwa dem Hippokrates von Chios zuzuschreiben ist. Auch führt Herr Tannery noch trigonometrisch den Nachweis, dass Hankel im Unrecht war, wenn er behauptete, die Monde des Hippokrates seien die einzigen quadrirbaren, welche man mit Lineal und Zirkel zu verzeichnen im Stande sei. Gr.

H. G. Zeuthen. Fra Mathematikens Historie II-III. Zeuthen T. (4) VI. 97-101.

Im ersten dieser beiden Aufsätze bemerkt der Verfasser, dass schon Euklid im neunten Stücke (Satz 35) der Elemente einen vollständigen Beweis der Summationsformel einer geometrischen Reihe geliefert hat, was meist, wie es scheint, übersehen worden ist.

In der zweiten Note giebt der von Apollonius im ersten Buche seiner Kegelschnittslehre geführte Beweis des Satzes 34 dem Verfasser Anlass zur folgenden Bemerkung. Wie Chasles gezeigt hat, ist es höchst wahrscheinlich, dass Euklid's Porismen vorzugsweise diejenigen Transversalensätze enthalten haben, welche jetzt die Grundlage der metrischen Behandlung der projectivischen Geometrie bilden. Ist dies der Fall, so ist es auch sehr wahrscheinlich, dass Euklid diese Sätze in seinem ebenfalls verloren gegangenen Werke über die Kegelschnitte verwendet hat, und es ist dann natürlich, dass Apollonius, welcher die beiden erwähnten Werke von Euklid kannte, in seinem eigenen grossen Werke über die Kegelschnitte viele der Beweise von Euklid aufgenommen hat. Daraus erklärt es sich, dass man bei Apollonius Beweise findet, welche sich in ihrer Anlage auf diese Sätze stützen, obgleich er sie kaum als so bekannt voraussetzen durfte, dass er sich mit einer Verweisung auf Euklid hätte begnügen können. Als einen solchen betrachtet Herr Zeuthen den Beweis des erwähnten Satzes Stück I. 34. Gm.

P. Tannery. Aristarque de Samos. Bord. Mém. (2) V. 237-258.

Eine sehr dankenswerte Studie über die wichtigste astronomische Leistung des Aristarchos. Der Verfasser erinnert daran, dass selbst Anaxagoras, obgleich er über die Verfinsterungen und Mondphasen sich so ziemlich klar war, die Himmelskörper noch immer für platte Scheiben hielt, dass also im V. vorchristlichen Jahrhundert von wissenschaftlicher Sternkunde noch kaum die Rede sein konnte. Demokrit erkannte die Sphäricität von Mond

und Sonne, allein erst Philipp der Opuntier brach vollständig mit den Phantasmen der pythagoräischen Schule. Diesem Philipp wünscht der Verfasser in der Geschichte eine ehrenvollere Stelle eingeräumt zu wissen, als er sie bisher inne hatte. Aristarch's Verdienst gipfelt nämlich seiner Ansicht zufolge in seiner bekannten Anticipation des coppernicanischen Weltsystems, wogegen die schöne Methode, die Distanz der Erde von der Sonne zu bestimmen, in eine ältere Zeit hinaufreichen und entweder von Eudoxos oder auch von dem genannten Philippos herrühren soll. Eine wenig beachtete aristotelische Stelle spricht allerdings dafür, dass der Grundgedanke dieses Verfahrens ein höheres Alter besitzen muss. Das als Bestandteil des „μικρὸς ἀστρονομούμενος“ auf uns gekommene Buch des Aristarch wird im Einzelnen durchgesprochen; es kommen darin auch mathematische Sätze von Bedeutung vor. So wusste der Autor z. B., dass, für $\alpha < 90^\circ$, der Bruch $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ mit wachsendem α kleiner, dagegen $\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\alpha}$ mit wachsendem α grösser wird. Ebenso scheint ihm die Relation

$$\frac{43}{37} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6}}$$

bekannt gewesen zu sein. „C'est une preuve incontestable de l'emploi“, so drückt sich Tannery bei dieser Gelegenheit aus, „chez les anciens d'un procédé de calcul dont la théorie appartient sans conteste aux modernes, mais dont les premières applications sont trop simples pour ne pas avoir une origine très-reculée.“ Um so mehr wundert es uns, dass nicht auch auf die bei Aristarch erstmalig vorkommende merkwürdige Näherung

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = \frac{7}{5} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}$$

ausdrücklich aufmerksam gemacht wurde. Anhangsweise verbreitet sich der Verfasser noch über andere Zahlen, welche das Altertum für die wichtigste Linearconstante der Astronomie aufstellte, namentlich über einen sehr merkwürdigen Passus in der

Ketzerpolemik des heiligen Hippolyt, von welcher die Geschichtschreiber bis dahin keine Notiz genommen hatten. Gr.

P. Tannery. Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède. Bord. Mém. (2) V. 49-63.

Pappos richtet im vierten Buche seiner „mathematischen Sammlung“ einen leisen Tadel sowol gegen Apollonios wie gegen Archimedes, weil beide die Methoden, welche zur Auflösung „ebener“ und „körperlicher“ Probleme dienen, nicht scharf genug aus einander gehalten hätten. Man war sich bislang nicht völlig klar über den Sinn dieser Worte des Commentators. Der Verfasser aber unternimmt es, deren Sinn wenigstens bezüglich des Zweitgenannten aufzudecken, indem er bezüglich des Apollonios sich begnügt, die Hypothese von Hultsch zurückzuweisen. In der 18ten Proposition seiner Schrift über die Schneckenlinien beweist Archimedes, dass eine an die Spirale gelegte Tangente eine im Pol senkrecht zur Axe errichtete Gerade so schneiden kann, dass das abgeschnittene Stück dieser Senkrechten dem Umfange des ersten Erzeugungskreises gleich ist, und stützt seinen Beweis auf das folgende Lemma: Hat man in einem Kreise vom Mittelpunkt O eine Sehne AB, und ist $\angle AOB = \varphi$, so kann man durch O eine die Sehne in E, die Peripherie in D und eine in A an den Kreis gelegte Tangente in F schneidende Sekante so ziehen, dass

$$\frac{ED}{AF} < \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

werde. Dieses Lemma aber gewinnt er wiederum nur durch eine Construction, welche ohne Zuhülfenahme von Kegelschnitten nicht zu leisten ist, mithin also unter die körperlichen Aufgaben des Pappos zu rechnen ist. Herr Tannery zeigt aber, dass und wie der Beweis auch mit ganz elementaren Hülfsmitteln geführt werden kann, und bestätigt damit die Richtigkeit des erhobenen Vorwurfes insofern, als allerdings Archimedes nicht grade immer die nächsten Wege betrat, die ihn zum gewünschten Ziele führen mussten. Gr.

P. Tannery. Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus. Darb. Bull. (2) VI. 99-108.

Proklos citirt in seinem Commentar zum ersten Buch der „Elemente" sechsmal den Heron Alexandrinus, einmal als Mechaniker, in den übrigen Fällen dagegen als Geometer. Herr Tannery legt sich nun die Frage vor, woher wohl diese Citate stammen mögen: ob aus einem uns unbekannten Euklid-Commentar des Heron oder aus anderen Schriften desselben? Henri Martin hat sich für die Möglichkeit eines Werkes ersterer Art entschieden. Mit Recht bemerkt der Verfasser, dass Proklos das heronische Original gar nicht gekannt, sondern selbst wieder seine Nachrichten nur aus zweiter Hand, durch Porphyrios und Pappos empfangen zu haben scheine. Alles in Allem ist aus den Worten des Proklos kein Anhalt dafür zu gewinnen, dass Heron die Elemente mit Noten versehen habe, wohl aber, dass derselbe, wofür auch andere Anzeichen sprechen, ein selbständiges Lehrbüchlein für geometrische Praktiker verfasste. Ihr entstammen vielleicht einige Angaben aus dem Geschichtswerke des Eudemos, welche Proklos gelegentlich verwertet, während ihm das Original selbst unbekannt geblieben sein dürfte. Jenes Theorem, welches in den Lehrbüchern als „Lehrsatz des Pappos" aufgeführt zu werden pflegt, ist unser Verfasser geneigt, dem Heron zuzuschreiben. Gr.

B. Sepp. Zu Posidonius Rhodius. Bair. Bl. XVIII. 397-399.

Dieser stoische Philosoph spielt auch in der Geschichte der exacten Wissenschaften eine gewisse Rolle, namentlich wegen seines auf richtigen Ideen beruhenden Versuches, den Umfang der Erde zu bestimmen. Seine Personaldaten waren bisher nur unvollkommen bekannt. Der Verfasser sucht hier wahrscheinlich zu machen, dass derselbe 128 v. Chr. geboren und 44 v. Chr. gestorben sei. An seinem grossartigen Versuch einer allgemeinen Kosmographie habe er die letzten sechs Jahre seines Lebens gearbeitet. Gr.

WINTERBERG. Der Tractat Franco's von Lüttich: „De quadratura circuli.“ Abh. z. G. d. M. IV. 135-190.

Beschreibung, Inhaltsangabe und Abdruck des Manuscriptes aus der Vaticanischen Bibliothek, siehe Cantor, Gesch. der Math. I. 649-650. O.

E. NARDUCCI. Intorno a due trattati inediti d'Abaco. Bonc. Bull. XV. 111-135.

Due trattati inediti d'Abaco. Bonc. Bull. XV. 135-162.

E. NARDUCCI. Notizia di due trattati d'Abaco manoscritti del secolo XII. Rom. Acc. L. (3) IV. 324-326.

Nachdem der Verfasser erwähnt hat, dass durch die Veröffentlichungen von Chasles, Treutlein, Friedlein und besonders durch Boncompagni's treffliche Ausgabe des Atelhart'schen Abakus unsere Kenntnis mittelalterlicher Zähl- und Rechnungsweisen eine ziemlich vollständige geworden sei, giebt er Aufschluss über zwei neue Abakus-Traktate, welche ihn seine bibliothekarischen Studien haben auffinden lassen. Der eine führt den Titel: „Turchilius, Reguncule super Abacum“, der andere ist anonym. Einer detaillirten Jnhaltsanalyse der bezüglichen Handschriften folgt die textuelle Wiedergabe der beiden Rechenbücher. Dass das erstere derselben angelsächsischen Ursprungs sei, ist so gut wie gewiss, indem der bezügliche Codex u. a. auch eine Strichrose aufweist, in welchem die Windnamen lateinisch und altenglisch sich geschrieben finden. Den Namen des Schriftstellers glaubt Herr Narducci übrigens auf einen dänischen Stamm zurückführen zu sollen. Gr.

M. STEINSCHNEIDER. Supplément à la notice sur les tables astronomiques attribuées à Pierre III. d'Aragon (Bulletino, T. XIII., pag. 413-436, Luglio 1880). Bonc. Bull. XV. 170-174.

In der Abhandlung, welche die Ueberschrift nennt, war Herr Steinschneider zu dem Ergebnis gekommen, dass der in der Vorrede des Tafelwerkes erwähnte König Peter IV. von Aragonien (1336-1387), und dass der als Jakob Carsi bezeichnete Mathematiker mit dem bekannteren Jakob Carsono eine und dieselbe Person sei. Kürzlich nun veröffentlichte Balaguer y Merino, Mitglied der katalonischen Akademie, eine Abhandlung, durch welche Steinschneider's Resultat die wünschenswerteste Bestätigung erfährt. Um 1360 liess nämlich eben jener König durch einen gewissen Dalmacus Planes, dessen Name gleichfalls in der Vorrede vorkommt, eine astronomische Schrift ausarbeiten. Der Artikel Balaguer's wird im spanischen Originaltexte abgedruckt.

Gr.

H. Suter. Eine bis jetzt unbekannte Schrift des Nic. Oresme. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 121-125.

Die Stiftsbibliothek zu St. Gallen enthält einen Katalog zu der aristotelischen Meteorologie, welcher den hervorragendsten Mathematiker des XIV. Jahrhunderts, Nikolaus D'Oresme, zum Verfasser hat. Es geht u. A. daraus hervor, dass dieser Mann von der pythagoräischen Doctrin einer Erdumdrehung Kenntnis hatte, sich aber aus den bekannten Gründen dagegen entschied. Auch hielt er, der gewaltige Gegner der „Astrologia judiciaria“, noch ruhig fest an der Irrlehre von der unheilvollen Bedeutung einer Kometenerscheinung. Gr.

J. P. Gram. Le triparty de Nicolas Chuquet. En Lärebog i Arithmetik og Algebra fra 1484. Zeuthen T. (4) VI. 126-138.

Eine Analyse der erwähnten Arbeit, welche im XIII. u. XIV. Bande des „Bulletino di bibliografia“ etc. von Boncompagni veröffentlicht worden ist, s. F. d. M. XIII. 1881. p. 8. Gm.

O. Z. Bianco. Note biografiche intorno a Giovan Francesco Peverone matematico Cuneese. Torino Att. XVII. 320-324.

Der Abhandlung, welche auch als Sonderabdruck im Verlage von H. Löscher in Turin erschienen ist, entnehmen wir die folgenden Daten. Johann Franz Peverone ward 1509 in Cuneo geboren; sein zweiter Name scheint nicht ganz festzustehen, da er an anderer Stelle auch Johann Baptist genannt wird. Er bekleidete in seiner Vaterstadt höhere bürgerliche Aemter, kämpfte auch mit den Waffen für dieselbe, verlegte aber bald darauf seinen Wohnsitz nach Mailand, wo er im Alter von fünfzig Jahren verstarb. Ein Lehrbuch der Arithmetik und ein eben solches der Geometrie bezeugten ebenso wie seine reiche Hinterlassenschaft mathematischer Instrumente Peverone's Neigung für seine Lieblingswissenschaft. Leider aber erfahren wir von dem Inhalte der genannten Bücher nichts Näheres, indem sich der Verfasser begnügt, auf die bezüglichen Angaben eines Riccardi, Libri, Todhunter, Gourand und Boncompagni hinzuweisen. Gr.

J. Perott. Sur une arithmétique espagnole du 16me siècle. Bonc. Bull. XV. 163-170.

Von der Arithmetik des Predigermönches Juan de Ortega existiren sieben Auflagen, welche der Verfasser mit bibliographischer Genauigkeit beschreibt. Die italienische Ausgabe von 1515 ist dadurch merkwürdig, dass in ihr zur Ausziehung der Quadratwurzel die bereits den Arabern bekannte Näherungsformel

$$\sqrt{a} = E(\sqrt{a}) + \frac{a-[E(\sqrt{a})]^2}{2E(\sqrt{a})+1}$$

verwendet wird, unter $E(\sqrt{a})$ die grösste in $\sqrt{a}$ steckende Zahl verstanden. Im Uebrigen aber scheint sich Ortega bei der Wurzelausziehung eines Verfahrens bedient zu haben, welches auf die ganzzahlige Auflösung der (Pell'schen) Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

hinauslief. Er schiene, wenn Perott's Vermutung richtig ist, somit zur Herstellung von Näherungen, wie

$$\sqrt{128} = 11 + \frac{16}{51}, \quad \sqrt{756} = 27 + \frac{109}{220} \cdots$$

bereits über einen kettenbruchartigen Algorithmus verfügt zu haben. Gr.

E. Wiedemann. Sulla storia delle scienze naturali presso gli Arabi. Bonc. Bull. XIV. 718-720.

Die von Dr. Sparagna übersetzte Arbeit beschäftigt sich mit einem auf der Leipziger Stadtbibliothek befindlichen Manuscripte des Jahja ibn Muhammed al Gâffari (1511) über merkwürdige Naturproducte. Es handelt sich in den mitgeteilten Stellen um die Bestimmung des specifischen Gewichtes von Edelsteinen und Metallen, zu welchem Zwecke Al Khazînî in seiner „Weisheitswage" einen eigenen Apparat angab. Eine vergleichende Tabelle zeigt uns, dass die arabischen Physiker gar nicht so ungenau verfuhren; für Blei z. B. fanden drei verschiedene Experimentatoren des Mittelalters die Werte 11,29; 11,35; 11,32, während heutzutage 11,35 als Durchschnittswert angenommen zu werden pflegt.
Gr.

A. Lindhagen. Nicolai Coppernici de hypothesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus. Stockh. Handl. VI. Nr. 12.

Coppernicus' kleine Schrift: „De hypotesibus motuum coelestium a se constitutis commentariolus" ist zum ersten Mal von M. Curtze in „Inedita Coppernicana" (Leipzig 1878, p. 5-17) nach einer leider etwas unvollständigen Wiener Handschrift herausgegeben. Eine andere vollständige Handschrift desselben „Commentariolus" ist von Herrn Lindhagen in einem, der Bibliothek der Schwedischen Akademie der Wissenschaften gehörigen Exemplare von Coppernicus „De revolutionibus orbium coelestium" (Basel 1566) aufgefunden und hier veröffentlicht. In der Ein-

leitung sagt der Herausgeber, dass die Handschrift wahrscheinlich um das Jahr 1600 in der Schweiz oder im nördlichen Italien geschrieben ist. G. E.

S. GÜNTHER. Peter und Philipp Apian, zwei deutsche Mathematiker und Kartographen. Ein Beitrag zur Gelehrten-Geschichte des XVI. Jahrhunderts. Prag. Abh. 1882.

Die umfangreiche, 134 Quartseiten umfassende Abhandlung giebt eine eingehende, alle Richtungen erschöpfende Darstellung des Lebens und der wissenschaftlichen Leistungen der beiden bekannten Gelehrten. Peter Apian ist geboren in Leisnig (Herzogtum Sachsen). Er studirte in Leipzig und Wien und verbrachte den grössten Teil seines Lebens an der Universität Ingolstadt, wo er am 21. Juli 1552 starb. Sein Sohn Philipp ist geboren am 14. September 1531 zu Ingolstadt. Er wurde nach seinen Studien und Reisen Nachfolger des Vaters in Ingolstadt, aber im Jahre 1569 seines Amtes der religiösen Verhältnisse wegen entsetzt. Er folgte einer Berufung nach Tübingen. Aber auch diese Stellung musste er 1583 aufgeben, da er sich weigerte die Concordienformel zu unterschreiben. Er starb am 12. November 1589. O.

A. FAVARO. Intorno alla vita ed alle opere di Bartolomeo Sovero. Bonc. Bull. XV 1-48.

In seinen bekannten verdienstlichen „Notizen zur Kulturgeschichte der Schweiz“ (Nr. 330) sagt Rudolf Wolf: „Ich hatte 1862 in meinen Biographieen eine ganz kurze Notiz über einen freiburgischen Mathematiker Bartholomée Souvey oder Soverus gegeben, aber sie war meinem Gedächtnisse total entschwunden, als mich Professor Favaro in Padua zu Anfang vorigen Jahres, d. h. volle zwanzig Jahre später, nach diesem Manne fragte, und auch die auf meine Bitte hin durch Herrn Professor Buman in Freiburg in den dortigen Archiven veranlassten Nachforschungen

waren von so dürftigem Erfolge, dass ich Herrn Favaro nur einige wenige Anhaltspunkte mitteilen konnte. Um so freudiger war ich überrascht, als ich von Letzterem die volle funfzig Quartseiten füllende Abhandlung „Intorno etc.“ erhielt und die Masse von Notizen und Belegen kennen lernte, welche der gelehrte Verfasser zu sammeln und zu einer ziemlich vollständigen Biographie des sozusagen vergessenen Mannes zu verarbeiten wusste“ ... Mit diesen Worten einer Autorität auf dem Gebiete der mathematisch-geschichtlichen Forschung dürfte der Allgemeincharakter von Herrn Favaro's Abhandlung zur Genüge gekennzeichnet sein. Souvey ward um 1577 zu Corbières im Kanton Freiburg geboren, studirte in letzterer Stadt und im Collegium Borromeum zu Mailand, war, nachdem er in den Jesuitenorden eingetreten, folgeweise Lehrer in Turin und Rom und erhielt 1624 als zweiter Nachfolger Galilei's die mathematische Professur an der Universität Padua. Am 23. Juli 1629 ist er daselbst verstorben. Sein bereits im II. Bande von Kästner's „Geschichte der Mathematik“ besprochenes Hauptwerk heisst: „Curvi ac recti proportio, Patavii 1629.“ In demselben findet man mehrere damals neue oder doch ganz wenig bekannte Lehrsätze über Kreisbögen und trigonometrische Linien, wie z. B. den folgenden:

$$\left(\frac{\text{chord}\,\alpha}{\text{tang}\,\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\sec^2\alpha + \sec\alpha}.$$

In die höhere Geometrie jener Zeit geht Souvey ziemlich tief ein und setzt seinen Lesern namentlich im Sinne des Pappos den Unterschied zwischen linearen, ebenen und körperlichen Problemen correct auseinander. Die Kegelschnitte sowol wie die bekannteren transcendenten Curven lässt er durch Bewegung entstehen; überhaupt zeigt er sich in der Curvenlehre gut beschlagen, obgleich es ihm selbstverständlich nicht gelingt, zu dem ihm vorschwebenden Endziele, der Kreisquadratur, durchzudringen. Ein Anhang des genannten Buches ist den gelehrten Streitigkeiten des Autors mit Gloriosi über die Natur der Kometen gewidmet. Lange nach Souvey's Tode wurde sein Name wieder in die Discussion gezogen durch seinen wohlbekannten Ordensgenossen Paul Guldin, der, allerdings mit Unrecht, die Behauptung auf-

stellte, Cavalieri habe die Grundidee seiner trefflichen „Geometria indivisibilium" teils dem Kepler, teils dem Soverus entnommen. Letzterer hinterliess ausgearbeitete Manuscripte in grosser Anzahl, von denen manche, wie die Bemerkungen zum „Novum Organon" des Francis Bacon, einen erheblichen zeitgeschichtlichen Wert besessen haben oder noch besitzen mögen.

Gr.

Ch. Henry. Sur les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie. Bonc. Bull. XV. 49-71.

Beschrieben ist hier ein Algorismus der Bibliothek von St. Genovefa zu Paris, der keinen bestimmten Autor hat und der Zeit Philipp's des Kühnen entstammt. Chasles hatte sich vergeblich bemüht, den Codex aufzufinden. Die arithmetische Abhandlung, welche Herr Henry veröffentlicht, ist nur ganz kurz; ihr folgt aber eine geometrische, in welcher die wichtigsten planimetrischen Rechnungsaufgaben sammt der Lösung in bestimmten Zahlen zusammengestellt sind. Die Angaben des Herausgebers hätten gewaltig vermehrt werden müssen, wenn der schwierige altfranzösische Text leichtverständlich werden sollte.

Gr.

Mouchez. Discours. C. R. XCV. 399-402.

Rede, die bei der Enthüllung des Fermat-Denkmals in Beaumont-de-Lomagne am 20. August 1882 gehalten worden ist. Näher eingegangen auf Fermat's Verdienste um die Mathematik wird nicht.

O.

P. Fermat. Manuscrits inédits, extraits par M. E. Lucas.

Magische Quadrate auf 196 Seiten und magische Würfel auf 64 Seiten.

Mn.

A. Favaro. Sul carteggio Galileiano, testè edito dal Marchese Giuseppe Campori. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 551-571.

Besprechung der im Titel angegebenen Publication und Angabe der Briefe, nach Jahren und Namen geordnet.

O.

A. Favaro. Intorno ad un episodio non ancora chiarito del processo di Galilei. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 715-740.

Die Note bespricht den Umstand, dass die Unterschriften dreier Cardinäle, die doch in dem Galilei verurteilenden Tribunal sassen, unter dem Urteil selbst fehlen. O.

A. Favaro. Intorno ad una nuova edizione delle opere di Galilei. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 83-132.

Die Notiz bespricht alles das, was bei einer neuen Gesammtausgabe der Werke Galilei's zu beachten wäre.

O.

G. Campori. Carteggio Galileiano con note ed appendici. Modena. Società tipografica.

Kaum einer der hervorragenden Männer, durch welche unsere Methode der Naturforschung in die jetzt von ihr eingeschlagenen Pfade gelenkt wurde, hat so allgemein die Aufmerksamkeit weiterer Kreise auf sich gezogen, wie Galileo Galilei, dessen tragische Schicksale ihm stets noch ein besonderes Relief verliehen. So konnte man denn, zumal als Albèri's treffliche Gesammtausgabe erschienen war, die Erwartung hegen, dass für die Kenntnis der Lebensumstände und Leistungen des grossen Mannes alles Mögliche geschehen, alles vorhandene Material verwertet worden sei. Diese Erwartung trog jedoch; Professor

Favaro in Padua hat im Verlaufe der letzten Jahre eine ganze Anzahl kleinerer und grösserer Aufsätze über Galilei veröffentlicht, aus denen hervorging, dass noch ein sehr reichhaltiger Stoff zu bewältigen sei, auch stellt derselbe eine Gesammtausgabe Galilei'scher Werke und Correspondenzen in Aussicht, welche diejenige Albèri's vollständig in den Hintergrund zu drängen bestimmt sein dürfte. Gleichwol wird in Fachkreisen wol allgemeines Staunen geherrscht haben, als man die Nachricht von dem grossartigen Werke des Marchese Campori erhielt, in welchem ungefähr 650 an Galilei gerichtete Briefe, grösstenteils zum ersten Male, veröffentlicht und mit den nötigen Erläuterungen versehen wurden. Dieser kostbare Schatz ruhte bisher ungehoben im Hausarchive der mit der Familie des grossen Physikers weitläufig verwandten Geschlechtes Tosi-Galilei, sechs starke Bände erfüllend, und aus der Hinterlassenschaft des letzten Trägers dieses Namens gelangten sie durch Vermittelung des Buchhändlers Dotti in die Hände des gegenwärtigen Herausgebers. Derselbe hat sich jedoch, wie schon bemerkt, nicht darauf beschränkt, die einzelnen Schriftstücke einfach abdrucken zu lassen; er hat vielmehr zahlreiche Briefe noch hinzugefügt, welche bisher unbenutzt auf der Nationalbibliothek zu Florenz lagen, hat jedem einzelnen Stücke eine genaue Inhaltsübersicht beigegeben und vor das Ganze eine sehr verdienstliche „Cronologia Galileiana“ gestellt.

Detaillirte Mitteilungen über den Inhalt der Briefschaften zu geben, ist an diesem Orte nicht wol möglich; es sei in dieser Beziehung nur verwiesen auf die Referate, welche über das Campori'sche Werk von einem Ungenannten in der „Wissenschaftl. Beilage zur Allg. Zeitung“, von Favaro in Vol. VIII. der „Atti“ des venetianischen Institutes, von M. Cantor in Jahrg. 28, Heft 1 der „Zeitschr. f. Math. und Physik“ und von dem Unterzeichneten im Jahrg. 17, Hft. 3 der „Vierteljahrsschr. der astron. Gesellsch.“ erstattet worden sind. Nur einiger Hauptmomente sei auch hier kurze Erwähnung getan. Von Briefen Sagredo's, des vertrauten Freundes Galilei's, kannte man bislang nur 26, während uns hier deren 59 geliefert werden; dieselben sind allerdings mehr in kulturhistorischer Beziehung und auch deshalb wichtig, weil aus

ihnen manche Streiflichter auf die persönlichen nahen Beziehungen beider Männer fallen: doch interessiren auch sonst Sagredo's Versuche mit dem Magneten und die von letzterem angeregte langgedehnte Discussion der Frage, ob wirklich bei Erdumsegelungen, wie der des „Magaglianes“, ein Tag gewonnen oder verloren werden könne. Weitere 59 Briefe entfallen auf den freisinnigen Mönch Micanzio, der in der Geschichte von Galilei's Bemühungen um Herstellung einer Pendeluhr mehrfach genannt wird. Derselbe macht aus seinem Skepticismus in gewissen Glaubensfragen kein Hehl und spielt auch den Mittelsmann, wenn es sich darum handelt, Galilei'sche Manuscripte im Auslande unter die Presse zu bringen. Für die Geschichte der Mathematik sind von Bedeutung einzelne Briefe des bekannten Jesuiten Bonaventura Cavalieri, der über eine zur Herausgabe vorbereitete sphärische Trigonometrie Mitteilungen macht, und u. A., zweifellos ganz unabhängig von Albert Girard, den richtigen Ausdruck für den Flächeninhalt eines Kugeldreieckes angiebt. Zur Personalgeschichte Galilei's verzeichnen wir die noch von Wohlwollen und anscheinend aufrichtiger Verehrung getragenen Zuschriften des Pater Scheiner, der damals (1615) also noch nicht zum offenen Feinde geworden sein konnte, obwohl zwei Jahre früher bereits zwischen ihm und Galilei ein ziemlich hitziger Prioritätsstreit anlässlich der Entdeckung der Sonnenflecke ausgefochten worden war. Niccolini, der toscanische Geschäftsträger bei der Curie, und seine hochherzige Gattin Caterina erscheinen ebenfalls unter den Briefstellern, und man ersieht, mit welchem Eifer namentlich die Letztere sich bestrebte, das traurige Loos des gelehrten Landsmannes einigermassen zu mildern. Dem Werke folgen sechs sehr inhaltreiche Noten. Die erste derselben stellt gemäss dem noch vorhandenen, nach allen Regeln der Astrologie gefertigten Horoscope fest, dass Galilei am 15. Februar 1564 das Licht der Welt erblickte, die zweite und dritte bringen neue Nachrichten über Kindheit und Studiengang desselben, die vierte beschäftigt sich mit einem das Fernrohr betreffenden Schreiben des Grafen Fontanelli, die fünfte handelt von Galilei's Arbeiten zu Gunsten der Bestimmung der Meereslänge, die sechste endlich bespricht

Galilei's Stellung zur Sterndeuterei. Den Schluss bildet das im Notariatsarchiv zu Florenz aufbewahrte Testament Galilei's und der Wiederabdruck einer von Venturi im Jahre 1820 der Modenesischen Akademie eingereichten Denkschrift, in welcher nachgewiesen wird, dass das unter dem Namen „Celatone" bekannt gewordene Werkzeug nicht, wie man vermutet hatte, ein Binocularteleskop gewesen sei. Govi und Favaro sprechen sich in gleichem Sinne aus. Gr.

A. Genocchi. Presentazione di un volume „Correspondance inédite de Lagrange et D'Alembert." Torino, Atti XVII. 531-533.

Bericht über den Inhalt des 13ten Bandes der Werke von Lagrange bei Gelegenheit der Uebergabe desselben an die Pariser Akademie. O.

S. Günther. Il carteggio tra Gauss e Sofia Germain. Traduzione dal Tedesco dell' A. Sparagna. Bonc. Bull. XV. 174-175.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 19.

David. Notice sur les oeuvres de Cauchy. Toul. Mém. (8) IV. 178-201.

Der Verfasser ist der Meinung, dass Cauchy's Verdienste gegenüber denen von Gauss und Jacobi zu sehr in Vergessenheit geraten sind. Er unternimmt es daher, die Arbeiten und Leistungen Cauchy's in's Gedächtnis zurückzurufen, indem er eine Analyse seiner Arbeiten, speciell derer aus dem Gebiete der Functionentheorie giebt. O.

Jacob Steiner. Gesammelte Werke. Herausgegeben von K. Weierstrass. Bd. II. Berlin. G. Reimer.

Fortsetzung und Schluss der im vorigen Bande der F. d. M. p. 22 besprochenen Ausgabe der Werke Steiner's. Sie enthält die übrigen Arbeiten des berühmten Geometers. Zu bemerken ist nur, dass zwei der Arbeiten: „Ueber Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raum überhaupt", welche bisher nur in französischer Sprache publicirt waren, nach dem ursprünglichen deutschen Originalmanuscript veröffentlicht sind. In Steiner's Nachlass hat sich ausser Zusätzen und Berichtigungen nichts Bemerkenswertes gefunden. O.

FAYE, LABOULAYE. Discours. C. R. XCV. 467-471.

Reden bei dem Begräbnis von Liouville am 11. September. O.

G. BAUER. Gedächtnisrede auf Otto Hesse. Münch. Abh. 1882.

Ludwig Otto Hesse ist geboren am 22. April 1811 zu Königsberg in Preussen. 1832 bezog er die Königsberger Universität zu jener Zeit, wo Königsberg seine mathematische Glanzperiode feierte, gekennzeichnet durch die Namen Jacobi, Bessel, Richelot und F. Neumann. 1840 promovirte er mit der Arbeit „Ueber die Oberflächen zweiten Grades" und habilitirte sich kurz darauf. Zehn Jahre dauerte es, bis er endlich als ordentlicher Professor nach Halle kam. Von dort siedelte er 1856 nach Heidelberg und 1868 nach München an das neugegründete Polytechnicum über. Er starb am 4. August 1874.

Die vorliegende Gedächtnisrede enthält indess mehr, als einen trocknen Nachruf. Sie giebt eine Analyse der Arbeiten des bekannten Mathematikers. Der Verfasser hat es dabei verstanden, an die Schilderung der Leistungen der einzelnen Persönlichkeit eine in kürzesten Zügen gehaltene Darstellung der Geometrie überhaupt zu knüpfen. Die Darstellung des Verfassers characterisirt die Etappen der Entwickelung der Geometrie durch die Namen Euklid, Descartes, Monge, Poncelet, Steiner, Chasles, Plücker.

Besonders hervorgehoben wird überall der Zusammenhang zwischen der Entwickelung der Geometrie und der Algebra. Durch diese allgemeinen Beziehungen werden vielfach sonst schwer zu übersehende Zusammenhänge zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik gewonnen. O.

L. Tetmajer. Ueber Culmann's bleibende Leistungen. Zürich. Meyer u. Zell.

A. Favaro. Della vita e degli scritti di Carlo Culmann. Ven. Ist. Att. (5) VIII. 715-740.

Schilderung des Lebens und der Leistungen des bekannten Mathematikers. O.

D. Turazza. Commemorazione di Giusto Bellavitis. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 395-422.

Nachruf für Bellavitis. Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 23-24. O.

D. Bierens de Haan. Bibliographie Néerlandaise historico-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècles, sur les sciences mathématiques et physiques avec leurs applications. Bonc. Bull. XIV. 519-630, 677-718, 1881; XV. 225-312, 355-438.

Der Inhalt dieser Arbeit ist aus dem Titel völlig ersichtlich. Die Arbeiten sind alphabetisch nach den Namen der Autoren geordnet und mit allen Notizen versehen, welche von Interesse sein können. O.

P. Riccardi. Nota statistica di storia matematica. Modena, Mem. XX. 299-310.

Die Arbeit enthält eine Zusammenstellung statistischer Notizen über das Leben und die Arbeiten italienischer Mathematiker. Referent kann den Nutzen der mühsamen Arbeit nicht verstehen. Historisch wird nichts gefördert, und die Einteilung der berücksichtigten Männer in Mathematiker 1ter, 2ter, 3ter, 4ter Klasse wird mit nichts motivirt. (Genannt wird nur die erste Klasse Archimed, Galilei, Lagrange.) O.

B. Geschichte einzelner Disciplinen.

P. de Lagarde. Woher stammt das x der Mathematiker? Gött. N. 1882. 409-413.

Der Verfasser zeigt, dass der Gebrauch des x durch die arabische Uebersetzung des Wortes cosa, nämlich $x$ei entstanden ist, und teilt einen Brief von Herrn Menge in Mainz mit, worin dieser zu erklären sucht, wie der Gebrauch des Wortes $x$ei aus dem bei Diophant gebräuchlichen ἀριθμος entstanden sei.

O.

S. Günther. Sur la dépendance entre certaines méthodes d'extraction de la racine carrée et l'algorithme des fractions continues. Bord. Mém. (2) V. 91-107.

Um gewisse im Altertum vorkommende Näherungswerte von Quadratwurzeln zu erklären, haben Mollweide und Alexejeff Berechnungsmethoden angegeben, welche keine weiteren arithmetischen Vorkenntnisse voraussetzen, als solche, die bereits zur Zeit des Archimedes bekannt sein konnten. In der vorliegenden Note aber wird gezeigt, dass beide Verfahrungsweisen doch nur versteckte Kettenbruch-Algorithmen involviren. Gr.

S. Günther. Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden. Abh. z. G. d. M. IV. 1-134.

Der Verfasser hat die Untersuchungen wieder aufgenommen, über die bereits im Bande XI. 1879. dieses Jahrbuches p. 37-38 berichtet worden ist. Er beschränkt sich in dieser Arbeit auf quadratische Irrationalitäten, zieht dafür aber auch alle anderen Methoden als Kettenbruchentwickelungen, in den Kreis seiner Untersuchung. Gemäss dem Ziele der Untersuchung zerfällt die Abhandlung in drei Capitel, in deren erstem das Material aus dem Altertum gesammelt wird. Das zweite Capitel (p. 51-100) ist der Ableitung der antiken Quadratwurzeln durch offene oder versteckte Kettenbruch-Algorithmen gewidmet und das 3[te] (101-129) der Ableitung derselben durch Entwickelung in Bruchreihen. Auf die Untersuchung selbst näher einzugehen, erlaubt der hier gestattete Raum nicht. Referent muss sich daher begnügen, die wesentlichsten Ergebnisse anzuführen. Die Alten gingen bei der Berechnung irrationaler Quadratwurzeln durchgängig von der Relation $\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \frac{b}{2a}$ aus und brachten dann in fast empirischer Weise Verbesserungen an. Von der so gewonnenen ersten Annäherung aus gewann man methodisch durch Betrachtungen ähnlich denen, die bei der Auflösung der Pell'schen Gleichung gebraucht werden, weitere Näherungswerte. Ein Kettenbruchverfahren, welches mit dem jetzigen Aehnlichkeit hätte, existirte ebenso wenig, wie die Auflösung in eine Bruchreihe. Nur bei den Indern, Arabern und Juden des frühen Mittelalters finden sich die Näherungswerte der Entwickelung

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm b:2a \pm b:2a \dots$$

O.

F. Schlepps. Die Logarithmen. Leipzig. Scholtz.

Das Buch will in möglichst einfacher und elementarer Weise den Begriff und das Wesen der Logarithmen auch dem grossen Publicum zugänglich machen. Der Verfasser entwickelt daher zunächst in einer Einleitung eine Geschichte der Logarithmen. Seine Behauptung, Jost Bürgis sei als der Entdecker anzusehen, wird vielfach beanstandet werden. Dann giebt er die einfachsten Sätze und Anwendungen der Logarithmen. O.

Kiessling. Ueber die Entwickelung des Imaginären in der Analysis. Hamb. Mitt. 1882. 24-26.

Aus dem vorliegenden kurzen Auszuge ergiebt sich, dass Herr Kiessling zunächst die Versuche der italienischen Algebraiker (Girardet) zur Benutzung des Imaginären erwähnt. Er schildert dann die Entwickelung des Algorithmus imaginärer Zahlen und ihrer Anwendung von Euler bis Riemann. O.

F. Hultsch. Die geometrische Zahl in Platon's VIII. Buche vom Staate. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 42-60.

Die Veröffentlichung von Dupuis': „Le nombre géométrique de Platon; interprétation nouvelle" (Paris 1881) gab auch Herrn Hultsch Veranlassung, mit den Ansichten nicht mehr zurückzuhalten, welche er sich bereits vor längerer Zeit über dieses viel umstrittene Problem gebildet hatte. Für ihn ist diese Zahl gleich

$$3600^2 = 2^8.3^4.5^4 = 3^4.4^4.5^4 = 700.2700.\sqrt{7-\frac{1}{7}}\cdot\sqrt{7-\frac{1}{7}}.$$

Als eine wesentliche Stütze dieser Hypothese darf man es betrachten, dass sie nur mit den Zahlen 3, 4, 5 operirt, welche als Seitenmasszahlen des einfachsten pythagoräischen Dreieckes in der älteren Mathematik eine so gewichtige Rolle spielten. Zudem lassen sich gewisse grosse Zeitperioden der antiken Astronomie (das grosse platonische Jahr u. s. w.) zu der genannten Zahl in eine ganz ungezwungene Beziehung setzen. Gr.

O. Stolz. Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Innsbr. Ber. XII.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1.

E. Mahler. Beitrag zur Geschichte der Mathematik. Schlömilch Z. XXVII. Hl. A. 207-210.

Herr Cantor hatte gelegentlich einmal gebeten, nach der

Stelle des Talmud zu forschen, auf der die orientalische Annahme $\pi = 3$ beruhe. Dies geschieht in der vorliegenden Notiz.

O.

M. Baker. Alhazen's problem. Its bibliography and an extension of the problem. Sylv., Am. J. IV. 327-332.

Alhazen's Problem ist folgendes: „Von zwei Punkten in der Ebene eines Kreises sollen Linien gezogen werden, welche sich in einem Punkte der Peripherie schneiden und gleiche Winkel mit der im Schnittpunkt gezogenen Tangente bilden.“ Die vorliegende Arbeit giebt ein Verzeichnis der Mathematiker, welche sich mit diesem Problem beschäftigt haben, und überträgt dasselbe im zweiten Teil auf die Kugel.

O.

E. Gelcich. Eine Studie über die Entdeckung der analytischen Geometrie. Mit Berücksichtigung eines Werkes des Marino Ghetaldi Patrizier Rogusaer. Aus dem Jahre 1630. Abh. z. G. d. M. IV. 191-232.

Das Werk des Ghetaldi, welches den Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit bildet, heisst: „De resolutione et compositione mathematicis. Libri quinque. Opus posthumum. Roma. Ex typographia reverendae camerae apostolicae. MDCXXX.“ Der Verfasser giebt zunächst nähere Nachrichten über Ghetaldi's Person und Leben. Dem folgt eine genaue Analyse des oben citirten Werkes. Der Verfasser bespricht nun kritisirend die Autoren, welche in Folge desselben Ghetaldi für den Entdecker der analytischen Geometrie ausgegeben haben, und lässt dann einen Ueberblick über frühere Anwendungen der Algebra auf die Geometrie folgen. Er kommt schliesslich zu dem Resultate, dass das Verdienst des Ghetaldi gegenüber Oresme und Anderen darin bestehe, dass er die Anwendung der Algebra auf die Geometrie zuerst zum Gegenstand eines besonderen Studiums gemacht habe. Der letze Abschnitt enthält noch Einiges über Descartes, worüber

n der Arbeit von Kramer (siehe p. 26) ausführlich ge-
›n ist. O.

3UINE. Liste des travaux sur les ovales de Des-
es. Darb. Bull. (2) VI. 40-49.

r Titel bezeichnet den Inhalt. O.

›ENBERGER. Die Geschichte der Physik in Grund-
en mit synchronistischen Tabellen der Mathematik, Chemie und beschreibenden Naturwissenschaften, ie der allgemeinen Geschichte. Erster Teil. Ge-
chte der Physik im Altertum und im Mittelalter. ›schweig. Vieweg u. Sohn.

r vorliegende erste Band des Werkes zerfällt in zwei Der erste ist der Geschichte der Physik im Altertum ge- und besteht aus drei Abschnitten. I. Von 600—300 . Physik als reine Naturphilosophie. II. Von 300 vor nach Chr. Periode der mathematischen Physik. III. Von 700. Periode des Untergangs der alten Physik. Der Teil behandelt wieder in drei Abschnitten das Mittelalter. 150. Periode der arabischen Physik. II. 1150 bis 1500. ›he Periode der mittelalterlichen Physik. III. 1500 bis 1600. ›ngsperiode der mittelalterlichen Physik. Jeder Abschnitt der Spitze eine allgemeine Charakteristik der Periode. folgt dann die Darstellung der Leistungen, geordnet nach ›nnern. Am Schluss findet sich eine synchronistische der Physik, Mathematik, Chemie und beschreibenden Natur- chaften mit der allgemeinen Geschichte. O.

SSWITZ. Die Lehre von den Elementen während Ueberganges von der scholastischen Physik zur ›uscularthеorie. Pr. Gotha.

Lasswitz schildert, wie sich die Theorie der Elemente von den ersten Anfängen des Kampfes gegen die aristotelisch-scholastische Physik bis auf Galilei unter Einfluss des humanistischen Gedankenkreises und der naturwissenschaftlichen Bestrebungen entwickelte. Die so entstandene Naturphilosophie sucht noch den Sitz des gestaltenden Lebens in der Materie selbst und führt auch bei ihren bedeutendsten Vertretern, Nicolaus v. Cusa, Paracelsus, v. Helmont etc. noch nicht zu einer exacten Naturforschung. Erst als die Natur vom Einfluss des Bewustseins emancipicirt und der quantitative Masstab angelegt wurde, gelangte man zur methodischen Naturforschung. Mi.

JÄRISCH. Die beiden Theorien der Elasticität in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Hamb. Mitt. 1882. 18.

Aus dem vorliegenden kurzen Bericht über den Vortrag ergiebt sich, dass Herr Järisch die Theorien von Navier, Laplace, Poisson, Cauchy und Lamé in den Bereich seiner Besprechung gezogen hat. O.

P. KRAMER. Descartes und das Brechungsgesetz des Lichtes. Abh. z. G. d. M. IV. 235-278.

Der Verfasser sucht nachzuweisen, dass die von Poggendorff und vielen Anderen ausgesprochene Ansicht, Descartes habe die Entdeckung von Snellius gekannt und in unberechtigter Weise sich zugeschrieben, nicht einwandsfrei ist. Er nimmt die Frage daher nochmals auf und kommt zu dem Resultate, dass ebensoviele Gründe für die selbständige Entdeckung des Gesetzes durch Descartes sprächen, wie dagegen. O.

PH. GILBERT. Les preuves mécaniques de la rotation de la terre. Rev. d. qu. sc. XI. 353-393.

Historisch-kritische Abhandlung. I. Pythagoras, Philolaus, Heraclit, Elephantus, Aristarch, Seleucus, Nicolaus de Cusa,

Copernicus, Galilei, Newton. II.-III. Versuche von Benzenberg und Reich. Beobachtung der Abweichung eines aus gewisser Höhe fallenden Körpers von der Vertikalen. Diese Experimente beweisen, trotz des richtigen Princips, das ihnen zu Grunde liegt, nichts, weil die beobachteten Abweichungen zu sehr von der mittleren abweichen. IV. Bei dem Foucault'schen Pendel ist es praktisch unmöglich, die Wirkung der Torsion des Fadens zu schätzen. V. Das Gyroscop von Foucault. VI. Das Barygyroscop von Gilbert. Mn. (O.).

B. Zuckermann. Materialien zur Entwickelung der altjüdischen Zeitrechnung. Breslau. Preuss u. Jünger.

Die Juden der biblischen Periode behalfen sich mit ziemlich einfachen chronologischen Normen. Sie rechneten den bürgerlichen Tag von Sonnenuntergang bis Sonnenuntergang, die Nacht von Sonnenuntergang bis Sonnenaufgang, sie teilten den Tag in die vier Zeiten Abend, Mitternacht, Morgen und Mittag, sie teilten ebenso die Nacht in vier „Wachen", auch kannten sie den Unterschied zwischen dem vollständigen Monat von 30 und dem unvollständigen Monat von 29 Tagen. Der Monatsanfang wurde strenge nach dem Sichtbarwerden der Mondsichel bemessen, und immer wieder knüpfte die Zeitrechnung an die empirische Constatirung dieser Erscheinung an, wiewohl eigentliche Gelehrte, wie Rabbi Gamaliel, die Frist auch theoretisch vorauszubestimmen gelehrt hatten. Das orthodoxe Judentum hielt daran fest, dass der Monatsanfang durch ein contradiktorisches Zeugenverhör vor einem zu diesem Zwecke niedergesetzten Gerichtshofe festgestellt werden musste. Ueber die Art und Weise dieser höchst wundersamen Procedur macht uns der Verfasser auf Grund eingehenden Talmud Studiums nähere Mitteilungen, die selbstverständlich mehr auf sittengeschichtliches, als auf mathematisch-historisches Interesse Anspruch erheben können. Bemerkenswert dürfte wohl die folgende Stelle des Gesetzbuches sein: „Sagen die Zeugen: Wir haben die Mondsichel im Fluss oder durch ein Glas oder in den Wolken gesehen, so gilt ein solches Zeugnis nichts." Was für

eine Art von „Glas“ mögen die hebräischen Juristen dabei wohl im Sinne gehabt haben? Weiter wird erörtert, unter welchen Umständen die Heiligung des neuen Mondes stattfand, wie der Beschluss des Synedriums den auswärtigen Glaubensgenossen kundgetan ward, wie endlich für die Einschaltung eines Monates teils agrarische, teils astronomische, teils auch endlich social-politische Momente in Betracht zu kommen hatten. Zum Schluss endlich erfahren wir, wie die aus solchen rigorosen Bestimmungen entfliessenden Uebelstände, welche auch von wissenschaftlicher gesinnten Rabbinern, wie Bar-Kappara, nicht zu heben waren, den allmäligen Uebergang zum festen Kalender erzwangen. Die Vorarbeiten zu einem solchen lieferte Mar Samuel, der sich dadurch allerdings die orthodoxe Partei verfeindete. Religionsgeschichtliche und mathematische Noten beschliessen die interessante Schrift. Gr.

Capitel 2.

Philosophie.

A. Philosophie.

W. Šimerka. Die Kraft der Ueberzeugung. Cas. XI. 75-111. (Böhmisch).

Diese auch in den Sitzungsberichten der philosophisch-historischen Klasse der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien erschienene Abhandlung will als „ein mathematisch-philosophischer Versuch“ gelten, die verschiedenen Grade der Ueberzeugung, der Wahrscheinlichkeit analog, zu begründen und ziffermässig auszudrücken. Std.

B. J. Gilman. On propositions and syllogisms. J. Hopkins Circ. 1882. 240.

C. S. Peirce. Remarks. J. Hopkins Circ. 1882. 240.

Gilman behandelt die Logik aus sechs Grundformen des Urteils. Er leitet aus den Grundformen 48 verschiedene Urteile ab und bespricht die sich daran anschliessende Syllogistik. Peirce fügt die Syllogistik zweier Urteilsformen der gewöhnlichen Logik unter Anwendung der „Algebra of relatives" hinzu. Mi.

B. J. Gilman. On propositions called „spurious". J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Gilman bespricht die von De Morgan „Spurious" genannten Bastardsätze unter Anwendung der „Algebra of relatives" von Peirce. Mi.

A. Macfarlane. An analysis of relationship. Ed. Times XXXVI. 78-107.

Der Artikel enthält einen Auszug aus mehreren Berichten über eine Analysis der Relationsbegriffe, in specieller Anwendung auf die Verwandtschaftsverhältnisse des Menschen. In der Tat lassen sich zur Fixirung der complicirten verwandtschaftlichen Beziehungen logisch-mathematische Formeln vortrefflich verwenden. Mi.

Y. Villarceau. Essai philosophique sur „Science de l'ordre". C. R. XCIV. 1008-1013.

Villarceau will zeigen, wie man durch ein einfaches philosophisches Raisonnement zu der „Science de l'ordre" gelangen kann. Mi.

C. N. Judson. Zero and Infinity. Anal. IX. 9-11.

De V. Wood. Limits. Anal. IX. 79-81.

S. Newcomb. Remarks on the doctrine of limits. Anal. IX. 114-119.

Controverse über die Definition der Grenze. Jn. (O.).

A. F. IGURBIDE. Investigaciones filosofico-matematicas sobre las contidades imaginarias. I. Valencia. M. Alufre 1881. 8°.

S. A. SEXE. Skul de des ikke lade sig finde et reellt mathematisk Udtryk, der kunde overtage de imaginaere Stórrelsers Rolle eller gjóre samme Tjen este som disse Stórrelser. Lie Arch. VII. 115-154.

Der Verfasser sucht das Imaginaire zu vermeiden, resp. durch reelle mathematische Ausdrücke zu ersetzen.

L.

O. SIMONY. Eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. Wien Anz. 1882 96-97.

Die Notiz giebt einen Bericht über den ersten Teil einer Abhandlung Simony's, in der speciell diejenigen Erscheinungen untersucht werden, die ein biegsamer Ring von kreisförmigem Querschnitte zeigt, falls man einen den Ring bis zur Mittellinie durchsetzenden längs der letzteren in sich selbst zurückkehrenden Schnitt durch denselben führt. Die Abhandlung, die eine Reihe auf specielle Experimente gestützter mathematischer Erfahrungssätze als Resultat liefert, ist eine Fortsetzung der interessanten topologischen Untersuchungen Simony's. Derselbe hat schon in einer 1881 in III. Aufl. erschienenen Schrift das Problem, in einen unverdrehten biegsamen Ring ohne Ausführung eines Querschnittes einen Knoten zu machen, in der klarsten und anschaulichsten Weise behandelt, auch die Beziehungen dieses Problems zur Theorie des vier-dimensionalen Raumes erörtert und die Bedenken, die einer Hypothese der wirklichen Existenz eines vier-dimensionalen Raumes entgegenstehen, scharf und bestimmt hervorgehoben.

Mi.

A. Ledieu. Du cycle du raisonnement. C. R. XCIV. 1442-1446.

Unter dem „cycle du raisonnement" versteht Ledieu ein logisches Verfahren, welches die Beobachtung oder das Experiment a priori, die Deduktion, die Induktion und das Experiment oder die Beobachtung a posteriori in sich fasst. Nur die vollständige Anwendung dieses Kreises von Operationen führt, nach Ledieu's Urteil, zur Ableitung solcher Begriffe und Hypothesen, wie sie z. B. der Mechanik zu Grunde liegen. Mi.

A. Ledieu. Considérations sur la théorie générale des unités. C. R. XCV. 1328-1332.

Ledieu bespricht die Grundlagen einer formalen Metrologie: die theoretische Aufstellung der Maasseinheiten, die Verbindung der Maasseinheiten unter einander, die Gewinnung von Normalmaassen etc. Mi.

Gilles. Die Einheit der Naturkräfte. Bair. Bl. XVIII. 283-292.

Dieser Aufsatz enthält im Wesentlichen eine eingehende Kritik der bekannten Schrift von Schmitz-Dumont: „Die Einheit der Naturkräfte". Der rechnungsmässige Nachweis dafür, dass die Grundannahme jenes Buches, abstossende Kräfte, die dem Newton'schen Gesetze des umgekehrten Quadrates der Entfernung gehorchen, selbst die einfacheren Fälle nicht genügend erkläre, wird von Herrn Gilles in ähnlicher Weise geführt, wie dies auch von Isenkrahe (Schlömilch Z.) und von Lasswitz (Gött. gel. Anzeigen) getan worden ist. Der Verfasser, der schon früher die Newton'sche Gravitation als die Quelle aller und jeder Kraftäusserungen im Weltall aufzuzeigen bestrebt war, spricht sich im Gegensatz zu den würfelförmig angeordneten Kraftcentren Schmitz-Dumont's für eine reihenförmige Lagerung der Atome aus und sucht diese seine Auffassung analytisch zu rechtfertigen. Gr.

D. Pirmez. De l'unité des forces de gravitation et d'inertie. Bruxelles. Bruyland-Christophe. 1881. 8°.

P. Mansion. Examen critique. Rev. de l'Instr. XXV. 126-141.

Van Tricht. Examen critique. Rev. d. quest. sc. XII. 249-280.

Herr Mansion hat das Buch vom Standpunkte der reinen Mechanik und Herr Tricht von dem der physikalischen Mechanik einer Kritik unterzogen. Das Buch giebt eine geschickte Auffrischung Aristotelischer Gedanken über die Bewegung, und Lagrange'scher über die Gravitation. Der Inhalt des Buches ist folgender. Teil I. 1) Es giebt in der Natur Körper, welche sich wechselseitig anziehen oder wenigstens anzuziehen scheinen. 2) Es ist nicht zu verstehen, dass zwei Körper, die eine gewisse Entfernung von einander haben, auf einander anziehend durch das Nichts oder gewissermassen durch seine Vermittelung wirken. 3) Ihre Anziehung würde auch unbegreiflich sein, wenn sie in einem nicht widerstehenden Mittel wäre, darunter ein Mittel verstanden, welches keine Wirkung auf die Bewegungen des darin befindlichen Körpers ausübte. 4) Die Körper können also nur indirect anziehend auf einander wirken durch diese Vermittelung, oder besser durch die Wirkung eines widerstehenden Mittels, in dem sie sich befinden. Dieses Mittel wird Aether genannt. 5) Wenn ein Körper einen Impuls erhält, bewegt er sich in einer gewissen Richtung und mit einer gewissen Geschwindigkeit, wenn nicht andere Impulse diese Geschwindigkeit und diese Richtung ändern. 6) Der ursprüngliche Impuls, die Ursache der Bewegung beim Beginn, kann keine Wirkung haben, wenn er aufgehört hat, denn eine nicht existirende Ursache kann nicht wirken. 7) Wenn nicht andere Impulse die gleichförmige Bewegung des Körpers in gerader Linie verändern, so kann die wirkliche Bewegung desselben nur herrühren von dem ätherischen Mittel, in dem sich alle Körper befinden.

Teil II. 8) Hypothese: Die ponderablen Körper haben keine eigene Tätigkeit und befinden sich in einem Aethermeere, dessen Atome mit Bewegungen in allen Richtungen begabt sind.

9) Ein einzelner Körper wird in diesem Mittel in Folge der von en Seiten kommenden Stösse in Ruhe bleiben. Sind zwei Körper , so werden sie sich gegenseitig Schutz gewähren. Jeder örper wird durch den andern gegen die von dieser Seite kommenden Stösse geschützt. Aus dieser gegenseitigen Deckung folgt, ss die Körper nicht an allen Seiten dieselbe Menge von Stössen halten, und zwar wird dieses Minus in der Verbindungsgeraden gen. Jeder Körper wird also gegen den andern hingetrieben rch die Differenz der Stösse, welche sich so ergiebt. Es tsteht also in Folge des Aethers eine scheinbare Anziehung des Körpers nach dem andern. 10) Es lässt sich leicht nacheisen, dass diese Anziehung proportional den Massen und umekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung erfolgt.

11) Hat einmal für einen ponderablen Körper eine Bewegung nter dem Einfluss eines momentanen Impulses begonnen, so ird sie in demselben Sinne und in gleichförmiger Art fortfahren, eil die Bewegung des Körpers in dem umgebenden Aether ine Unterbrechung des bestehenden Gleichgewichts hervorebracht hat.

Teil III. 12) Die Annahme dieses Aethers giebt die Möglichkeit, viele Erscheinungen der Dynamik und theoretischen hysik zu erklären. 13) Diese Theorie stimmt überein mit der letaphysik, welche die Existenz eines höchsten Wesens beweist.

Mn. (O.).

E. Rethwisch. Der Irrtum der Gravitationshypothese. Freiburg i. Br. Kiepert.

Rethwisch nimmt für alle grossen Bewegungen im Weltraume ınd auf der Erde eine gemeinsame Quelle an. Eine Wirkung n die Ferne ist physikalisch unmöglich. Eine allgemeine Anziehung der Körper findet nicht statt. Bewegung lässt sich nur ıus Bewegung ableiten. Die Axendrehung ist die Quelle aller Entwickelung. Der Fall der Körper auf der Erde ist eine Folge ler Axendrehung, durch welche alle Teile der Erde nach innen erissen werden. Der Verfasser schliesst seine Schrift „in dem

Bewustsein, die Welt des Stoffes und die Welt der Gedanke
von dem Alp der Schwerkraft befreit zu haben, und in dem freu
digen Gefühl, dass der Sturz der märchenhaften Gravitation noch
einem der Zeitgenossen gelingen dürfte." Mi.

A. Keindorff. Kritik der drei Kepler'schen Gesetze. Neuhaldensleben. Eyrund.

Keindorff, der eine kritische Beleuchtung der theoretische Entwickelung der Kepler'schen Gesetze geben will, behaupt z. B., bei der Ableitung des ersten Kepler'schen Gesetzes s übersehen: „dass der Planet sich fast stets (nur in zwei Punkte auf der ganzen Bahn nicht — im Perihel und Aphel) auf ein schiefen Ebene bewegt." Er bezweifelt die Richtigkeit d Schlüsse der Differentialrechnung, ja redet sogar von Flunk reien in der Mathematik! Er glaubt behaupten zu können, da die ganze höhere Analysis unter groben Missgriffen mehr od minder zu leiden habe. Er will mit seiner Schrift den Ansto zu einer Kritik der ganzen Mathematik geben und versäun nicht, im Vorworte hervorzuheben, dass seine Abhandlung vol Aufmerksamkeit verdiene. Mi.

R. Bresch. Der Chemismus, Magnetismus und Di magnetismus im Lichte mehr-dimensionaler Raun anschauung. Leipzig. Bresch.

Bresch, der für Homoeopathie, Odlehre, Spiritismus etc. ei Lanze bricht, stellt S. 50 die Hypothese auf: „dass unsere dre dimensionale Welt, so weit sie aus ponderabler Materie zusamme gesetzt ist, aus drei-dimensional geordneten mehr-dimensional Atomen besteht." Auf dieser Hypothese beruht seine Erkläru der diamagnetischen Abstossung. Mi.

C. Krebs. Hvorvidt ere Axiomerne Erfaringssätninger. Zeuthen T. (4) VI. 81-95.

Ad. Meyer. I hvad mon äro axiomerna erfarenhetssatzer. Zeuthen T. (4) VI. 113-118.

Der Verfasser der ersten dieser beiden Aufsätze spricht, nachdem er die Betrachtungen von verschiedenen Philosophen (Kant, Locke, Mill u. a.) referirt hat, als seine eigene Auffassung die aus, dass die Axiome allein aus der Erfahrung herrühren. Gegen diese Anschauung polemisirt Herr Meyer, wesentlich von dem Standpunkte Kant's ausgehend. Der Streit dreht sich nicht nur um die mathematischen, sondern vielmehr um die allgemein logischen Axiome. In einer beigefügten Note führt Herr Zeuthen die Frage auf die rein mathematischen Axiome zurück, und bespricht insbesondere die von Euklid aufgestellten geometrischen Axiome, um die Aufmerksamkeit auf das in mathematischer Rücksicht Wesentliche hinzuleiten.

Gm.

B. Methodik, Pädagogik.

A. Schmitz. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien. Bair. Bl. XVIII. 90-96.

Eckl. Die Mathematik an den humanistischen Gymnasien. Bair. Bl. XVIII. 448-457.

Erörterungen über das Mass des Lehrstoffes in der Mathematik, die allerdings nur für die Lehrer der bairischen Studienanstalten, für diese aber ein nicht zu unterschätzendes Interesse haben. Der Ansicht des Herrn Eckl, die Mathematik sei minder um ihrer selbst willen, als zur Ausbildung des Denkvermögens zu pflegen und daher z. B. die sphärische Trigonometrie aus dem Pensum zu streichen, werden hoffentlich Wenige beipflichten, während Herr Schmitz, der eher für Erweiterung eintritt, mehr Anhänger finden dürfte. Referent weiss, dass nord-

deutsche Collegen grade in der Aufnahme des genannten Faches einen Vorzug des bairischen Lehrprogrammes erblicken. Auf Grund eigener Erfahrungen können wir übrigens den von beiden Autoren ihren Betrachtungen zu Grunde gelegten Satz („Es ist eine alljährlich sich wiederholende Klage, dass die Kenntnisse der Absolventen humanistischer Gymnasien in der Mathematik sehr gering sind, weit geringer als in den philologischen Fächern") als in dieser Allgemeinheit falsch und irreführend bezeichnen.

Gr.

A. Weilenmann. Der geometrische Unterricht in Mittelschulen. Pr. Zürich.

Der Verfasser betrachtet die Geometrie als ein Kunstwerk, welches der Lehrer vor den Augen der Schüler aufführt. Die Schönheit des Baues erscheint als einziges Interesse. Dieser Gedanke ist zunächst in der Einleitung sehr hervortretend ausgesprochen; doch lässt dieselbe, indem sie von Unterrichtsreform gemäss den neueren Fortschritten der Methode handelt, die pädagogisch didaktischen Gesichtspunkte im Verlaufe der Schrift als selbstverständlich erwarten. Dass letztere gänzlich fehlen, zeigt die dann folgende Skizze des Lehrgangs. Diese entwickelt die Steiner'sche Geometrie ohne jede Vorbereitung, nachdem sie Punkt, Gerade, Richtung, Winkel etc. als Grundbegriffe vorausgesetzt hat, beginnend mit den Gebilden in allgemeinster Form und Zusammensetzung, das Unendliche als Dogma einführend. Nicht blos (wie die Einleitung sagt) die Unterscheidung von Planimetrie und Stereometrie, sondern das ganze Princip der Synthese ist beiseite geworfen; denn zur isolirten Betrachtung der einfachen Figuren wird nicht die geringste Gelegenheit geboten; mit dem gesammten Gebiet der euklidischen Sätze würde der Schüler bei einem solchen Unterricht unbekannt bleiben. Er lernt also nicht Geometrie nach verschiedener Methode, sondern es werden ihm andere Gegenstände vorgeführt, ohne Rücksicht auf das, was er dadurch lernt.

H.

HOÜEL. Remarques sur l'enseignement gonométrie. Bord. Mém. (2) V. 197-208.

Siehe F. d. M. VII. 1875. p. 322.

YVON VILLARCEAU. De la nécessité d'introduire certaines modifications dans l'enseignement de la mécanique, et d'en bannir certains problèmes, par exemple: le mouvement du corps solide des géomètres. C. R. XCV. 1321-1327.

Der Verfasser verlangt eine exactere Gestaltung der Lehre er Mechanik im Unterricht. Nach einigen Hinweisungen auf esideraten, die nur wenig characterisirt, noch weniger begrünet werden und wol nur zur Einleitung und Motivirung dienen, ntwickelt er die Grundzüge eines seinen Anforderungen entrechenden Lehrgangs. Dieser unterscheidet sich nicht derart n dem gewöhnlichen, dass bestimmte Fragen für die Methode raus deutlich hervorgingen. Erst am Schlusse kommt ein esentliches Problem der Lehrmethode zur Sprache, welches wol s der Kernpunkt des Aufsatzes anzusehen ist. Die Annahme arrer Körper schliesst offenbar die Entstehung innerer Kräfte pannungen) aus. Daher stehen alle Bewegungen starrer Körper, lche zur Herstellung des Gleichgewichts innere Kräfte erforrn, mit den Grundsätzen der Mechanik im Widerspruch, wie r am Beispiel der Rotation gezeigt wird. Das gewöhnliche rfahren, die innern Kräfte nach Erfordernis hypothetisch einführen, ihre Entstehung als physikalische Frage beiseite zu ssen, bleibt unerwähnt. Der Verfasser geht so zu Werke, dass die Bewegung eines Körperelements in Translation und Rotion zerlegt und die kleinen Radialtranslationen erst vernachssigt, nachdem das Princip der Flächen hergeleitet ist. Im anzen scheint er die Idealisirung der Probleme vom Unterricht rn halten zu wollen und auf den Connex der Begriffe mit der hen Beobachtung Wert zu legen. H.

Zweiter Abschnitt.

A l g e b r a.

Capitel 1.

Gleichungen. (Allgemeine Theorie. Besonde[r] algebraische und transcendente Gleichungen).

HJ. BERWALD. Eqvationslära i sammandrag jem[te] exempelsamling. Stockholm.

Elementare Darstellung der Theorie der Gleichungen, [u]nter Benutzung allgemein bekannter Arbeiten von Bertrand, T[od]hunter u. A. E.

L. KRONECKER. Grundzüge einer arithmetischen Theo[rie] der algebraischen Grössen. Festschrift. Berlin. Rei[mer.] Kronecker J. XCII. 1-123.

Ein durch die Grössen $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ... gebildeter „Ra[tio]nalitätsbereich" ($\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, ...) umfasst alle rationalen Fu[nc]tionen der $\mathfrak{R}$ mit ganzzahligen Coefficienten; für algebrais[che] Betrachtungen reicht es aus, die $\mathfrak{R}$ als Variable anzunehm[en] bis auf Ein Element, welches eine algebraische Function der ü[bri]gen wird. Sind alle $\mathfrak{R}$ Variable, oder existirt nur ein $\mathfrak{R}' =$ dann ist der Bereich ein „natürlich abgegrenzter." Jede Wu[rzel] einer irreductiblen Gleichung n^{ten} Grades, deren Coefficien[ten]

dem $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$ angehören, heisst eine „algebraische Function n^{ter} Ordnung der $\mathfrak{R}$“; die n Wurzeln derselben Gleichung sind „conjugirte algebraische Functionen“. Adjungirt man den $\mathfrak{R}$ eine solche Wurzel $\mathfrak{G}'$, so bildet $(\mathfrak{G}', \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ „den Bereich der Gattung $\mathfrak{G}'$“. Ein jeder Bereich $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots, \mathfrak{R}', \ldots)$ kann durch $(\mathfrak{G}, \mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ dargestellt werden, wenn $\mathfrak{G}$ eine passend gewählte Function der $\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'', \ldots$ ist. Erst mit der Fixirung des Rationalitätsbereiches wird die Frage nach der Zerlegbarkeit ganzer Functionen zu einer bestimmten und mit ihr der Begriff von Reductibilität und Irreductibilität; diese Begriffe erhalten einen fassbaren Untergrund durch die Angabe einer Methode, welche mit den einfachsten Hülfsmitteln entscheiden lehrt, ob eine Function in einem gegebenen Bereiche irreductibel ist, bezw. wie ihre irreductiblen Teiler zu finden sind. Eine Grösse x heisst eine „ganze algebraische Function der $\mathfrak{R}$“, wenn sie einer Gleichung genügt, welche zum höchsten Coefficienten 1 hat, während die anderen ganze, ganzzahlige Functionen der $\mathfrak{R}$ sind. Ein Fundamentalsatz der arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen ist der, dass es eine endliche Anzahl von ganzen algebraischen Grössen $x', x'', x''', \ldots x^{(n+m)}$ giebt, durch welche alle ganzen algebraischen Grössen der Gattung in der Form

$$\varphi'.x' + \varphi''.x'' + \cdots + \varphi^{(n+m)}.x^{(n+m)}$$

darstellbar sind, wo die φ ganze, ganzzahlige Functionen der $\mathfrak{R}$ bedeuten; ein solches System $x', x'', \ldots$ heisst ein „Fundamentalsystem der Gattung“. In besonderen Fällen kann $m = 0$ werden, so z. B. in einem natürlich abgegrenzten Bereiche $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots \mathfrak{R}^{(n)})$ für alle Gattungen, die durch irgend eine rationale Function der n Wurzeln der Gleichung

$$x^n + \mathfrak{R}' x^{n-1} + \mathfrak{R}'' x^{n-2} + \cdots = 0$$

repräsentirt werden. Der Inbegriff aller Discriminanten von je n Elementen eines Fundamentalsystems bildet einen Complex von Invarianten derart, dass Alles ihnen Gemeinsame auch für die Discriminante von je n Functionen der Gattung gilt. Für $m = 0$ erhält man nur eine, „die Discriminante der Gattung“; sie ist demnach ein gemeinsamer Teiler aller Discriminanten der Functionen der Gattung, und der grösste gemeinsame Teiler aller dieser

teilt die $\frac{n(n-1)}{2}^{\text{te}}$ Potenz der Gattungsdiscriminante. Für die Weiterführung der Theorie ist die Behandlung eines Systems von Gleichungen mit ihren Discriminanten und Resolventen nötig; eins der Hauptresultate dieser kurz mitgeteilten principiellen Untersuchung ist, dass eine Reihe von Teilresolventen $F_k = 0$ auftritt, wobei die Resolvente k^{ter} Stufe $F_k = 0$ ein System von k Gleichungen vertritt, und dass der gesammte Inhalt jedes Teilers der Resolvente eines Gleichungssystems für n Grössen durch ein System von nur $n+1$ Gleichungen dargestellt, also auch jedes System von beliebig vielen Gleichungen durch ein solches von nur $n+1$ Gleichungen ersetzt werden kann. Von dem hierdurch erlangten Gesichtspunkte aus lässt sich die wahre Stellung der Galois'schen Theorie erkennen. Die Betrachtung der Resolvente des durch eine algebraische Gleichung vertretenen Gleichungssystems zeigt, wie Galois von einer speciellen Gleichung ausgehend zu allgemeinen Functionen von n unbestimmten Grössen gelangt, welche die Eigenschaft haben, bei gewissen Permutationen derselben ihren Wert zu behalten. Diese „Gruppe der Substitutionen" liefert die für die algebraischen Fragen einzig wesentlichen Eigenschaften. Die für eine solche Gruppe unveränderlichen Functionen bilden eine „Gattung von Functionen der $x_1, x_2, \ldots x_n$". Je nachdem durch die Adjungirung einer Gattung $\mathfrak{g}$ die ursprüngliche Gleichung zerfällt oder nicht, ist die Gattung eine „eigentliche" oder eine „uneigentliche". Durch den erweiterten Bereich $(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots \mathfrak{f}_n, \mathfrak{g})$ der Gleichung

$$x^n - \mathfrak{f}_1 x^{n-1} + \mathfrak{f}_2 x^{n-2} - \cdots \pm \mathfrak{f}_n = 0$$

wird, falls $\mathfrak{g}$ eine eigentliche Gattung ist, eine „Classe" von algebraischen Functionen definirt, derart, dass alle diejenigen Gleichungen in eine Classe gehören, bei welchen die einer bestimmten Gattung $\mathfrak{g}$ angehörigen Functionen der Wurzeln zugleich dem festgesetzten Rationalitätsbereiche angehören. Diese Gattung heisst „Affect-Gattung" der Gleichung. Jeder irreductible Teil eines Gleichungssystems, welches n conjugirte algebraische Grössen definirt, kann durch $n+1$ Gleichungen und auch im Allgemeinen durch nicht weniger dargestellt werden, welche in die Form

$\mathfrak{g}(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_0, \quad \mathfrak{f}_i(x_1, x_2, \ldots x_n) = c_k \qquad (k \quad \ldots, \ldots n)$

bracht werden können. Das Fundamentalsystem für die
lois'sche Gattung der Ordnung $n!$ kann durch die $n!$ Elemente
$x_2^{h_2} \ldots x_{n-1}^{h_{n-1}}$ gegeben werden, wo

$$h_k = 0, 1, \ldots, n-k; \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

t; dass man bei dem Fundamentalsystem aber auch gebrochene
ahlcoefficienten zu, so kann man jene $n!$ Elemente bei der Gattung $\mathfrak{g}$ von der Ordnung r auf $\varrho = n!:r$ reduciren. Aus der
emerkung, dass für irgend welche Werte von $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots,$ für die
ur nicht die Discriminante der Gleichung verschwindet, sich
tets Functionen der Gattung $\mathfrak{g}$ bestimmen lassen, deren sämmtliche conjugirte unter einander verschieden sind, wird ein Existenzeweis für die Wurzeln algebraischer Gleichungen, dem zweiten
auss'chen Beweise nachgebildet, in grosser Einfachheit gegeben.

Der Zweck des zweiten Teils der Arbeit liegt in der Erhalung der Begriffsbestimmungen und Gesetze beim Uebergang vom
ationalen zum Algebraischen. Sind $x, x', x'', \ldots$ ganze algeraische, $u', u'', u''', \ldots$ unbestimmte Grössen, und sondert man
on der Norm des Complexes $x + u'x' + u''x'' + \cdots$ den grössten
on den u unabhängigen Teiler ab, dann bleibt eine „primitive
orm" n^{ten} Grades $Fm\,(x+u'\,x'+\cdots)$ zurück, und es stellt, ohne
gend welche Symbolik, der „Divisor" oder „Modul"

$$\frac{x+u'\,x'+\cdots}{Fm\,(x+u'\,x'+\cdots)} = \text{mod.}\,(x+u'\,x'+\cdots)$$

n grössten gemeinsamen Teiler der Grössen x dar. Durch
e Einführung der u werden alle Specialitäten abgestreift. Zwei
visoren, welche dieselben Elemente $x, x' \ldots$ haben, sind einder „absolut aequivalent", d. h. jeder teilt den andern. Der
össte Teiler der beiden Divisoren

$$\text{mod.}\,(x+u'\,x'+\cdots), \quad \text{mod.}\,(y+v'\,y'+\cdots)$$

$$\text{mod.}\,(x+u'\,x'+\cdots+y+v'\,y'+\cdots);$$

Product wird

$$\text{mod.}\,(xy+w'xy'+w''x'y+\cdots)$$

das Product zweier Divisoren durch einen dritten teilbar, der
t dem ersten keinen gemeinsamen Teiler hat, so ist der zweite

durch den dritten teilbar. Man kann den Begriff des Moduls erweitern: eine ganze rationale Function von u, v, w, ..., deren Coefficienten ganze Grössen des natürlichen Bereiches ($\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$,...) sind, heisst eine ganze Form; sie ist primitiv, wenn die Coefficienten ihrer Norm keinen gemeinsamen Teiler haben. Ein, ähnlich wie oben für $x+u'x'+\cdots$, aus einer Form gebildeter Quotient heisst ein „algebraischer Modul oder Divisor". Auch hier bedingt Gleichheit der Elemente die absolute Aequivalenz, so dass jeder „allgemeine" einem „linearen" Modul aequivalent ist. Ein algebraischer Divisor ist irreductibel oder prim, wenn er nicht einem Producte algebraischer Divisoren der festgesetzten Gattung aequivalent ist; es ist möglich, einen Divisor darauf hin zu prüfen, resp. zu zerlegen; diese Zerlegung ist durchführbar und völlig bestimmt. Relativ äquivalente Divisoren sind im Sinne der absoluten Aequivalenz nur durch Factoren von einander unterschieden, welche ganze algebraische Grössen der festgesetzten Art sind; der Inbegriff aller einander relativ äquivalenten Divisoren constituirt eine Classe; die Zahl der Classen ist eine endliche; jeder Divisor, zu einer gewissen Potenz erhoben, giebt eine algebraische Grösse und ist also durch eine algebraische Zahl höherer Gattung ersetzbar. Hinsichtlich der weiteren Ziele der fundamentalen Theorie der Association muss auf den § 19 und § 22 der Arbeit selbst verwiesen werden; vgl. besonders S. 94—96.

Formen eines Bereiches können, auch wenn ihre Coefficienten keinen gemeinsamen Teiler besitzen, dennoch etwas Gemeinsames in höherem Sinne haben, etwa wie Flächen ausser gemeinsamen Flächenstücken noch Linien und Punkte gemein haben können. Dem Studium dieser Verhältnisse ist die Einführung von Divisoren-Systemen gewidmet, durch welche gleichzeitig eine Erweiterung des Begriffes der Division beim Uebergang von einer zu mehreren Variablen gegeben wird.

Es werde gesetzt

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) \equiv 0 \pmod{F_1, F_2, \ldots F_n},$$

wenn

$$G(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{h=1}^{n} P_h(x_1, x_2, \ldots x_n) \cdot F_h(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

ist, so dass die Darstellbarkeit als homogene lineare Function von mehreren ganzen Functionen F_h an die Stelle der Teilbarkeit durch eine Function F tritt. Die Gesetze solcher „Modul- oder Divisoren-Systeme“ werden studirt; es finden sich solche Systeme verschiedener Stufen, wie sie in dem obigen Beispiele den gemeinsamen Flächen (erster Stufe), Linien (zweiter Stufe), Punkten (dritter Stufe) entsprechen. Hiernach eröffnet sich ein neuer Einblick in die Theorie der Formen; die Aequivalenz und die Primitivität, die bisher gewissermassen nur als Eigenschaften erster Stufe definirt waren, lassen sich präcisiren und auf höhere Stufen ausdehnen.

Jede, ein Modulsystem enthaltende Grösse ist als Aggregat der Functionen dieses Systems darstellbar, bei welchem die Coefficienten Grössen der Gattung resp. der Species sind. Es ist aber auch eine Reduction eines jeden Modulsystems auf ein äquivalentes möglich, bei welchem die Coefficienten lediglich dem Stammbereiche $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots]$ angehören. Irgend eine in dieser Weise gebildete Form heisst „Grundform“ oder „Fundamentalform.“ Für den Fall des absoluten Rationalitäts-Bereichs $\mathfrak{R} = 1$ existiren für alle Formen äquivalente lineare Grundformen von n Gliedern

$$u' x' + u'' x'' + \cdots + u^{(n)} x^{(n)},$$

in welchen $x', x'', \ldots$ ganze algebraische Zahlen des Art-Bereichs bedeuten. Wenn für einen Art-Bereich $(\mathfrak{S})$ ein Fundamentalsystem von $(n+m)$ Elementen $x', x'', \ldots x^{(n+m)}$ besteht, und man setzt

$$\mathfrak{F}(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - u' x_i' - u'' x_i'' - \cdots - u^{(n+m)} x_i^{(n+m)}),$$

so heisst $\mathfrak{F}(x) = 0$ die Fundamentalgleichung des Art-Bereichs $(\mathfrak{S})$; ihr genügt jede Grösse der Art $(\mathfrak{S})$; diese erhält man sämmtlich, sobald die u durch ganze Grössen aus $[\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots]$ ersetzt werden. Versteht man ferner unter der Discriminanten-Form der Art eine Form, deren Coefficienten die sämmtlichen Determinanten-Quadrate $|x_k^{(i)}|^2$ sind, und welche somit der grösste gemeinsame Teiler aller Discriminanten von je n ganzen algebraischen Formen des Art-Bereichs und als solcher deren vollständige Invariante ist, dann folgt, dass die Discriminante der Fundamentalgleichung

ein Teiler der $\frac{1}{2}(n-1)\,n^{\text{ten}}$ Potenz der Discriminanten-Form sei, und daher ausser ihr nur noch Teiler derselben enthalte. Handelt es sich um ein Fundamentalsystem $x', x'', \ldots$ einer Gattung, dann stimmt die Discriminante der Fundamentalgleichung entweder mit der Discriminanten-Form der Gattung im Sinne der vollständigen absoluten Aequivalenz überein, oder sie enthält nur noch solche Divisoren der Form, welche Formen von höherer als der ersten Stufe oder Zahlen aus der Reihe $2, 3, \ldots n-2$ sind. Als wesentliches Resultat ergiebt sich hieraus, dass die gesammte arithmetische Theorie der algebraischen Grössen auf eine Theorie der ganzen ganzzahligen Functionen von Variablen und Unbestimmten zurückgeführt werden kann. No.

L. Kronecker. Die Zerlegung der ganzen Grössen eines natürlichen Rationalitäts-Bereichs in ihre irreductibeln Factoren. Kronecker J. XCIV. 344-348. 1883.

Vollständige Ausführung des in § 4 der „Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen" angedeuteten Beweises für die Möglichkeit und die völlige Bestimmtheit der Zerlegung ganzer Grössen eines natürlichen Rationalitätsbereiches in irreductible Factoren. No.

L. Kronecker. Zur Theorie der Formen höherer Stufen. Berl. Ber. 1883. 957-960.

Es wird eine wesentliche Erweiterung des Begriffes vom Enthaltensein eines Divisorensystems unter einem anderen gegeben. $(M_0, M_1, M_2, \ldots)$ enthält das Divisorensystem $(N_0, N_1, N_2, \ldots)$, wenn die Form

$$M_0 u_0 + M_1 u_1 + M_2 u_2 + \cdots$$

Wurzel einer Gleichung ϱ^{ten} Grades ist, in welcher der Coefficient der ϱ^{ten} Potenz gleich Eins und der Coefficient der $(\varrho-r)^{\text{ten}}$ Potenz eine das Formenproduct

$$\prod_{h=1}^{r}(N_0 v_{h_0} + N_1 v_{h_1} + \cdots)$$

ı früheren engeren Sinne enthaltende Form ist. Hieraus folgt ınn auch ein erweiterter Begriff der Aequivalenz, und damit giebt sich ein einfacher Beweis für die Aequivalenz der beiden odulsysteme

$$(M_h . M_{m+i}) \quad \text{und} \quad (M'_k)$$

$$(h = 0, 1, \ldots m; \quad i = 1, 2 \ldots . n - m + 1; \quad k = 0, 1, \ldots n),$$

obei die M und die M' durch die Gleichung

$$\sum_h M_h u^h \sum_i M_{m+i} u^{i-1} = \sum_k M'_k u^k$$

it einander verbunden sind. No.

. KRONECKER. Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Formen. Kronecker J. XCIII. 365-366.

I. Eine Form, welche zwei andere Formen enthält, wird ach Multiplication mit deren grösstem gemeinsamen Inhalt durch as Product derselben teilbar. II. Durch Multiplication einer 'undamentalform mit einer beliebigen Form entsteht wiederum ine Fundamentalform. Die Substitution, mittels deren das Prolukt zweier primitiver Grundformen von beliebig vielen Gliedern in eine primitive Grundform von nur n Gliedern transformirt wird, bestimmt sich als diejenige, mittels welcher die aus den beiden algebraischen Formen componirte in irgend eine ihr relativ äquivalente lineare Grundform von nur n Gliedern übergeführt wird.

No.

F. J. STUDNIČKA. Bolzano's „Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werten, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.“ Prag. 1817. Cas. XI. 1-38. (Böhmisch).

Enthält eine böhmische Uebersetzung und Commentirung dieses von Bolzano in den Schriften der böhmischen Gesellschaft

der Wissenschaften veröffentlichten Aufsatzes, in welchem das Fundamentaltheorem aus der Theorie der Gleichungen auf eine für die damalige Zeit höchst bemerkenswerte gründliche, neuere Begriffe anticipirende Weise abgeleitet wird. Std.

M. Mandl. Jede Gleichung des n^{ten} Grades hat genau n Wurzeln. Wien. Anz. 185.

Ankündigung eines Beweises, aus welcher Nichts zu ersehen ist. No.

J. Hammond. Proof that an equation must have at least n roots. Ed. Times XXXVI. 115.

Der Herr Verfasser hätte wissen können, dass sich dieser Satz nicht in $12\frac{1}{2}$ Zeile beweisen lässt. Der Fehler liegt in der Annahme einer Functionalgleichung für die Wurzeln.

No.

L. Kronecker. Die Composition Abel'scher Gleichungen. Berl. Ber. 1882. 1059-1065.

L. Kronecker. Die cubischen Abel'schen Gleichungen des Bereiches $(\sqrt{-31})$. Berl. Ber. 1882. 1151-1155.

Es seien

$$x_{h_1, h_2, \dots, h_\nu} \quad \text{und} \quad y_{k_1, k_2, \dots, k_\nu}$$

$$(h_\alpha, k_\alpha = 0, 1, \dots, n_\alpha - 1; \quad \alpha = 1, 2, \dots \nu)$$

gegebene Grössen, und es werde gesetzt

$$z_{h_1+k_1, \dots h_\nu + k_\nu} = \Sigma x_{h_1, \dots h_\nu} \cdot y_{k_1, \dots k_\nu}.$$

Nimmt man die cyklischen Functionen der Grössen x, sowie die der Grössen y zum Rationalitätsbereiche, so werden die x, die y und die z Wurzeln Abel'scher Gleichungen, und die letzte Gleichung heisst aus den beiden ersten zusammengesetzt oder componirt. Eine einfache Abel'sche Gleichung (siehe F. d. M. IX. 1877. 57) mit den Wurzeln $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ lässt sich aus zwei anderen com-

ren, wenn

$$\varpi_h = \sum \omega^{hr} x_r \qquad (\omega^n - 1 = 0)$$

als Produkt zweier ähnlicher Ausdrücke darstellen lässt. Die
vendung der Decomposition auf die Gleichungen dritten Grades
ebt, dass die Wurzeln jeder cubischen Abel'schen Gleichung
ganzzahligen Coefficienten sich als rationale Functionen der
rzeln von Gleichungen

$$y^3 - 3py + p(r+s) = 0, \quad y^3 - 3y + 1 = 0$$

stellen lassen. Dabei sind die p Primzahlen, und die r, s sind
ch die Bedingungen definirt

$$p = r^2 - rs + s^2, \quad r \equiv s \pmod{3}.$$

Die Decomposition der cubischen Abel'schen Gleichungen des
eiches $\sqrt{-31}$ mit den Wurzeln x_1, x_2, x_3 fordert die Zerlegung
Ausdrücken

$$x_0 + \omega^h x_1 + \omega^{2h} x_2)^3 = (\mathfrak{g}_0 + \omega^h \mathfrak{g}_1 + \omega^{2h} \mathfrak{g}_2)^2 (\mathfrak{g}_0 + \omega^{2h} \mathfrak{g}_1 + \omega^h \mathfrak{g}_2),$$

denen ω eine primitive dritte Einheitswurzel ist, und die $\mathfrak{g}$
ze algebraische Zahlen des Bereiches $(\sqrt{-3}, \sqrt{-31})$ sind, in
toren von derselben Form. In diesem Bereiche sind die
mzahlen p entweder als Normen ganzer algebraischer Zahlen
stellbar (p^0), oder erst ihr Cubus hat diese Eigenschaft (p').
e diejenigen cubischen Gleichungen, für welche

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2) . (x_0 + \omega^2 x_1 + \omega x_2)$$

eine Potenz von p' ist, sind in solche zu zerlegen, bei denen

$$(x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2)^3 = H(\xi, \omega)^2 H(\xi, \omega^2)$$

l H eine ganze algebraische Zahl wird, deren Norm der Cubus
n p' ist. Alsdann ergiebt sich

$$x_0 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \theta(\xi, \omega) \sqrt[3]{E(\xi, \omega)},$$

rin auch θ eine ganze algebraische Zahl und E eine primitive
rm bedeutet. Fügt man zu E nur eine einfache Einheit hinzu
ω^n, so gehören alle jene Gleichungen zu derselben Gattung,
e die Abel'sche Gleichung

$$x^3 - 10x + \sqrt{-31}(x^2 - 1) = 0,$$

en Wurzeln die zu $\sqrt{-31}$ gehörigen singulären Moduln der
ptischen Functionen sind. Die Gattung algebraischer Zahlen,
che durch die Wurzeln dieser Gleichung definirt wird, ist ge-

wissermassen arithmetisch dem Bereiche $(\sqrt{-31})$ angehörig und algebraisch demselben unmittelbar associirt. No.

L. Kronecker. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen.
Kronecker J. XCIV. 338-365.

Die Abhandlung knüpft an einen Aufsatz des Herrn Schwering an. Versteht man unter $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ unbestimmte Grössen, unter w eine Variable, dann gilt die Formel

$$\text{(A)} \qquad (\sum_r w^{mr} x_r)^l \cdot (\sum_r w^{m'r} x_r)^{l'} \dots \equiv \varphi(w) \quad (\text{mod.}(w^n - 1)),$$

$$r = 0, 1, \dots n-1; \; lm + l'm' + \dots \equiv 0 \quad (\text{mod.}\, n)$$

wo $\varphi(w)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von w bedeutet, deren Coefficienten cyklische rationale Functionen von $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ sind. Bezeichnet man mit ω eine primitive n^{te} Wurzel der Einheit und mit ϖ_h die Summe $\sum_r w^{hr} x_r$, dann folgt aus (A), dass

$$\Psi_{h,t}(\omega^t) = \frac{\varpi_{ht}\, \varpi_{kt}}{\varpi_{(h+k)t}}$$

eine ganze Function von ω^t ist, deren Coefficienten rationale cyklische Functionen des x sind. Wenn man ferner mit g eine primitive Congruenzwurzel von $p = n+1$ bezeichnet und

$$x_0 = x, \quad x_1 = x^g, \dots x^{n-1} = x^{g^{p-2}}$$

annimmt, so ergiebt sich durch Vereinfachung einer gewissen Congruenz das Resultat

$$\text{(J)} \qquad \Psi_{h,k}(\omega^t) \equiv -1 \quad (\text{mod.}(\omega^t - 1)^2).$$

Aber auch in jeder Gattung Abel'scher Gleichungen eines beliebigen Rationalitätsbereiches giebt es solche, für die ähnliche Vereinfachungen vorliegen.

Hier ergiebt sich auch die Reduction der Jacobi'schen ψ-Functionen auf den sechsten Teil der überhaupt möglichen. Herr Kronecker behandelt weiter die allgemeinere von Jacobi angeregte Frage der Reduction der ψ, welche darauf hinauskommt, $(\alpha, x)^p$ durch ein Product von conjugirten ψ-Functionen

rzustellen und zwar so, dass die Bedeutung der bei (α, x), $(\ldots, x), \ldots$ auftretenden Wurzelzeichen bestimmt ist. Es erfordert s Erstere die Erfüllung der Gleichung

$$(Q) \qquad \varpi_t^n = \prod_h \psi_{t\gamma^h,\; t\gamma^{h+m}}^{r_h} \prod_k \varpi_{t\gamma^k}^{s_k} \varpi_{-t\gamma^k}^{s_k},$$

$$\begin{pmatrix} h, k = 0, 1, \ldots n-2 \\ t = 1, 2, \ldots n-1 \end{pmatrix},$$

o γ eine primitive Congruenzwurzel der Primzahl n ist; die Erllung der Congruenzen

$$(R) \qquad \gamma r_h \equiv r_{h-1} \pmod{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots n-2)$$

epräsentirt den zweiten Teil der Forderung. Diese letzteren ind schon bei $n = 47$ nicht mehr lösbar; ist also jene Dartellung möglich, so entbehrt sie doch der Eigentümlichkeit, die ie theoretisch wichtig macht. Aber auch in solcher Einschränung scheint eine allgemeine Darstellung nicht durchführbar, da Q) sich in die Congruenzbedingungen

$$(T) \qquad n \equiv 0 \; (\mathrm{mod.}(1-\zeta^{kl}+\zeta^{km})) \qquad (k = 1, 3, 5 \ldots n-2)$$

msetzen lässt, bei denen ζ eine primitive $(n-1)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit ist, und $l \equiv \mathrm{ind.}(1+\gamma^m) \; (\mathrm{mod.}(n-1))$ wird; es ist unwahrscheinlich, dass (T) für jedes n erfüllbar ist.

Im letzten Paragraphen wird die Gleichung

$$\Big(\sum_r x^{g^r} w^{h^r}\Big)^n = p \sum_t c_t w^{ht}$$

$$(r = 0, 1, \ldots p-2; \quad t = 0, 1, \ldots, n-2)$$

behandelt, wo n irgend einen Teiler von $p-1$ bedeutet. Die linke Seite wird in merkwürdiger Weise umgeformt und gedeutet, so dass z. B. c_t als $(p-1)^{\text{ter}}$ Teil der Anzahl aller mod. $(p-1)$ unter einander verschiedenen Wertsysteme $r_1, r_2, \ldots r_n$ definirt wird, welche den beiden Congruenzen

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n \equiv t \; (\mathrm{mod.}\, n), \qquad g^{r_1} + g^{r_2} + \cdots + g^{r_n} \equiv 0 \; (\mathrm{mod.}\, p)$$

ugleich genügen. Aus diesen Betrachtungen ergeben sich weiere interessante Sätze über die Zerlegungen von Primzahlen

$$4p = a^2 + 27b^2, \quad p = a^2 + b^2, \quad p = a^2 + 2b^2,$$

enn p von der Form $6n+1$, resp. $4n+1$ oder $8n+1$ ist.

No.

B. Igel. Ueber eine Klasse von Abel'schen Gleichungen. Wien. Denkschr. XLV.

Ist $f_1(x) = 0$ mit den Wurzeln $a, b, c, \dots$ irreductibel, und ist es möglich, zwei ganze Functionen f_2 und f_3 so zu bestimmen, dass

$$f_2(a):f_3(a) = f_2(b):f_3(b) = \cdots$$

ist, dann ist die Gleichung $f_1 = 0$ eine Abel'sche von der Form

$$f_1(x) = (x-a)(x-\theta(a))(x-b)(x-\theta(b))\dots = 0.$$

Ferner wird gezeigt: Sind

$$f_1(\lambda, \mu),\ f_2(\lambda, \mu),\ f_3(\lambda, \mu)$$

ganze homogene Functionen n^{ter} Ordnung in λ, μ, und haben die drei Gleichungen

$$f_i(\lambda, \mu)\ f_{i+1}(\lambda', \mu') - f_i(\lambda', \mu')\ f_{i+1}(\lambda, \mu) = 0$$

den grössten gemeinsamen Teiler vom zweiten Grade, so sind $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ Abel'sche Gleichungen; die Wurzeln einer jeden lassen sich rational durch die Wurzeln jeder der anderen beiden ausdrücken und zwar so, dass, wenn durch θ, θ_1 zwei derartige rationale Functionen einer Wurzel bezeichnet werden, $\theta\theta_1 = \theta_1\theta$ ist. No.

M. Weiss. Ueber einige Abel'sche Gleichungen vom sechsten Grade, die sich mit Hülfe einer Gleichung vom vierten Grade auflösen lassen. Hoppe Arch. LXVIII. 304-315.

Sind a, b, c, d die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades, so sind diejenigen der behandelten Gleichungen sechsten Grades ab, ac, $bc, \dots$ resp. $a+b$, $a+c$, $b+c, \dots$ Die Gleichungen sind jedoch keine Abel'schen, da sich ac nicht rational durch ab ausdrücken lässt. No.

V. Janni. Sul teorema di Sturm. Batt. G. XX. 166-167.

Es wird ein gedanklicher Uebergang vom Fourier'schen zum Sturm'schen Theoreme aufgewiesen. No.

. J. LEGEBEKE. Eene eigenschap van de wortels eener afgeleide vergelijking. Nieuw Arch. VIII. 75-80.

. J. VAN DEN BERG. Over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Nieuw Arch. IX. 1-14.

. J. VAN DEN BERG. Naschrift over het verband tusschen de wortels eener vergelijking en die van hare afgeleide. Nieuw Arch. IX. 60.

Ueber die erste Notiz ist schon früher referirt. (S. F. d. M. XIII. 1881. p. 70.). Sie handelt über den Zusammenhang der Vurzeln einer Gleichung und der von ihr abgeleiteten. Die ämliche Aufgabe wird in der zweiten durch geometrische und tatische Betrachtungen gelöst. Einige andere Eigenschaften ler Gleichungen höheren Grades werden auf demselben Wege ewonnen und daraus einige Eigenschaften hinsichtlich des Gleichewichts von Kräften abgeleitet.

In der dritten Notiz wird mitgeteilt, dass die Eigenschaft er Wurzeln einer Gleichung, welche in den beiden vorigen beandelt ist, schon in den C. R. von 1874 vorkommt und dort on Lucas und Laguerre behandelt ist. Auch Gauss teilt diese ufgabe mit in den Gött. gel. Anzeigen für 1816, doch ist der urch Legebeke gegebene Beweis davon ganz unabhängig.

G.

H. HUDSON. On equal roots of equations. Quart. J. XVIII. 215-229, 327-330.

Es sei

$$f(x) = a_0 x^n + n a_1 x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} a_2 x^{n-2} + \cdots + n a_{n-1} x + a_n,$$

$$(r, v, m) = \frac{r(r-v-1)!}{r!} a_m a_{r+m} - v \frac{(r-2)(r-v-2)!}{(r-1)!} a_{m+1} a_{r+m+1}$$
$$+ \frac{v(v-1)}{2!} \frac{(r-4)(r-v-3)!}{(r-2)!} a_{m+2} a_{r+m+2} + \cdots$$

enn dann $f(x) = 0$ eine $(n-v)$-fache Wurzel besitzt, wobei

$v \leqq \frac{1}{2}(n-1)$ ist, dann hat dieselbe den Wert

$$-\psi(r, v, m):\psi(r-1, v, m),$$

wo für m gesetzt werden kann $0, 1, 2, \ldots, n-2v-1$ und für r einer der Zahlenwerte $2v+1, 2v+2, \ldots n-m$. Hat ferner $f(x)=0$ eine $(n-v)$-fache Wurzel, wobei $v \leqq \frac{1}{2}n-1$ ist, dann ist $\psi(r, v+1, m)=0$ für $m=0, 1, 2, \ldots n-2v-2$, und für $r=2v+2, 2v+3, \ldots, n-m$. Aus den verschiedenen Wertformen der gleichen Wurzeln folgen Bedingungen unter den Coefficienten a. Für $\psi(r, v+t, m)$ werden Recursionsformeln abgeleitet, in welche die Functionen

$$\psi(r-2\alpha, v, m+\alpha)$$

eingehen. Herr Cayley giebt in einer Anmerkung zum ersten Aufsatze einige der Resultate desselben in entwickelter Form.

No.

Le P. Berloty. Sur les équations algébriques de la forme $(x^p-a^p)\psi(x)=0$. Nouv. Ann. (3) I. 173-176.

Damit

$$F(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$$

von der Form $(x^p-a^p)\cdot\psi(x)$ sei, ist es hinreichend und notwendig, dass

$$\varphi_\alpha = a_{\alpha-1}x^{m-\alpha+1}+a_{p+\alpha-1}x^{m-p-\alpha+1}+a_{2p+\alpha-1}x^{m-2p-\alpha+1}+\cdots$$

für $\alpha=1, 2, \ldots, p$ von derselben Form sei. No.

T. S. E. Dixon. A general algebraic method for the solution of equations. Anal. IX. 1-8.

Nimmt man an, die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit fehlendem zweiten Gliede hätten die Form

$$x=a+b+c+\cdots+m,$$
$$x=a\varepsilon+b\varepsilon^2+c\varepsilon^3+\cdots+m\varepsilon^{n-1},$$
$$x=a\varepsilon^2+b\varepsilon^4+c\varepsilon^6+\cdots+m\varepsilon^{2(n-1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x=a\varepsilon^{n-1}+b\varepsilon^{2n-2}+c\varepsilon^{3n-3}+\cdots+m\varepsilon^{(n-1)(n-1)},$$

ε eine imaginäre n^{te} Wurzel der Einheit bezeichnet, so sind, e der Verfasser bemerkt, die Coefficienten reelle Functionen der $b, c, \ldots$. Der Verfasser schlägt daher vor, die Gleichungen mit lfsgleichungen zu lösen, in welchen diese Functionen den gebenen Coefficienten gleichgesetzt werden. Dass die Functionen, ie der Verfasser behauptet, symmetrisch sind, wenn n eine rimzahl ist, ist nicht richtig, wenn $n>3$. Jn. (O.).

.. N. Miassojedoff. Ein Satz über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

In dieser Note wird der folgende Satz bewiesen und zur Trennung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung benutzt:

„Ist

$$v_0 = x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots + p_{m-1} x + p_m$$

eine ganze rationale Function von x mit reellen Coefficienten, und setzt man

$$\begin{aligned} V_1 &= p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_m, \\ V_2 &= p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \cdots + p_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{m-1} &= p_{m-1} x + p_m, \\ V_m &= p_m, \end{aligned}$$

so wird die Zahl der reellen Wurzeln der Gleichung $V_0 = 0$, die zwischen zwei positiven Zahlen α und β $(\alpha<\beta)$ liegen, gleich oder um eine grade Zahl geringer, als die Zahl der von der Reihe

$$V_0,\ V_1,\ V_2, \ldots\ V_{m-1},\ V_m$$

beim Uebergange der veränderlichen x von α zum β gewonnenen Zeichenwechsel.“ Ty.

L. Gegenbauer. Ueber algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen. Wien. Ber. LXXXVII. 264-270.

Ist $f(x)$ in dem reellen Intervall a, b reell, endlich, von dem-

selben Zeichen und so beschaffen, dass die Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ der regulären Kettenbruchentwickelung des Integrals

$$\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z}$$

den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$[(x-a)(x-b)f(x)y']' = c_\lambda f(x)y \quad (\lambda = 0, 1, \dots; \; c_\lambda > c_\varkappa, \; \lambda > \varkappa)$$

genügen; sind ferner $\psi_\varkappa(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ zwei Näherungsnenner ohne gemeinsamen Teiler, so hat die Gleichung

$$\psi'_\lambda(x)\,\psi_\varkappa(x) - \psi'_\varkappa(x)\,\psi_\lambda(x) = 0$$

für $\lambda > \varkappa$ genau $\lambda-\varkappa-1$ reelle, ungleiche, innerhalb des Intervalls a, b liegende und $2\varkappa$ complexe Wurzeln. No.

Laguerre. Sur la distribution, dans le plan, des racines d'une équation algébrique dont le premier membre satisfait à une équation différentielle linéaire du second ordre. C. R. XCIV. 412-414, 509-511.

Es bedeute $f(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades; ferner sei

$$X = x - \frac{2(n-1)f'(x)}{f''(x)},$$

und x_1 eine Wurzel von $f = 0$; X_1 das Resultat der Substitution von x_1 in X. Werden x_1, X_1 durch zwei Punkte einer Ebene repräsentirt, und zieht man durch x_1 einen Kreis, der alle Wurzeln von $f = 0$ aus- oder einschliesst, dann liegt X_1 in demselben Ebenenteile, in dem sich die Wurzeln befinden. Ist O der Punkt $(0, 0)$, A der Punkt $(-2n, 0)$, dann umschliesst jeder Kreis, der durch A, O geht, mindestens eine Wurzel von $f = 0$. Im Zusammenhange mit dieser Kreisschar steht eine Parabel P, welche alle Wurzelpunkte einschliesst, und die den Punkt O zum Brennpunkt hat. Eine unendliche Anzahl anderer Curven kann gefunden werden, welche zu einer Grenzcurve π führen. Diese ist transcendent; sie geht durch A; die Tangente in einem beliebigen Punkte N steht senkrecht auf dem durch O bestimmten Durchmesser des Kreises OAN; sie umschliesst alle Wurzelpunkte. Es folgt eine Anwendung auf die hypergeometrische Reihe. No.

A. SIEBEL. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Hoppe Arch. LXVII. 375-412.

Fortsetzung der früheren Untersuchungen; Bestimmung der complexen Wurzeln; Trennung und näherungsweise Berechnung derselben. No.

J. P. MOTT. On the solution of equations. Anal. IX. 104-106.

Beispiele für die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung in der Form

$$a = x + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \cdots$$

mit Hülfe von Reihen für die umgekehrten Functionen. Jn. (O.).

K. V. ZENGER. Auflösung numerischer Gleichungen mit Hilfe von Logarithmen. Cas. XI. 288-291. (Böhmisch).

Enthält eine approximative Bestimmung der Wurzeln einer numerischen Gleichung mit Hülfe von Logarithmen. Std.

M. K. Auflösung der Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. Cas. XI 217-231. (Böhmisch).

Enthält eine Beleuchtung des bekannten Lagrange'schen Princips, welches den betreffenden Lösungsmethoden gemeinsam ist. Std.

A. PÁNEK. Bemerkung zur Auflösung der Gleichung

$$x^{2n} + px^n = q$$

und der Gleichung dritten Grades. Cas. XI. 231-233. (Böhmisch).

Enthält die Auflösung der ersten Gleichung unter Verwendung von

$$a = x^n + p,$$

während die zweite Notiz direct die Substitution

$$y = u^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{1}{3}}$$

verwendet, um zur Cardanischen Formel zu gelangen. Std.

Th. Sinram. Zur Gleichung dritten Grades. Hoppe Arch. LXVIII. 106-110.

Dass die Wurzeln der Gleichungen dritten Grades von der Wahl der Wurzeln der zur Lösung nötigen Hülfsgleichungen unabhängig sind, wird durch wirkliche Durchführung der umständlichen Rechnungen gezeigt. No.

W. Ligowski. Bemerkungen zu der Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Hoppe Arch. LXVII. 446-447.

Auflösung der Gleichung

$$x^4+a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d = 0$$

mit Hülfe der Zerlegung

$$(x^2+\frac{a+t}{2}x+p)(x^2+\frac{a-t}{2}x+q) = 0.$$

No.

R. Hoppe. Reduction einer biquadratischen Gleichung auf eine kubische. Hoppe Arch. LXIX. 111-112.

Reduction der Gleichung auf eine kubische und zwei reine quadratische Gleichungen. No.

Perrin. Sur une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré, et son application à quelques équations de degrés supérieurs. S. M. F. Bull. X. 139-147.

Benutzt man Identitäten, wie z. B.

1) $(a+b+c)^4-2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2-8abc(a+b+c)$
$+[(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2b^2+\cdots)] = 0,$

2) $(ab+bc+ca)^4-2(a^2b^2+\cdots)(ab+bc+ca)^2-8a^2b^2c^2(ab+\cdots)$
$+[(a^2b^2+\cdots)^2-4a^2b^2c^2(a^2+\cdots)] = 0,$

3) $(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)-(a^5+b^5) = 0,$

dann kann man durch 1), 2) die Wurzeln von biquadratischen Gleichungen auf die Form $x = a+b+c$ bez. $x = ab+bc+ca$,

ch 3) die Wurzeln von

$$x^5+px^3+qx^2+\frac{1}{5}p^2x+s=0$$

die Form $x=a+b$ bringen. Die Methode ist übrigens rchaus nicht neu. No.

R. Minich. Sulle equazioni di quinto grado. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 307-320, 893-908.

Der Herr Verfasser giebt eine Resolvente sechsten Grades, r deren Richtigkeit er den Beweis weiteren Mitteilungen vorhält. Da er sie lediglich als Function der Coefficienten der sprünglichen Gleichung mitteilt, so ist sie wenig übersichtlich; sserdem findet Herr Minich, dass sie mit einer von Malfatti geebenen Resolvente übereinstimme. (Vgl. übrigens F. d. M. XIII. 881. p. 81.). No.

Th. Sinram. Beitrag zur Lösung von Gleichungen höheren Grades. Hoppe Arch. LXVIII. 223-224, LXIX. 111.

Es wird a^n+b^n nach Potenzen von $a+b$ und $a.b$ entwickelt. No.

Laguerre. Sur quelques équations transcendantes. C. R. XCIV. 160-163.

Laguerre. Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière. C. R. XCIV. 635-638.

Laguerre. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. C. R. XCV. 828-831.

Es handelt sich um die Beantwortung der Frage: Welche lementaren Eigenschaften der algebraischen Gleichungen gelten och für transcendente Gleichungen? Für die Untersuchung ierüber ist die Einführung der Weierstrass'schen Primfunctionen n Wichtigkeit. Bezeichnet man durch $\varphi(x)$ ein Polynomen vom

Grade n, so nennt Herr Laguerre die Function

$$F(x) = \lim e^{\varphi(x)+\Sigma\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{2\alpha^2}+\cdots+\frac{x^n}{n\alpha^n}\right)}\cdot\Pi\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)$$

eine Transcendente „vom Geschlechte n"; er zeigt: wenn der Quotient $f'(x):(f(x)X^n)$ für ein ganzzahliges n sich bei wachsendem x der Grenze Null nähert, dann ist $f(x)$ vom Geschlechte n. Wenn in

$$\Phi(x) = A_0+A_1x+\cdots+A_nx^n$$

die A Functionen von n sind, wenn $F(x) = \lim\limits_{n=\infty}\Phi(x)$ eine unbedingt convergente Reihe wird, wenn $\Phi(x) = 0$ für jeden Wert von n nur reelle Wurzeln besitzt, die sämmtlich von gleichem Zeichen sind, dann ist $F(x)$ gleich dem Producte einer ganzen Function des Geschlechts Null, multiplicirt mit einer Grösse $e^{c_1x+c_2}$. Ist $F(x)$ vom Geschlechte 1, und besitzt $F(x) = 0$ nur reelle Wurzeln, dann sind alle Ableitungen $F'(x)$, $F''(x)$,... gleichfalls Transcendenten vom Geschlechte 1, und $F'(x) = 0$, $F''(x) = 0$,... haben nur reelle Wurzeln. Setzt man $1:F(x) = f(x)$, dann haben alle Functionen $f(x)$, $f''(x)$, $f^{IV}(x)$, ... für jeden reellen Wert von x dasselbe Vorzeichen. Lässt man für $F(x) = 0$ die Voraussetzung der Realität der Wurzeln fallen, dann gilt der Satz: „Zwei auf einander folgende reelle Wurzeln von $F(x) = 0$ umschliessen eine und nur eine solche von $F'(x) = 0$; substituirt man in $F(x)$ zwei auf einander folgende Wurzeln von $F'(x) = 0$, und haben die Resultate gleiche Vorzeichen, so besitzt $F(x) = 0$ imaginäre Wurzeln." No.

V. Hioux. Racines communes à deux équations algébriques entières. Ann. de l'Éc. Norm. (2) XI. 135-136.

Neuer Beweis für ein von Herrn Hioux früher gegebenes Theorem. (Ann. de l'Ec. N. (2) X. 386., s. F. d. M. XIII. 1881. 81.) No.

Weitere Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben über specielle Gleichungen von Moret-Blanc, F. Borletti, H. Lez, S. Réalis, Sylvester, J. Hammond, G. Heppel, G. Turriff, W. J. C. Sharp, W. J. Constable, J. O'Regan, Matz, W. J. C. Miller, T. Woodcock, E. Rutter finden sich Nouv. Ann. (3) I, 266-267, 368-371, 377-379, 412-413, 426; Ed. Times XXXVI. 39, 65. 102, 106; XXXVII. 62-67, 114-115.

O.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

R. Dedekind. Ueber die Discriminante endlicher Körper. Gött. Abh XXIX.

Diese umfangreiche Arbeit schliesst sich an eine frühere desselben Verfassers (in den Gött. Abh. XXIII) an und hat eine genauere Einsicht in die Natur der Discriminante (Grundzahl) D eines endlichen Zahlenkörpers zum Ziel. Zunächst wird man nach den in dieser (ganzen rationalen) Zahl aufgehenden Primfactoren fragen. Dies behandelt die erste Hälfte der Abhandlung, die zu dem Resultat führt: „Die rationale Primzahl p geht stets und nur dann in der Grundzahl D von Ω auf, wenn p in diesem Körper Ω durch das Quadrat eines Primideals teilbar ist."

Zuförderst werden einige, meist bekannte Hülfsformeln entwickelt, von denen hier nur folgende zu erwähnen nötig sein wird.

Es sei θ eine Zahl in Ω, $\theta^{(1)}, \theta^{(2)} \dots \theta^{(n)}$ ihre conjugirten Man setze

$$F(t) = (t-\theta^{(1)})(t-\theta^{(2)})\dots(t-\theta^{(n)}) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n.$$

Dann ist die Norm $N(\theta)$ von θ gleich $(-1)^n a_n$, und die Spur $S(\theta)$ von θ gleich $-a_1$, wo a_1, a_n rationale und, falls θ eine ganze Zahl (in Ω) ist, ganze rationale Zahlen sind.

Die Normen und Spuren hängen mit den Discriminanten durch die beiden Relationen zusammen:

$$(1)\qquad \Delta(1,\ \theta,\ \theta^2, \ldots \theta^{n-1}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} N[F'(\theta)]$$

$$(2)\qquad \Delta(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots\ \alpha_n) = |S(\alpha_i\ \alpha_k)| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

wo in der zweiten Formel die α irgend n Zahlen von Ω sind, und rechts die Determinante, gebildet aus den Spuren der n^2 Producte $\alpha_i\ \alpha_k$, steht.

Ist jetzt im Besonderen θ eine ganze Zahl (von Ω), dann kann man auf die linke Seite von (1) einen bekannten Determinantensatz anwenden und erhält:

$$(3)\qquad \Delta(1,\ \theta,\ \theta^2, \ldots \theta^{n-1}) = Dk^2 = \pm N\,[F'(\theta)].$$

Hier ist D die Grundzahl von Ω (d. i. die Discriminante eines Systems von n unabhängigen ganzen in Ω enthaltenen Zahlen), k eine ganze rationale Zahl (der sog. Index von θ).

Endlich liefert der Fermat'sche Potenzsatz für die Spur einer ganzen Zahl ω (von Ω) die wichtige Formel

$$(4)\qquad S(\omega) \equiv S(\omega^p)\ (\text{mod. } p),$$

woraus nach (2) folgt, dass auch für p als eine rationale (positive) Primzahl gilt:

$$(5)\qquad \Delta(\alpha_1^p,\ \alpha_2^p, \ldots \alpha_n^p) \equiv \Delta\,(\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots \alpha_n)\,(\text{mod. } p).$$

Nunmehr kann man zum Beweise des Hauptsatzes schreiten, falls man noch die eine Voraussetzung macht, dass es unter den ganzen Zahlen $\mathfrak{o}$ (in Ω) wenigstens eine, θ, giebt, deren Index k nicht durch p teilbar ist, denn mit Hülfe eines in der früheren Arbeit d. H. Verfassers aufgestellten Satzes, der dann die Zerlegung des Ideals $\mathfrak{o}p$ in Primfactoren durch die Zerlegung der zugehörigen Function $F(t)$ in Primfactoren nach dem Modul p ersetzt, zeigt man leicht, dass p in der Norm von $F'(\theta)$, also nach (3) auch in Dk^2 aufgeht. Zufolge unserer Voraussetzung muss demnach D durch p teilbar sein.

Da es tatsächlich Körper Ω giebt, bei denen jene Voraussetzung nicht für alle Primzahlen p zutrifft, so wird ein ganz neuer, nicht ganz einfacher Weg eingeschlagen, der den Herrn Verfasser, wie er angiebt, schon 1871 zum Ziele geführt hatte.

Den zu beweisenden Satz kann man in zwei Teile zerlegen:

1) „ist p durch das Quadrat eines Primideals teilbar, so geht p in D auf". 2) die Umkehrung davon. Der erste Teil ist bald mit Hülfe der Relation (5) erledigt, der zweite aber erfordert zuvor eine Reihe von fünf Hülfssätzen.

Erstens lässt sich die Annahme, eine aus lauter ganzen rationalen Zahlen c_{ik} gebildete Determinante n^{ten} Grades sei teilbar durch die Primzahl p, ersetzen durch die n Congruenzen:

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} c_{ik} x_k \equiv 0 \pmod{p} \qquad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo die x ganze rationale, nicht sämmtlich durch p teilbare Zahlen sind.

Zweitens bilde man aus den n festen, ganzen Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ (in Ω) mittels der ganzen rationalen Zahlen x den Modul $\mathfrak{a}$ der Zahlen

$$\alpha = x_1 \alpha_1 + \cdots + x_r \alpha_r.$$

Dann wird folgende Definition eingeführt. Die Zahlen α sollen ein „nach p irreductibles" System bilden, wenn die Congruenz $\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ nur durch $x_1 \equiv 0, \ldots x_r \equiv 0 \pmod{p}$ erfüllt werden kann. Es giebt dann genau p^r in $\mathfrak{a}$ enthaltene nach p incongruente Zahlen. Gilt aber jene Annahme nicht, so giebt es immer $m < r$, aber auch nicht mehr Zahlen in $\mathfrak{a}$, die ein nach p irreductibles System bilden, und die erwähnte Anzahl sinkt von p^r auf p^m.

Die Bedingung der Irreductibilität der α lässt sich einfacher ausdrücken, sobald man die α aus den n Zahlen ω einer Basis (von Ω) linear zusammensetzt, sie wird nach dem ersten Hülfssatz einfach die, dass die Determinante der Coefficienten nicht durch p teilbar ist.

Diese zwei Hülfssätze bilden im Wesentlichen nur eine Erweiterung der in Dirichlet's Zahlentheorie, (Ende des § 162) gemachten Entwickelungen auf Congruenzen. Von jetzt ab wird darüber hinausgegangen.

Es sei die letzt erwähnte Annahme erfüllt, dann kann man nach dem zweiten Hülfssatz (für irgend eine ganze Zahl ω in Ω) setzen:

$$\omega \equiv x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \pmod{p},$$

also auch

$$\omega\alpha_k \equiv \sum_{i=1}^{i=n} x_{ik}\alpha_i \pmod{p} \qquad (\text{für } k = 1, 2, \ldots n),$$

wo die ganzen rationalen x_{ik} nach dem Modul p bestimmt sind. Dann gilt der dritte Hülfssatz, dass:

$$7) \qquad S(\omega) \equiv \sum x_{ii} \pmod{p}.$$

Jetzt zerlege man das Ideal $\mathfrak{o}p$ in zwei relative Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$. Sind die Grade der drei Ideale resp. n, r, s (wo $n = r+s$), so giebt es in $\mathfrak{q}$ ein System von r nach p irreductibeln Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_{r-1}$ und ebenso in $\mathfrak{p}$ ein System von s nach p irreductibeln Zahlen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_{s-1}$. Zugleich aber bilden auch diese $n = r+s$ Zahlen zusammen ein solches System, so dass also jede Zahl ω (in $\mathfrak{o}$) die Relation befriedigt:

$$\omega \equiv \sum h\varrho + \sum k\sigma \pmod{p},$$

wo die h und k ganze rationale Zahlen sind.

Wendet man hier die Formel (7) unter der Bedingung an, dass ω eine beliebige durch $\mathfrak{q}$ teilbare Zahl μ ist, so folgt mittels der Darstellung

$$\mu\varrho_i \equiv \sum_k h_{ki}\,\varrho_k \pmod{p} \qquad (\text{die } h \text{ sind ganz und rational})$$

die Relation des vierten Hülfssatzes:

$$(8) \qquad S(\mu) \equiv \sum_i h_{ii} \pmod{p} \qquad (i = 0, 1, \ldots r-1).$$

Setzen wir endlich auch noch fest, dass $\mathfrak{p}$ ein (absolutes) Primideal ist (so dass also p nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbar ist), so kann man endlich den fünften Hülfssatz beweisen, dass die Determinante

$$(9) \qquad R = |S(\varrho_i\varrho_k)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots r-1),$$

nicht durch p teilbar ist.

Nunmehr lässt sich der Beweis des zweiten Teiles unseres Satzes so führen. Da nach (2) die Grundzahl D darstellbar ist durch

$$D = |S(\omega_i\omega_k)| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

(wo die ω eine Basis von $\mathfrak{o}$ bilden) und da, wie vorausgesetzt, D durch p teilbar ist, so fliesst nach (6) aus der letzten Gleichung

das Congruenzsystem

$$\sum_i x_i\, S(\omega_i \omega_k) \equiv 0 \pmod{p},$$

wo die x ganz und rational, sowie nicht sämmtlich durch p teilbar sind. Setzt man daher $\mu = \sum x \Omega$, so ist μ nicht teilbar durch p, so dass sich die Congruenzen des Systems in die eine zusammenfassen lassen:

$$S(\mu\omega) \equiv 0 \pmod{p},$$

woraus wieder folgt, dass

$$(10) \qquad S(\nu) \equiv S(\mu\omega + p\omega') \equiv 0 \pmod{p},$$

wenn ω, ω' willkürliche Zahlen in $\mathfrak{o}$ sind. Hier ist das Ideal $\mathfrak{n}$ der Zahlen ν ein echter Teiler von $\mathfrak{o}p$. Diese letzte Congruenz ist für die Teilbarkeit von D durch p characteristisch.

Wir nehmen jetzt indirect an, $\mathfrak{o}p$ sei nicht durch $\mathfrak{p}^2$ (d. i. das Quadrat eines Primideals) teilbar, also gleich $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$ (wo $\mathfrak{q}$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar ist). Da es unter den die Factoren von $\mathfrak{o}p$ bildenden Primidealen wenigstens eines geben muss, das in dem Ideal $\mathfrak{n}$ nicht aufgeht, so nehme man grade dieses $\mathfrak{p}$ als den ersten der beiden Factoren von $\mathfrak{o}p$. Dann ist $\mathfrak{q}$ durch $\mathfrak{n}$ teilbar, also sind auch nach (10) alle $S(\lambda)$ durch p teilbar, wenn λ dem Ideal $\mathfrak{q}$ angehört.

Die beiden Ideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ sind solche, auf die man ohne Weiteres den fünften Hülfssatz anwenden kann, da aber die $\varrho_i\, \varrho_k$ (die dort auftreten) ebenfalls in $\mathfrak{q}$ enthalten, mithin ihre Spuren durch p teilbar sind, so kommt man auf den Widerspruch, dass die Determinante dieser Spuren einmal teilbar, und dann wieder nicht teilbar durch p ist, womit die gemachte Annahme widerlegt und unser Satz bewiesen ist.

Um aber tiefer in die Natur der Grundzahl D einzudringen, bedarf es noch eines grösseren Hülfsapparates, der Theorie der Moduln und ihrer Ordnungen, sowie der Theorie der complementären Basen. Es ist hier nicht der Ort, diesen schwierigen und abstracten Untersuchungen genauer zu folgen, es mag vielmehr genügen, die Hauptresultate namhaft zu machen.

Es existirt ein gewisses ausgezeichnetes Ideal $\mathfrak{d}$, das „Grundideal" des Körpers Ω, welches der Bedingung

$$(11) \qquad D\mathfrak{o} = \mathfrak{d}(D\mathfrak{o}'), \; \mathfrak{o} = \mathfrak{d}\mathfrak{o}',$$

wo $\mathfrak{o}'$ das Complement des Moduls $\mathfrak{o}$ ist, genügt.

Die Norm dieses Grundideals ist die Grundzahl des Körpers.

Die Grundzahl D ist stets teilbar durch das Quadrat des Grundideals.

Das wichtigste Resultat endlich, zu dessen Ableitung noch die Theorie der höheren Congruenzen herangezogen wird, sagt aus, dass das Grundideal $\mathfrak{d}$ der grösste gemeinschaftliche Teiler aller Hauptideale von der Form $\mathfrak{o}F'(\theta)$ ist, welche allen ganzen Zahlen θ des Körpers entsprechen.

Durch die Verbindung dieser Resultate ergiebt sich auch leicht ein neuer Beweis des zuerst angeführten Hauptsatzes.

Zum Schluss sei noch erwähnt, das sich diese Untersuchungen noch bedeutend erweitern lassen, sobald man den Körper der rationalen Zahlen, soweit er hier auftritt, überall durch einen beliebigen in Ω als Divisor enthaltenen Körper ersetzt. Dies soll jedoch an anderer Stelle vom Herrn Verfasser ausgeführt werden. My.

A. Brill. Ueber binäre Formen und die Gleichung sechsten Grades. Klein Ann. XX. 330-357.

Eine der Grundaufgaben der Invariantentheorie (der algebraischen Formen) ist die Ermittelung der (ganz) rationalen Abhängigkeit der invariantiven Formen von den gegebenen Grundformen (d. h. von den Coefficienten derselben). Die Umkehrung aber dieser Darstellung, die irrationale Abhängigkeit der letzteren Formen von den ersteren, ist bis jetzt nur in ganz vereinzelten Fällen, jedenfalls nicht principiell in Angriff genommen. Die vorliegende Arbeit macht in dieser Richtung einen wesentlichen Schritt vorwärts, indem sie die Combinanten eines Systems von p binären Formen n^{ter} Ordnung in irrationaler Weise von einer gewissen erzeugenden Function abhängen lässt, die dann das gegebene System gradezu zu ersetzen im Stande ist.

Bekanntlich hat Herr Gordan eine Form mit mehreren Reihen von Veränderlichen aufgestellt, aus der die Combinanten eines

gebenen Formensystems durch rationale Processe hervorgehen. dem hier vorliegenden einfachen Falle ist diese Form die -reihige Determinante der gegebenen, in den Variabelnreihen $y_1, \dots, x_p y_p$) geschriebenen Determinante. Von dieser Form gengt der Herr Verfasser zu der gewünschten (weit einfacheren), dem er die $\frac{p(p-1)}{2}$ Differenzen der Variabeln, die die Deterinante zu Factoren besitzen muss, auf eine eigentümliche Veise absondert, und dann die p (nicht homogenen) Variabeln inander gleich setzt. Diese neue Form $W(x)$, gleichfalls als Determinante (von $n+1$ Reihen) darstellbar, denke man sich ach den Potenzen von x ausgerechnet, dann sind die Coefficienn linear und homogen in den p-reihigen Determinanten der urch die gegebenen Formencoefficienten gebildeten Matrix.

Eine zweite Darstellung dieser Form $W(x)$ ist die als Deterinante der p^{ten} Differentialquotienten der Formen f nach x, y.

Zunächst wird von der Form $W(x)$ die fundamentale Eigenchaft nachgewiesen, dass zwischen ihren Coefficienten keine Reationen stattfinden (vorausgesetzt, dass das Gleiche auch von len Coefficienten der Formen f gilt) d. h. also, dass die Form W mmer zugleich mit den gegebenen Formen f eine allgemeine Form ihrer Ordnung ist. Die Anzahl ihrer Coefficienten beträgt $(n-p+1)+1$.

Umgekehrt lässt sich jede gegebene (allgemeine) binäre Form vom Grade N so oft in die Form W bringen, als die Zahl N sich in die beiden ganzzahligen Factoren p und $n-p+1$ spalen lässt.

Zunächst scheint es allerdings, als ob die Zahl der Formen W die doppelte sein müsste; die genauere Untersuchung zeigt aber, dass je zwei dieser Formen, von denen die eine aus der anderen durch Vertauschung der beiden Factoren p und $n-p+1$ hervorgeht, identisch sind. Dies drückt sich in dem wichtigen Combinantenprincip aus:

„Die Combinanten eines Systems von p binären Formen n^{ter} Ordnung ($n \geqq p$) sind der Zahl und Form nach identisch mit denen eines Systems von $n-p+1$ Formen derselben Ordnung."

Uebrigens wird dies Princip sofort auf ein System von Formen mit beliebig vielen Veränderlichen ausgedehnt, indem an die Stelle der Zahl n die um Eins vermehrte Anzahl der Terme einer solchen Form tritt. Die beiderseitigen Formen sind immer, mit Rosanes zu sprechen, je zu einander conjugirt.

Die dritte fundamentale Eigenschaft der Form $W(x)$ ist die, dass ihre Discriminante in zwei in den $\alpha, \beta \ldots$ (d. s. den p-gliedrigen Determinanten aus den Coefficienten der f) rationale Factoren U, C zerfällt, von denen der erste in den $\alpha, \beta, \ldots$ vom Grade $(p+1)(n-p)$, der zweite vom Grade $(p-1)(n-p+2)$ ist. Zugleich wird die Bedeutung des Verschwindens eines dieser beiden Factoren entwickelt.

Von diesen Principien wird eine ausführliche Anwendung auf die Functionaldeterminante zweier binärer Formen (dritten und) vierten Grades gemacht. Um eine allgemeine Form (vierten) sechsten Grades auf die Form W zu bringen, bedarf es der Auflösung einer Hülfsgleichung (zweiten) fünften Grades. Die Notwendigkeit, diese Hülfsgleichung der gegebenen Form zu adjungiren, steht in engstem Zusammenhang mit den (ein) drei Relationen, die zwischen den Determinanten $\alpha, \beta, \ldots$ bestehen.

Eben diese Hülfsgleichung fünften Grades dient weiter dazu, lineare Substitutionen aufzustellen, durch welche die Form W vom sechsten Grade auf gewisse canonische Formen gebracht werden kann, zu denen man folgendermassen gelangt.

Man ersetze die zwei gegebenen Formen vierten Grades durch irgend drei zu ihnen conjugirte f_1, f_2, f_3. Unter den aus diesen durch lineare Combination entstehenden Formen befinden sich (ohne Rücksicht auf willkürliche constante Factoren) einmal drei Formen $\varphi_1 \varphi_2, \varphi_2 \varphi_3, \varphi_3 \varphi_1$, (wo die φ quadratische Formen sind), sodann vier Quadrate $\psi_1^2, \ldots \psi_4^2$. Sind $x_i y_i$ die Verschwindungswerte einer Form φ_i, und $\varepsilon_i \eta_i$ die einer Form ψ_i, so geht mittels der Substitutionen

$$\text{I.} \quad x' = \frac{x - x_i}{x - y_i} \cdot \text{const.}, \quad \text{resp.} \quad \text{II.} \quad x' = \frac{x - \varepsilon_i}{x - \eta_i} \cdot \text{const.}$$

die Form $W(x)$ in die resp. canonischen Formen über:

$$\text{I.}\quad x^6+2px^5+3qx^4+4rx^3+3x^2+2px+q.$$
$$\text{II.}\quad x^6+\ ax^4+\ bx^3+\ cx^2+1.$$

Dabei setzen also die Coefficienten der bezüglichen Substi-
nsformeln die Adjunction je einer Wurzel einer Gleichung fünf-
n und einer dritten, resp. vierten Grades voraus.

Bildet man die Discriminante der Form I und deutet dabei
ie reellen p, q, r als rechtwinklige Coordinaten eines Raum-
nktes, so gelangt man zu einer sehr instructiven Discussion
er Realitätsverhältnisse der Wurzeln.

Im Weiteren treten die vier quadratischen Formen ψ_i nament-
ch in ihrem Zusammenhange mit den Wurzeln der Hülfsgleichung
nften Grades in den Vordergrund. Das Characteristische der vier
ormen ψ_i ist, dass durch irgend drei derselben (beliebig anzu-
ehmende) immer die vierte eindeutig so bestimmt ist, dass so-
ol zwischen den vier Formen, als ihren Quadraten eine lineare
lentität herrscht.

Bildet man noch die sechs Functionaldeterminanten T_{ik} je zweier
er ψ, so haben diese $6+4=10$ quadratischen Formen die Eigen-
haft, beim Uebergang von einer Wurzel der Gleichung fünften
rades zu einer anderen sich nur in gewisser Weise zu ver-
uschen, und zwar so, dass immer eines der ψ_i ungeändert
leibt, während die drei anderen ψ_k, ψ_l, ψ_m sich gegen die drei
ormen T_{kl}, T_{km}, T_{lm} auswechseln.

Bei Zugrundelegung von drei der ψ gelingt es, alle hier auf-
etenden Formen mit Hülfe des vollen Systems der drei ψ aus-
zdrücken.

Eine sehr einfache Uebersicht über den hier auftretenden
ormenkreis erhält man, wie Referent hinzufügen möchte, wenn
an die f_i als (homogene) Coordinaten eines variabeln Punktes
ner rationalen ebenen Curve vierter Ordnung R deutet. Dann
efert $W=0$ die sechs Wendepunkte von R, die φ_i sind die
rgumentenpaare der Doppelpunkte, die ψ_i die der Berührungs-
nkte der Doppeltangenten. Von dem Schnittpunkt je zweier
oppeltangenten geht noch ein Tangentenpaar an die Curve;
es sind die sechs T_{ik}.

Von jedem Punkt einer Doppeltangente D geht noch ein Tangentenquadrupel an R, alle diese Quadrupel constituiren eine lineare Schaar mit der Functionaldeterminante W.

Endlich hat auch die dem Doppeltangentenvierseit einbeschriebene Kegelschnittschaar mit R eine lineare Schaar von Tangentenquadrupeln gemein, deren Functionaldeterminante gleichfalls W ist. Diese fünf linearen Quadrupelschaaren entsprechen den fünf Wurzeln der Hülfsgleichung, die letztere Schaar der ausgezeichneten Wurzel.

Der Uebergang von dieser Wurzel zu einer der vier andern vollzieht sich mittels einer quadratischen (Classen-)Transformation, die zu Fundamentalgeraden immer drei der vier Doppeltangenten D besitzt. Durch diese Transformation geht die Curve R wieder in eine solche über. Der Uebergang der zehn Formen ψ, T in sich fällt dann in die Augen.

Zum Schluss sei noch erwähnt, dass diese Untersuchungen in engstem Zusammenhang mit denen des Herrn Stéphanos und des Referenten stehen, ohne dass dieser Zusammenhang subjectiv irgendwie nachweisbar wäre. Wegen des Näheren sei auf die Schrift des Referenten über lineare Räume verwiesen.

My.

W. R. W. Roberts. A geometrical representation of a system of two binary cubics and their associated forms. Lond. M. S., Proc. XIII. 16-25.

Eine cubische lineare Form

$$f = a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3$$

repräsentirt der Herr Verfasser durch eine Ebene

$$a_0u_0+a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3 = 0,$$

die aus der cubischen Raumcurve

$$\varrho X_0 = x_1^3,\ \varrho X_1 = 3x_1^2x_2,\ \varrho X_2 = 3x_1x_2^2,\ \varrho X_3 = x_2^3$$

drei Punkte ausschneidet, deren Argumente die Wurzeln von f sind. Auf dieser Grundlage giebt der Herr Verfasser einfache geometrische Deutungen und Constructionen des vollen Systems

weier cubischer Formen f, φ. So entspricht z. B. der Hesse'-then Form von f die Schnittlinie zweier „Ebenen der Curve", ie in der Ebene „f" liegt; ferner der Functionaldeterminante von , φ die vier Tangenten, welche die Schnittlinie der beiden Ebenen f", „φ" treffen etc.

Von der Sturm'schen Arbeit (Borchardt J. LXXXVI. 116, iehe F. d. M. X. 1878. 96), die mit dieser die Grundlage und die neisten Resultate gemein hat, scheint der Herr Verfasser keine Kenntnis gehabt zu haben. My.

A. Cayley. Tables for the binary sextic. Sylv., Am. J. IV. 379-384.

Die Zahl der Covarianten einer binären Form sechsten Grades diese mit eingeschlossen) beträgt bekanntlich 26. Zuerst weren die Leitglieder der ersten 18 dieser Covarianten angegeben. Dann wird gezeigt, wie sich die Leitglieder der folgenden 8 Covarianten (von den Graden 7 bis 15 in den Coefficienten der Grundform) aus den Coefficienten von einigen der früheren zusammensetzen. My.

F. de Bruno. Quelques applications de la théorie des formes binaires aux fonctions elliptiques. Sylv., Am. J. V. 1-25.

Die von Herrn Klein auf functionentheoretischem Wege (bei lessen Verfolgung namentlich die hypergeometrischen Reihen einen wesentlichen Durchgangspunkt bilden) ermittelte Darstellung der Elemente der elliptischen Functionen mittels der absoluten Invariante der binären biquadratischen Form wird hier mit Ausschluss nicht-algebraischer Hülfsmittel auf rechnerischem Wege erzielt. Der Hauptsatz lautet:

Ist Y die gegebene binäre Form vierten Grades (in den Variabeln y geschrieben) mit positiver Discriminante Δ, i und j hre Invarianten, ferner $I = \frac{i^3}{j^2}$, $H = \frac{\Delta}{i^3}$,

$$T = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{4}{27}H\right) + \frac{6}{2}\left(\frac{4}{27}H\right)^2 + \frac{9.8}{2.3}\left(\frac{4}{27}H\right)^3 + \cdots\right\},$$

$$k^2 = \frac{\sqrt{1+T}-1}{\sqrt{1+T}+1}, \quad \varrho = i\sqrt[4]{3}\sqrt[12]{\frac{\Delta}{H}}\left\{\frac{1+\sqrt{1+T}}{\sqrt[6]{1+4T}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

dann hat man

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{1}{\varrho}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

wo, abgesehen vom Factor $\sqrt[12]{\Delta}$, die rechte Seite allein von der absoluten Invariante (H, resp. I) abhängt.

Für K ergiebt sich die gut convergirende Reihe:

$$K = \frac{2k'}{(1+\sqrt{k'})^2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^4 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^8 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right)^{12} + \cdots\right].$$

Hier kann man das arithmetisch-geometrische Mittel $M(1+x, 1-x)$ einführen, für dessen reciproken Wert Gauss (Werke Bd. III. p. 367) die Reihe aufgestellt hatte:

$$\frac{1}{M(1+x, 1-x)} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^6 + \cdots;$$

dann wird

$$K = \frac{\pi}{M(1+k', 2\sqrt{k'})},$$

desgleichen bestimmt sich der Modul k durch die für $H<1$, und $T<1$ stark convergirende Reihe:

$$k^2 = 6\left(\frac{4}{27}H\right)\left\{\frac{1}{32} + \frac{29}{8.32}\left(\frac{4}{27}H\right) + \frac{43}{128.32}\left(\frac{4}{27}H\right)^2 + \cdots\right\}.$$

Endlich zeigt sich die rapideste Convergenz in folgender neuen θ und q verknüpfenden Relation:

$$\theta(0) + \theta_1(0) + 2\theta\left(\frac{K}{2}\right) = 4 + 8\,(q^{16} + q^{64} + q^{144} + \cdots),$$

oder auch, wenn man hier die θ-Werte wieder mit Hülfe von K und k' ausdrückt:

$$\sqrt{\frac{K}{8\pi}}(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}) = 1+2\,(q^{16}+q^{64}+q^{144}+\cdots)$$

$$= 1+2\sum_{1}^{\infty} q^{(4p)^2} = \sqrt{\frac{2K_{16}}{\pi}},$$

enn man mit K_{16} das bezeichnet, was aus K wird, wenn q in q^{16} bergeht. Der Vergleich eines Zahlenbeispiels mit einem Legendre'-chen Resultat zeigt die grosse Fruchtbarkeit der letzten Formel.

My.

. Jordan. Rapport sur un mémoire de M. C. Stéphanos, intitulé: „Mémoire sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne.“ C. R. XCIV. 1230-1234.

Es ist dies der Bericht der Commission über das Werk des Ierrn Stéphanos, aus dem der letztere bereits früher (siehe '. d. M. XIII. 1881. p. 92) einen Auszug in den Comptes Rendus gegeben hatte.

Als neu erscheint in diesem Bericht die Erwähnung des vichtigen Combinantenprincips, nach dem zwei conjugirte Systeme inärer Formen die gleichen Covarianten haben. Bei der Ableitung lieses Princips stützt sich der Herr Verfasser auf die berühmte Gordan'sche Abhandlung (Math. Ann. Bd. V. 95, s. F. d. M. IV. 1872. p. 61.).

Im Besonderen wird das Princip angewandt auf Formenbüschel, und dabei der Zusammenhang der Jacobiana des Büschels nit den Formen des letzteren eingehend erörtert. Als interessantes Beispiel dienen diejenigen Büschel von biquadratischen Formen, die die nämliche Jacobiana (eine gegebene Form sechsten Grades) besitzen. Zugleich wird eine sehr einfache geometrische Interpretation dieser (fünf) Büschel angegeben.

Die Untersuchungen des Herrn Verfassers treffen sowohl in ler Grundlage als in dem durchgeführten Beispiel sehr nahe mit lenen des Herrn Brill (s. p. 64 u. f.), wie des Referenten zusammen. Es sei hier der Kürze wegen auf die bezüglichen Ausführungen in dem Werke des Referenten „Apolarität und rationale Curven“ verwiesen.

My.

J. J. Sylvester. On the completion of the author's method of obtaining the ground-forms to any binary quantic or system of binary quantics. J. Hopk. Circ. 1882. 178.

Vorläufige Mitteilung des Herrn Sylvester, dass der schon öfters gegen seine neue Theorie erhobene Vorwurf, sie liefere nur die Typen (d. h. Grad und Ordnung) der Grundformen, lasse diese selbst aber im Uebrigen unbestimmt, unbegründet sei. Namentlich mit Hülfe eines geschickten Einteilungsprincipes für seine Typen könne er ohne Mühe (mit Anwendung der bekannten partiellen Differentiationsoperation) die Formen selbst berechnen. Eine nähere Ausführung wird im Am. J. erscheinen.

My.

J. J. Sylvester. On subinvariants i. e. semi-invariants to binary quantics of an unlimited order. J. Hopk. Circ. II. 3; Sylv., Am. J. V. 79-96.

Da der grösste Teil dieser grossen Abhandlung im Am. J. seinem Erscheinen nach in das Jahr 1883 fällt, so soll hier vorläufig nur die principielle neue Behandlung, die Herr Sylvester darin der Theorie der Invarianten-Grundformen zu Teil werden lässt, dargelegt werden.

Diese Behandlung basirt auf der Erscheinung, dass der Leitcoefficient irgend einer Covariante einer binären Form nicht nur dies eine Mal, sondern auch in einer Covarianten von jeder binären Form höherer Ordnung (als Leitcoefficient) auftritt. Jeder Leitcoefficient begründet daher eine bestimmte unendliche Formengruppe.

Als Subinvariante in Bezug (quâ) auf die Elemente $a, b, c, \dots$ wird definirt irgend eine ganze rationale Function derselben, die der Differentialgleichung der Leitcoefficienten

$$\Omega \equiv a\partial_b + 2b\partial_c + 3c\partial_d + \cdots \text{ ad libitum} = 0$$

genügt. Ersetzt man hier Ω durch eine beliebige lineare Function der $a\partial_b, b\partial_c, \dots$, so kommt man zu Subinvarianten in Bezug

auf die entsprechenden numerischen Vielfachen der $a, b, c\ldots$ als Elemente.

Daraus folgt, dass, wenn man in einer solchen Subinvariante das erste Element a gleich Null setzt, der Rest jetzt eine Subinvariante in Bezug auf die neue Elementenreihe $b, \frac{c}{2}, \frac{d}{3}, \cdots$ wird; ein Satz, der die Ableitung der Grundformen sehr erleichtert.

Der Hauptsatz des ersten Abschnittes sagt aus, dass irgend eine Invariante eines Systems von Subinvarianten selbst wieder eine Subinvariante ist, und zwar in Bezug auf den höchsten Buchstaben (der in jenem vorkommt) und die Einheit; ein Satz, der auf Subinvarianten „von Systemen von Elementen" ausgedehnt werden kann.

Uebrigens lassen sich umgekehrt diese „Plurisubinvarianten" wieder als Specialfall der „Unisubinvarianten" auffassen, indem in diesen nur gewisse der numerischen Coefficienten gleich Null gesetzt zu werden brauchen.

Eine besonders hervorragende Rolle unter den Coefficienten in einer Subinvariante spielt der zur höchsten Potenz des höchsten (entferntesten) Buchstabens gehörige, da er gleichfalls eine Subinvariante ist, und zwar bezüglich der unendlichen Elemente, wie die erste. Er heisst der Keim (germ) der zugehörigen Covariantenform.

Solche Keimtafeln werden für die Grundformen der binären Formen fünfter und sechster Ordnung aufgestellt, sie gewähren einen guten Einblick in den Aufbau des vollen Formensystems.

Der wirklichen, algebraischen Herleitung der Grundformen, (d. h. hier ihrer Grundsemiinvarianten) liegt die Aufstellung der „Urtypen" (proto-morphs) zu Grunde, d. i. derjenigen Formen, die abwechselnd vom zweiten und dritten Grade in den Coefficienten sind. Ihre Wichtigkeit geht daraus hervor, dass jede andere, zur selben binären Form gehörige Grundsemiinvariante (mit einer geeigneten Potenz des ersten Coefficienten multiplicirt) eine ganze rationale Function der Urtypen ist.

Als Hauptbeispiel dienen die binären Formen fünfter Ordnung;

dabei tritt die Nützlichkeit des oben erwähnten Restsatzes sehr hervor. Die Grundformen zerfallen dabei ganz von selbst in gewisse Categorien, die auf die Natur jener ein neues Licht werfen.

Beiläufig wird ein Satz aufgestellt, der aber eine grosse Zukunft zu haben scheint: „Eine Folge von (wachsenden) ganzen Zahlen mit der Beschränkung, dass keine von ihnen ein Vielfaches einer der andern und auch nicht die Summe der Vielfachen von irgend zwei der andern ist, kann nicht bis in's Unendliche fortgesetzt werden." My.

G. Peano. Sui sistemi di forme binarie di egual grado e sistema completo di quante si vogliano cubiche. Torino, Atti. XVII. 580-586.

Die invariantiven Bildungen des vollen Systems von N binären Formen gleichen Grades n lassen sich in Typen einteilen, so dass sich die Individuen eines und desselben Typus durch den bekannten Coefficienten-Polarisationsprocess auseinander (d. h. also auch aus einem einzigen) ableiten lassen. Der Verfasser beweist, dass die Zahl dieser Typen auch für ein beliebig wachsendes N eine endliche ist, wie dies schon für $n = 1, 2$ bekannt war. Als Grundlage dient ihm der wichtige Capelli'sche Satz (siehe Capelli p. 84.):

„Eine homogene Function F von n Systemen mit n Variabeln kann man nach aufsteigenden Potenzen der Determinante der Variabeln so entwickeln, dass die Coefficienten Polarenbildungen von aus F abgeleiteten Formen sind, die ein Variabelnsystem weniger enthalten."

Dieser Satz wird angewandt auf die Systeme der Coefficienten von $n+1$ binären Formen n^{ten} Grades und eine ganze homogene Function F derselben.

Ist im Besonderen F eine Covariante der gegebenen Formen (und noch etwaiger weiterer vom n^{ten} Grade), so sind demnach die Entwickelungscoefficienten polare Formen von Functionen φ, welche Covarianten der gegebenen Formen excl. einer, etwa f_{n+1} sind.

Wird der Satz jetzt von Neuem auf diese Functionen φ angewandt, u. s. f., so stellt sich F dar als Function einmal der $(n+1)$-reihigen Coefficienten-Determinanten, und im Uebrigen von Covarianten von nur n der gegebenen Formen.

Und da sich diese letzteren Covarianten aus einer endlichen Zahl von Typen zusammensetzen, so tun es auch die allgemeinsten Covarianten F.

Für ein System beliebig vieler binärer Formen dritten Grades wird die Rechnung durchgeführt. Es ergeben sich zehn verschiedene Typen; am Schluss wird noch ohne Beweis mitgeteilt, wie sich die Bildungen des vollen Systems auf diese zehn Typen verteilen. Ist N die Zahl der gegebenen Formen, so gehören den einzelnen Typen successive folgende Anzahlen von Formen zu:

$$N,\ \frac{1}{2}N(N-1),\ \frac{1}{2}N(N+1),\ \frac{1}{2.3}N(N+1)(N+2),$$
$$\frac{1}{3}(N-1)\,N(N+1) \text{ etc.}$$

My.

G. Peano. Un teorema sulle forme multiple. Torino, Atti. XVII. 73-80.

Der Gordan'sche Fundamentalsatz über die Endlichkeit des binären Formensystems wird hier ausgedehnt auf binäre Formen mit beliebig vielen Variabelnreihen, die Substitutionen unterworfen werden, die alle von einander unabhängig sein können, (wie sie durch Capelli in die Formentheorie eingeführt sind). Der Herr Verfasser stellt zu dem Zwecke folgenden Hauptsatz auf:

„Eine Reihe von Formen mit n binären Variabelnreihen sei gegeben; nach einer dieser Reihen, etwa der x-Reihe entwickelt, seien sie:

$$f \equiv f_0 x_1^m + m f_1 x_1^{m-1} + \cdots,\quad g \equiv g_0 x_1^n + n g_1 x_1^{n-1} + \cdots \text{ etc..}$$

Besitzen dann die Formen $f_0, f_1 \ldots, g_0, g_1 \ldots$ etc. ein endliches System von (invariantiven) Grundformen, so auch die ursprünglich gegebenen f, g, etc."

Der Beweis zerlegt sich in drei Teile.

Zuerst wird gezeigt, dass, wenn man irgend eine invariantive Form F der gegebenen $(f, g,$ etc.) nach den x_1, x_2 entwickelt, so dass

$$F = F_0 x_1^p + p F_1 x_1^{p-1} x_2 + \cdots,$$

dann die F_i invariantive Formen des Systems der f_i, g_i, etc. sind, also sich nach Voraussetzung als rationale ganze Functionen einer endlichen Anzahl von Grundformen (P_0, P_2 etc.) darstellen lassen.

Zweitens operire man mit dem Symbol

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1} y_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} y_2$$

und seiner Wiederholung an den gegebenen Formen f, g, etc., und erhalte so das System

$$f, \Delta f, \Delta^2 f, \ldots \Delta^m f,$$
$$g, \Delta g, \Delta^2 g, \ldots \Delta^n g,$$

ein System, das bekanntlich dem Coefficientensystem der f_i, g_i, etc. in mancher Hinsicht analog ist. Für dieses neue System bilde man die durch die Grundformen P definirten Functionen und entwickele in üblicher Weise nach der Determinante (xy); dann kommt für irgend eine dieser Functionen:

$$Q = \Delta^q \varphi + (xy) \Delta^{q-1} \psi + (xy)^2 \Delta^{q-2} \chi + \cdots,$$

wo q der Grad ist, bis zu dem die y in Q ansteigen. Aus der Tatsache, dass für $x_1 = y_2 = 1$, $x_2 = y_1 = 0$, Q in P übergeht, leitet man ab, dass das System der Formen φ, ψ, χ, ... ein endliches ist, da ja die P in endlicher Zahl vorhanden sind, und zu jedem P ein endliches System von Grundformen gehört.

Drittens wird bewiesen, dass, wenn man sich hülfsweise die F, φ, ψ, ... als einfache, in den x_1, x_2 binäre Functionen denkt, in diesem Sinne F eine invariantive Form der übrigen ist. Da aber die letzteren wieder nur in endlicher Anzahl existiren und ein endliches Formensystem (Φ_1, Φ_2, etc.) besitzen, so drückt sich F als ganze rationale Function der Φ aus, d. h. die ursprünglich gegebenen Formen f, g, etc. besitzen ein endliches Grundformensystem, sobald es die f_i, g_i, etc. tun.

Im Besonderen kommt also den sogenannten Correspondenzen ein endliches volles System zu. My.

C. LE PAIGE. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. R. XCIV. 31-32.

Zuerst wird die Bemerkung gemacht, dass, wie eine trilineare Form drei quadratische Covarianten mit der gleichen Discriminante besitzt, so eine quadrilineare Form vier biquadratische Covarianten mit den gleichen Invarianten. (Cf. unten).

Sodann wird eine Relation für trilineare Formen auf Formen mit drei (n) Reihen von Variabeln ausgedehnt. Als specieller Fall ist darin eine bekannte Clebsch'sche Formel enthalten, die übrigens Herr Le Paige schon früher auf beliebig viele binäre Formen ausgedehnt hatte. (Cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 104.).

My.

C. LE PAIGE. Sur les formes algébriques à plusieurs séries de variables. C. R. XCIV. 69-71.

C. LE PAIGE. Sur les formes quadratiques à deux séries de variables. C. R. XCIV. 424-426.

C. LE PAIGE. Sur la forme quadrilinéaire. Torino, Atti. XVII. 299-320.

Den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bildet die quadrilineare Form $f = a_x a'_y a''_z a'''_u$, die der Herr Verfasser in ähnlicher Weise dem Studium der Flächen vierter Ordnung zu Grunde zu legen gedenkt, wie er die Theorie der trilinearen Formen mit der der ebenen Curven dritter Ordnung verschmolzen hat.

Die Form f besitzt zunächst sechs Covarianten, die in Bezug auf immer zwei Reihen Variabeln quadratisch sind. Jede von diesen besitzt wieder zwei Discriminanten (je eine bezüglich einer Variabelnreihe). Diese zwölf biquadratischen Covarianten fallen aber zu je drei zusammen, so dass vier solche Covarianten restiren:

$$L_x^4,\ M_y^4,\ N_z^4,\ P_u^4.$$

Von diesen gilt der Satz, dass sie dieselben Invarianten haben. Der Beweis wird einmal mit Hülfe eines Capelli'schen Satzes, sodann aber auch durch directe Bildung der bezüglichen Formen geführt mit Zugrundelegung der canonischen Form für f:

$$f = \sum_{iklm} a_{iklm}\, x_i\, y_k\, z_l\, u_m,$$

wo der Index 1 resp. 2 entweder kein- oder zwei- oder viermal auftritt. Diese canonische Form ist dadurch charakterisirt, dass die vier Grundpunktepaare $(0, \infty)$ je eines der drei Wurzelpaare von den vier Covarianten sechsten Grades sind, welche den vier obigen biquadratischen Formen zugehören. Hält man einen solchen Grundpunkt (etwa $x_1 = 0$) fest, so stehen, $f = 0$ gesetzt, die Punkte $(y)(z)(u)$ in einer trilinearen Beziehung, deren neutrale Elementenpaare je harmonisch sind zu den bez. Grundpunktepaaren.

Sodann werden die sechs Bedingungen aufgestellt, unter denen die Form f die einfache Gestalt annimmt:

$$f \equiv a x_1\, y_1\, z_1\, u_1 + b x_2\, y_2\, z_2\, u_2.$$

Diese Bedingungen sagen aus, dass die vier Covarianten L, M, N, P vollständige Quadrate sind. Einen solchen Fall bilden in der Raumgeometrie die Punktquadrupel, welche die Ebenen des Raumes aus vier beliebigen Raumgeraden ausschneiden.

Weiterhin werden noch die speciellen Fälle untersucht, in denen die Form f in Factoren zerfällt.

Das volle Co- und Invariantensystem von f soll erst in einer weiteren Arbeit vollständig aufgestellt werden.

Da das Studium der quadrilinearen Formen wesentlich auf das der „biquadrischen" (d. i. der in zwei Variabeln quadratischen) zurückkommt, so sei noch angeführt, dass sich diese im Allgemeinen immer in die canonische Form bringen lassen:

$$x_1^2\,(a_0\, y_1^2 + a_2\, y_2^2) + 4\, x_1\, x_2\, b_1\, y_1\, y_2 + x_2^2\,(c_0\, y_1^2 + c_2\, y_2^2).$$

Der Weg zu dieser Reduction wird in der an zweiter Stelle angeführten Note genauer angegeben. My.

E. Picard. Sur certaines formes quadratiques ternaires. C. R. XCIV. 1241-1243.

Im Anschluss an die Hermite'schen Untersuchungen über die Transformation der Abel'schen Functionen wird gezeigt, wie man aus den allgemeinen ternären quadratischen Formen durch Anwendung einer gewissen Specialgruppe von linearen Substitutionen eine gewisse Classe herausheben kann in der Art, dass ein Individuum f dieser Classe vermöge einer solchen Substitution in ein anderes, F, übergeht, wo zwischen den Coefficienten von F die gleichen Relationen herrschen, wie zwischen denen von f, und wo F der gleichen Classe angehört.

Zugleich wird noch ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen einer solchen Specialsubstitution, ihrer conjugirten und ihrer adjungirten angegeben. My.

E. Picard. Sur certaines formes quadratiques. C. R. XCV. 763-766.

In Analogie mit der Hermite'schen Erweiterung der Theorie der quadratischen binären Formen geht der Herr Verfasser, statt von der quadratischen ternären, von der allgemeinen Form aus:

$$Axx_0+A'yy_0+A''zz_0+Byz_0+B_0y_0z+B'zx_0+B'_0z_0x+B''xy_0$$
$$+B''_0x_0y = f(x, y, z, x_0, y_0, z_0),$$

wo der Index 0 immer die conjugirte Grösse anzeigt, und die A reell sind.

Auch diese Formen lassen sich in bestimmte und unbestimmte einteilen, je nach dem sie (durch lineare Substitution) auf die Formen

$$\pm(UU_0+VV_0+WW_0) \quad \text{resp.} \quad \pm(UU_0+VV_0-WW_0)$$

reducirt werden können.

Die unbestimmten Formen führen in folgender Weise zu einer unendlichen Schaar von discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen zweier Variabeln. Ist irgend eine der (ganzzahligen) Substitutionen, die die reducirte unbestimmte Form in sich überführen:

$$U = A_3 u + B_3 v + C_3 w$$
$$V = A_2 u + B_2 v + C_2 w$$
$$W = A_1 u + B_1 v + C_1 w,$$

und setzt man hier

$$\frac{U}{W} = \frac{u}{w} = \alpha, \ \frac{V}{W} = \frac{v}{w} = \beta,$$

so hat man die gewünschte Gruppenschaar.

Es wird diese Schaar noch explicite dargestellt, indem, ebenfalls nach Hermite'scher Methode, die Coefficienten der Substitution durch drei willkürliche Parameter ausgedrückt werden.

Für die specielle Form $f = xy_0 + yx_0 + zz_0$ kommt der Herr Verfasser zu einer schon mehrfach von ihm benutzten Gruppe.

My.

P. Gordan. Ueber Büschel von Kegelschnitten. Klein Ann. XIX. 529-553.

P. Gordan. Weitere Untersuchungen über die ternäre biquadratische Form

$$f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1.$$

Klein Ann. XX. 487-515.

P. Gordan. Ueber Gleichungen siebenten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen. Klein Ann. XX. 515-530.

Dies sind die letzten Vorarbeiten zu einer expliciten Lösung der Gleichungen 7ten Grades mit einer Gruppe von 168 Substitutionen (cr. F. d. M. XII. 1880. p. 96), wobei aber zu bemerken ist, dass auch der Nutzen, den die Theorie der ternären, quadratischen und biquadratischen Formen aus diesen Untersuchungen zieht, ein ganz erheblicher ist.

Dies zeigt sich gleich in der ersten der beiden Arbeiten, in der das volle (simultane) System zweier ternärer quadratischer Formen (das Herr Gordan bereits in dem Buche von Clebsch und Lindemann mitteilen liess) aufgestellt und verschiedene wichtige Relationen zwischen diesen entwickelt werden.

Das volle System S der beiden Formen (Kegelschnitte) $= u_\varrho^2$ und $s = s_x^2$ besteht, diese incl., aus 20 Formen, die bis m Grade 3 in den u resp. x ansteigen. Unter ihnen zeichnen ch aus, einmal vier Invarianten: (1), (2), (3), (4), sodann je drei egelschnitte in Punkt-, resp. Liniencoordinaten: r, s, t, resp. , σ, τ, sowie die zwei Functionaldeterminanten derselben.

Zunächst werden die wichtigsten weiteren Formen als ganze unctionen der Systemformen ausgedrückt, unter denen eine gevisse dreireihige Determinante H (vom 6ten Grade in den x), owie die Tactinvariante der gegebenen Formen hervorragen.)ie erstere Covariante hat die Bedeutung, dass sich die Quadrate und Produkte der r, s, t aus den Unterdeterminanten von H inear zusammensetzen.

Im zweiten Abschnitte werden die Ecken, resp. Seiten des gemeinsamen Polardreiecks der gegebenen Kegelschnitte eingeführt, mittels deren die Hauptformen des Systems S in „irrational-typischer“ Weise ausgedrückt werden. Dies dient dann wieder dazu, die Quadrate der beiden Functionaldeterminanten (r, s, t) und (ϱ, σ, τ) durch die graden Formen des Systems auszudrücken.

Der dritte Abschnitt ist der rationalen Typik gewidmet, zunächst der der beiden gegebenen Kegelschnitte, mit Hülfe einer zu adjungirenden, vorläufig beliebigen Geraden ω_x, deren Pole bez. ϱ, σ, τ zu Ecken des Coordinatendreiecks genommen werden.

Sodann gelingt es, sowohl einen beliebigen weiteren Kegelchnitt a_x^2, als eine beliebige Curve vierter Ordnung a_x^4 in rational ypischer Weise auf das neue Coordinatensystem zu beziehen. n ihren Darstellungen treten 13, resp. 22 von einander unabhänige Invarianten auf, wie es der Natur der Sache gemäss ist.

Zur Geraden ω_x wird weiterhin insbesondere irgend eine assende lineare Covariante von ϱ, σ und einem dritten Kegelchnitt p_x^2 genommen. Die typischen Coefficienten von r, s, p rücken sich durch elf Invarianten (von r, s, p) aus, zwischen denen er eine Relation besteht, desgleichen die typischen Coefficienten n r, s, p, q, wo letztere Form einen neuen, vierten Kegelschnitt edeutet, durch 20 Invarianten mit vier Relationen.

Dies findet nun seine Anwendung auf die typische Darstellung einer Curve vierter Ordnung a_x^4 und eines einzelnen Kegelschnitts ϱ in folgender Weise.

Man bilde die Formen s, p, q, ω so, dass

$$s_x^2 = a_x^2 a_\varrho^2,\ p_x^2 = a_x^2 a_\tau^2,\ q_x^2 = a_x^2 a_\sigma^2, \qquad \omega_x = p_\sigma p_\tau (\varrho \tau x).$$

Dann erfordert die typische Darstellung von a_x^4 und ϱ_x^2 17 simultane Invarianten beider, von denen aber nur 13 unabhängig sind. Ist dagegen a_x^4 nicht allgemein, sondern unter der im Titel angegebenen numerischen Form gegeben, so ist von vornherein klar, dass die Zahl der unabhängigen Invarianten sechs, d. h. gleich der Zahl der Coefficienten des Kegelschnitts sein muss. Die Rechnung führt zunächst auf zwölf Fundamentalinvarianten, die sich infolge eines eigentümlichen, zwischen der Form f und ihrer Covariante $(abu)^4$ stattfindenden Reciprocitätsverhältnisses paarweise gruppiren lassen. Dadurch nun, dass es gelingt, gewisse höhere Invarianten durch jene zwölf auszudrücken, wird man von selbst auf die sechs Relationen geführt, die zwischen den zwölf bestehen. Diese Relationen zeigen eine verhältnismässig grosse Einfachheit, denn fünf von den zwölf Invarianten drücken sich rational durch die übrigen aus, und zwischen den letzteren sieben besteht eine algebraische Gleichung, welche in zweien derselben vom sechsten Grade ist.

Umgekehrt denke man sich jetzt diese sechs letzteren Fundamentalinvarianten mit der zwischen ihnen stattfindenden Gleichung numerisch gegeben, ebenso wie das canonische f. Berechnet sollen die Coefficienten des Kegelschnitts ϱ werden.

Diese abschliessende Aufgabe ist nun ohne Weiteres auf die bereits früher gelöste (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 96) zurückführbar: „Eine biquadratische ternäre Form F, von der bekannt ist, dass sie sich durch eine lineare Substitution von der Determinante Eins in $f = x_1^3 x_2 + x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1$ verwandeln lässt, (die also durch 168 lineare Substitutionen von der Determinante Eins in sich übergeht) die aber in irgend einer anderen Form (hier der typischen) gegeben ist, tatsächlich durch eine solche Substitution in f überzuführen."

Diese Substitution führt aber zugleich das typische ϱ in das

esuchte (canonische) über, womit die Aufgabe gelöst ist. Den 68 gleichberechtigten [Substitutionen stellen sich genau 168 leichberechtigte Kegelschnitte zur Seite.

Diese 168 Substitutionen stehen in engstem Zusammenhange it den 168 Substitutionen, die den Anfangs erwähnten Gleichunen 7ten Grades zukommen, und in der Tat ist mit der Lösung er eben angeführten Aufgabe auch die Auflösung solcher leichungen implicite mitgegeben. Doch haben wir über die beigliche Arbeit von Herrn Gordan, die den Schlusstein seines ebäudes bildet, erst im nächsten Jahrgang dieser Fortschritte 1 sprechen. My.

. Battaglini. Sulle forme quaternarie bilineari.

Rom., Acc. L. (3) VI. 40-42.

Die räumliche Correlativität wird hier durch das Verschwinden ner quaternären bilinearen Form (in der die Variabeln die oordinaten zweier Punkte bedeuten), sowie ihrer wichtigsten ontravarianten und Zwischenformen dargestellt. In diesem Sinne hliesst sich die Note genau an eine frühere des Herrn Verssers über die ternäre bilineare Form an.

Die Beziehung zwischen den Ebenen des Raumes repräsent die „conjungirte" Form, die zwischen den Geraden des aumes jede der beiden „intermediären" Formen.

Je nachdem die Discriminante der ursprünglichen Form oder le ihre ersten, oder alle ihre zweiten Unterdeterminanten verhwinden, existirt je ein Fundamental-Punkt, -Gerade, -Ebene, nd dualistisch für die conjungirte Form).

Dann werden die beiden Fundamentalflächen zweiter Ordng, resp. Classe und ihre Zuordnung besprochen. Diese haben n windschiefes Vierseit gemein, dessen Ecken, Kanten, Seiten gewisser Weise sich involutorisch entsprechen. Dieses Vierit hängt von einer biquadratischen Gleichung ab, deren Speciallle interpretirt werden.

Zum Schlusse wird noch die fortgesetzte Wiederholung der

Zuordnung discutirt, die abwechselnd zu correlativen (reciproken) und collinearen Gebilden führt.

Die Note ist wohl als eine gedrängte Zusammenstellung von grösstenteils bekannten Tatsachen aufzufassen. My.

A. Capelli. Sul numero dei covarianti di grado dato per forme di qualsivoglia specie. Batt. G. XX. 293-301.

Die durch den Titel angegebene Aufgabe wird hier ihrer Lösung näher geführt. In seiner der Acc. dei Lincei überreichten Abhandlung (siehe p. 86) hatte Herr Capelli diese Aufgabe durch folgende ersetzt: die Anzahl der Covarianten Φ „vom Gewicht Null" zu bestimmen, die von vorgegebenen Graden in den Coefficienten der gegebenen Formen, ferner von vorgegebenen Graden $\theta, \theta_1, \ldots \theta_\sigma$ in $\sigma+1$ cogredienten Variabelnreihen $x, x', \ldots x^{(\sigma)}$ sind und überdies den σ Differentialgleichungen

$$(1) \qquad D_{xx'}\Phi = 0, \; D_{xx''}\Phi = 0 \ldots \quad D_{xx^{(\sigma)}}\Phi = 0$$

genügen, wo z. B.

$$D_{xy} = \Sigma y \frac{\partial}{\partial x}.$$

Die Anzahl der (linear unabhängigen) Covarianten Φ, die diesen Bedingungen mit Ausnahme von (1), genügen, ist leicht bestimmbar und wird bezeichnet mit $\varphi(\theta, \theta_1, \ldots \theta_\sigma)$, indem alle übrigen Zahlen ausser den θ als fest betrachtet werden.

Es entsteht daher nunmehr die Frage, wie vielen (linear unabhängigen) Bedingungen (für die Coefficienten von Φ) irgend eine der Gleichungen (1) aequivalent ist. Herr Capelli verallgemeinert die Frage sogleich und erhält das Resultat, dass die durch die Gleichung

$$(2) \qquad D_{xx'}^{\tau_1}, D_{xx''}^{\tau_2}, \ldots D_{xx^{(\sigma)}}^{\tau_\sigma}\, \Phi = 0,$$

(wo die Exponenten die bez. Wiederholungen der resp. Operationen bedeuten) den $\varphi(\theta, \theta_1, \ldots \theta_\sigma)$ willkürlichen Coefficienten von Φ auferlegten Bedingungen durch die Zahl

$$(3) \qquad \varphi(\theta-\tau, \theta_1+\tau_1, \theta_2+\tau_2, \ldots \theta_\sigma+\tau_\sigma).$$

wo

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \dots \tau_\sigma,$$

geliefert werden.

Die Zahl θ ist hier deswegen vor den andern (θ_i) ausgezeichnet, weil sie den Grad von Φ in derjenigen Variabelnreihe (x) angiebt, die in den ursprünglich (im Titel) der Anzahl nach gewünschten Covarianten gar nicht auftritt.

Das Resultat (3) wird dadurch abgeleitet, dass gezeigt wird, wie die linke Seite der Gleichung (2) die allgemeinste Covariante ihrer Art darstellt. Man hat daher nur diese linke Seite aus der nötigen Zahl von Covarianten gleicher Art linear zusammenzusetzen und dann die Coefficienten dieser Zusammensetzung einzeln zum Verschwinden zu bringen. Das Resultat (3) schliesst ohne Weiteres das andere mit ein, das für $\varrho = 1$, $\tau_1 = 0$ zu einer bekannten Formel für binäre Formen führt, nämlich: „Die Anzahl der der Differentialgleichung (2) genügenden linear unabhängigen Covarianten Φ ist genau durch die Zahl

$$\varphi(\theta, \theta_1, \theta_2, \dots) - \varphi(\theta - \tau, \theta_1 + \tau_1, \theta_2 + \tau_2, \dots)$$

bestimmt."

Wendet man jetzt den allgemeinen Satz succ. auf die einzelnen Gleichungen (1) an, so erkennt man bald, dass die durch zwei auf einander folgende Gleichungen (1) gelieferten Bedingungen nur teilweise von einander verschieden sind, indessen vermag Herr Capelli für die Anzahl der gemeinsamen Bedingungen nur eine untere Grenze anzugeben.

Dagegen wird ein Fortschritt in anderer Richtung erzielt. Die Gleichungen (1) sind nämlich den folgenden brauchbareren äquivalent:

$$D_{xx'}\,\Phi = 0,\quad D_{x'x''}\,\Phi = 0 \dots D_{x^{(\sigma-1)}x^{(\sigma)}}\,\Phi = 0.$$

Hier vermag der Herr Verfasser genau anzugeben, wieviel (linear unabhängige) Bedingungen durch zwei dieser Gleichungen repräsentirt werden, vorausgesetzt, dass diese in der hingeschriebenen Reihe nicht unmittelbar auf einander folgen.

My.

G. Battaglini e F. Casorati. Relazione sulla Memoria di A. Capelli „Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche.“ Rom., Acc. L. (3) VI. 165-166.

Herr Capelli legt seinen Fondamenti einen allgemeinen Satz zu Grunde, in dem ein bekannter Gordan'scher Satz (für binäre Formen) als specieller Fall enthalten ist, nämlich:

„Eine ganze rationale Function von $n+1$ Reihen mit je $n+1$ (homogenen) Variabeln lässt sich nach ganzen positiven Potenzen der Determinante der Variabeln so entwickeln, dass die Coefficienten der Entwickelung aus Functionen, die aus der Grundform durch polare Bildungen entstehen, aber eine Reihe Variabeln weniger enthalten, selbst wieder mittels eines polaren Derivationssymbols abgeleitet sind.“

Das Wesentliche dabei ist, dass Herr Capelli alle erforderlichen Operationen (auch die durch die Functionaldeterminante der Variabeln ausgedrückte Cayley'sche) auf einen einzigen Typus „$\Sigma y \frac{\partial}{\partial x}$“ reducirt.

Obiger Satz ermöglicht eine systematische Entwickelung aller invariantiven Bildungen eines Systems von Grundformen, immer nur mit Hülfe von Operationen, die sich aus den eben erwähnten (und ihren Wiederholungen) zusammensetzen.

Zum Schluss wird die wichtige Frage nach der Anzahl der Covarianten von gegebenen Graden in den Variabeln und den Coefficienten der Grundformen (obiger Art) untersucht und auf das Erfülltsein von n Differentialgleichungen der Form

$$\Sigma y \frac{\partial}{\partial x} = 0$$

basirt.

Dabei zeigt sich, dass zwar die durch jede einzelne dieser Gleichungen geforderten linearen Bedingungen von einander unabhängig sind, aber nicht mehr die durch zwei und mehr derselben ausgedrückten. Die dadurch auftretenden Schwierigkeiten sind so gross, dass mit Ausnahme des Falls der binären Formen nur erst eine untere Grenze für die gewünschte Zahl geliefert wird.

Die Arbeit selbst wird in den Atti der Akademie erscheinen. My.

Weiter befinden sich Beweise von Lehrsätzen und Lösungen von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Formen von J. J. WALKER, T. R. TERRY, CH. LADD, J. L. KITCHIN, J. O'REGAN, J. L. MC KENZIE, S. MARCKS, E. W. SYMONS, G. TURRIFF, A. COHEN, E. RUTTER, A. CAYLEY, W. J. C. SHARP, A. MC MURCHY, T. MUIR Ed. Times XXXVI. 30, 33, 76, 87-88, 105, 106-107; XXXVII. 30-31, 33-34, 46, 58-59, 74.

O.

LE PAIGE. Notiz über die $2k$-elementige centrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{\text{ten}}$ Grades. Wien. Ber. LXXXVI. 104-105.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5.

. CAYLEY. On the 8-square imaginaries. J. Hopkins Circ. 1882. 203; Sylv., Am. J. IV. 292-297.

Das Problem, das Product von zwei Summen, deren jede us den Quadraten von irgend acht gewöhnlichen algebraischen irössen gebildet ist, wieder als Summe von acht Quadraten aämlich ohne Hülfe von Radicalen) darzustellen, führt zu einem gewissen System von acht Einheiten (locativen Symbolen), grade vie die entsprechenden, auf zwei, resp. vier Quadrate sich beiehenden Probleme auf die Einheiten 1, i, resp. 1, i, j, k (d. s. lie Quaternionen) führen.

In der Tat, multiplicirt man die beiden Producte

$$(\alpha_0 \varepsilon_0 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots \alpha_7 \varepsilon_7) \quad \text{und} \quad (\beta_0 \varepsilon_0 + \beta_1 \varepsilon_1 + \cdots \beta_7 \varepsilon_7),$$

vo die ε imaginäre Einheiten ($\varepsilon_0 = 1$), die α und β irgend velche algebraische Grössen sind, so kann man ein solches Vernüpfungsgesetz, mittels dessen die Producte $\varepsilon_i\, \varepsilon_k$ sich wieder

durch die ε selbst ausdrücken, aufstellen, so dass, wenn jenes Product, nach den Einheiten ε geordnet, die Form annimmt:

$$A_0\,\varepsilon_0 + A_1\,\varepsilon_1 + \cdots A_7\,\varepsilon_7,$$

die Relation besteht:

$$(\alpha_0^2+\alpha_1^2+\cdots+\alpha_7^2)\,(\beta_0^2+\beta_1^2+\cdots+\beta_7^2) = A_0^2+A_1^2+\cdots+A_7^2.$$

Das Merkwürdige an dem Verknüpfungsgesetze ist, dass das Gesetz der Association nicht durchweg gilt. Denn unter den 35 als verschieden auftretenden Triaden $\varepsilon_i\,\varepsilon_k\,\varepsilon_l$ befolgen nur acht jenes Gesetz, so dass z. B. $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ den Sinn hat:

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \,.\, \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2\varepsilon_3,$$

die 28 übrigen dagegen nicht, indem z. B.

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 \,.\, \varepsilon_4 = - \varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2\varepsilon_4,$$

so dass ein Product von solchen drei Symbolen keinen bestimmten Sinn besitzt.

Herr Sylvester fügt dem Bericht im Circ. noch hinzu, einmal, dass dies wohl der erste Fall sei, in dem Symbole der Art, für die das Associationsgesetz nicht mehr durchweg bindend ist, auf ein Problem der eigentlichen (nicht nur formalen) Algebra in fruchtbarer Weise angewandt würden, sowie dass Herr Cayley ihm zugleich die Unmöglichkeit mitgeteilt habe, obiges Verfahren auf eine „16-Quadrat-"Formel auszudehnen.

Man vergleiche übrigens mit Obigem die merkwürdige von Herrn Sylvester gefundene Analogie zwischen Quaternionen und Nonionen, worüber weiter unten referirt ist. My.

J. J. Sylvester. A word on nonions. J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Folgende Analogie zwischen Quaternionen und Nonionen wird mitgeteilt. Sollen u, v zwei Matrices zweiter Ordnung sein, die den Multiplicationsbedingungen genügen:

$$vu = -uv,\ u^2 = 1,\ v^2 = 1,$$

so hat man die zu $z+yv+xu$ gehörige Determinante mit dem Ausdruck $z^2+y^2+x^2$ zu identificiren. Dann bilden bekanntlich 1, u, v, $w = uv$ ein Quaternionensystem.

Analog seien u, v zwei Matrices dritter Ordnung; dann ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$vu = \varrho uv, \quad u^3 = 1, \quad v^3 = 1$$

(wo ϱ eine imaginäre dritte Einheitswurzel bedeutet), die, dass die zu $z + yv + xu$ gehörige Determinante den Wert $z^3 + y^3 + x^3$ annimmt; man erhält dann ein System von Nonionen durch folgendes Schema von neun Matrices,

$$\begin{array}{c} 1 \\ u \quad v \\ u^2 \quad uv \quad v^2 \\ u^2v \quad uv^2 \\ u^2v^2. \end{array}$$

Multiplicirt man diese neun Terme mit $1, \varrho, \varrho^2$, so erhält man eine geschlossene Gruppe von 27 Gliedern, analog der Gruppe

$$\pm 1, \pm u, \pm v, \pm uv.$$

My.

C. S. Peirce. On a class of multiple algebras. J. Hopkins Circ. II. 3.

No.

Capitel 3.

Elimination und Substitution, Determinanten, symmetrische Functionen.

Ch. Biehler. Sur l'élimination. Nouv. Ann. (3) I. 529-542.

Aus den beiden Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ vom m^{ten} und n^{ten} Grade wird, ähnlich wie bei Bézout, ein System von Gleichungen hergestellt, deren Determinante Δ sein mag; $\Delta_{\mu\nu}, \dots$ bezeichne die Subdeterminanten von Δ. Es werden dann mit Hülfe dieser Bildungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür gegeben, dass f, φ eine und nur eine, zwei und nur zwei u. s. w. Wurzeln gemeinsam haben; mit denselben Hülfs-

mitteln werden die Gleichungen ersten, zweiten u. s. w. Grades aufgestellt, welche jene gemeinsamen Wurzeln liefern.

No.

E. Netto. Substitutionentheorie und ihre Anwendungen auf die Algebra. Leipzig. Teubner.

Bei der weitgreifenden Bedeutung einerseits, welche die Theorie des als Gruppenbildung bezeichneten Algorithmus für die verschiedensten Gebiete der Mathematik, Algebra, Functionentheorie, Zahlentheorie und Geometrie allmälich gewonnen hat und voraussichtlich noch in höherem Masse gewinnen wird, bei der Wichtigkeit der Untersuchungen andererseits über die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen, die man Lagrange, Cauchy Gauss, Abel, Galois, Kronecker, Jordan u. A. verdankt, erscheint es wohl auch weiteren mathematischen Kreisen als ein Bedürfnis, sich mit der Substitutionentheorie überhaupt und gleichzeitig mit ihren Anwendungen auf die algebraischen Gleichungen vertraut zu machen, zumal jene allgemeine Theorie bei der ihr anhaftenden Abstractheit im Hinblick auf diese Anwendungen eine concrete Basis gewinnt, die sie dem Verständnis näher bringt. Zu den, bisher publicirten diesbezüglichen literarischen Hülfsmitteln, von denen die 4te Abteilung von Serret's „Höherer Algebra" und C. Jordan's „Traité des substitutions et des équations algébriques" und die kürzeren, nur zur Einführung in den Gegenstand bestimmten Abhandlungen von Jordan (Commentaire sur Galois, Clebsch Ann. I. 145 ff. cf. F. d. M. II. 1869. 40 f.) und Netto (Einleitung in die Theorie der Substitutionen und ihrer Anwendungen, Grunert Arch. LXII. 225 ff. cf. F. d. M. X. 1878. 102 f.) erwähnt seien, tritt als neues das vorliegende Werk des letztgenannten. Dasselbe ist durch seine klare und dabei knappe Darstellungsweise, namentlich aber auch durch ein zweckmässiges Hervorheben der einzelnen zu behandelnden Fragen und ihres Zusammenhangs besonders geeignet, Studirende, denen die ersten Sätze der Zahlentheorie und die Elemente der Algebra bekannt sind, in die genannten Forschungsgebiete einzuführen. Auf Anschauungen

ruhend, wie sie Herr Kronecker seinen Universitätsvorlesungen nd seinen Abhandlungen zu Grunde legt, unterscheidet es sich urch den Gang im Allgemeinen und in vielen Einzelheiten von len oben genannten früheren ausführlichen Arbeiten, so dass es uch das Interesse des mit der Theorie bereits Vertrauten in Anspruch nehmen dürfte.

Das Buch zerfällt in zwei Abschnitte, von denen der erste die Theorie und der zweite ihre Anwendungen auf die Algebra enthält. Um der Entwickelung der Theorie einen greifbaren Untergrund zu geben und zum Zweck der Vereinfachung der Beweise und der Präzisirung der Anschauungen und Hauptfragen werden von vornherein die ganzen Functionen mit in das Bereich der Betrachtung gezogen. Ausgegangen wird von den symmetrischen Functionen und zunächst gezeigt, dass sich der Begriff der Symmetrie der Gestalt mit dem der Einwertigkeit deckt. Es folgt der Nachweis ihrer Darstellbarkeit als ganzer Functionen der „elementaren symmetrischen Functionen“ auf Grund der Newton'schen Formeln, ferner der Nachweis, dass diese Darstellung nur auf eine Weise möglich ist (nach Gauss), sowie ein Verfahren, dieselbe wirklich auszuführen; als Beispiel dient die Berechnung einer Discriminante. An den Begriff der Discriminante wird die Herleitung der Euler'schen Formeln geknüpft. Die Behandlung der mehrwertigen Functionen wird mit der der zweiwertigen, als dem einfachsten Falle, begonnen und in einer Weise durchgeführt, die nicht bloss für das Verständnis der allgemeinen Theorie der mehrwertigen Functionen vorbereitet, sondern auch die Richtschnur für die fernere Fragestellung und den Fortgang der Entwickelungen liefert. Im Laufe dieser speciellen Untersuchung bietet sich die Gelegenheit, den Begriff der Substitution einzuführen bei Herleitung einer Eigenschaft derselben (die Constanz des graden oder ungraden Charakters bezüglich der Anzahl der Transpositionen, aus denen sie sich zusammensetzen lässt, betreffend) und den Vorteil anzudeuten, den die gleichzeitige Betrachtung ganzer Functionen für Beweise substitutionen-theoretischer Sätze gewährt. (1. Cap.) Das 2te Capitel beginnt mit den verschiedenen Darstellungsweisen der Substitution, von denen die durch Cyklen als die zweckmässigste er-

scheint, weswegen dies auch in dem ganzen Werke fast ausschliesslich zur Verwendung kommt. Die Anwendung aller möglichen Substitutionen auf eine beliebige Function führt dann zu dem Begriff der Zusammensetzung (Multiplication) und dem der Substitutionengruppe. Daran knüpft sich die Untersuchung des wichtigen Zusammenhangs, der zwischen den mehrwertigen Functionen und den Gruppen besteht, und die Angabe verschiedener Hülfsmittel zur Bildung von Functionen, die zu gegebenen Gruppen „gehören". Im Uebrigen handelt es sich in diesem Capitel um die Construction und die Eigenschaften der einfachsten und wichtigsten Gruppen (symmetrische, alternirende, Gruppe der Potenzen einer oder zweier Substitutionen und der Producte derselben u. a., endlich Gruppe, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist). Das 3[te] Capitel ist dem substitutionen-theoretischen und algebraischen Zusammenhang gewidmet, der zwischen den einzelnen Werten einer mehrwertigen Function besteht. Begonnen wird mit der wichtigen Anordnung sämmtlicher Substitutionen oder derer einer beliebigen Gruppe in eine entsprechende Tabelle, die zunächst den Zusammenhang zwischen Werteanzahl und Gruppenordnung darlegt und weiter die substitutionen-theoretischen Sätze über die Beziehung zwischen den Ordnungszahlen mehrerer Gruppen liefert. Die gleichzeitige Betrachtung der Gruppen, welche zu den verschiedenen Werten einer mehrwertigen Function gehören, führt einerseits auf den Begriff der ähnlichen Functionen und den der Transformation, woran die Ableitung des Cauchy-Sylow'schen Satzes geknüpft wird, andererseits auf die Erörterung der Frage, ob diese Gruppen ausser der identischen noch andere Substitutionen gemein haben können. Ausser der Aufstellung der Gleichung für die mehrwertigen Functionen enthält dieses Capitel noch eine Untersuchung über die Discriminante der zu einer Gruppe gehörigen Functionen (cfr. F. d. M. XII. 1880. p. 60 ff.) und die Behandlung der für die algebraische Auflösbarkeit der Gleichungen wichtigen Frage nach mehrwertigen Functionen, von denen eine Potenz einwertig ist. Das 4[te] Capitel ist ausführlichen Untersuchungen besonderer Eigenschaften von Gruppen, der Transitivität, Primitivität, der einfachen und

zusammengesetzten und der isomorphen gewidmet, in Betreff deren Referent auf das Buch selbst verweisen muss. Sodann wird (5. Cap.) die Frage nach den algebraischen Beziehungen zwischen Functionen derselben Gruppe aufgenommen und die Theorie der „Gattungen algebraischer Functionen" und der „enthaltenen Gattungen" entwickelt. An die Behandlung der Aufgabe, eine mehrwertige enthaltende Function durch eine wenigerwertige enthaltene Function auszudrücken, knüpft sich die specielle für die Anwendungen wichtige Frage, unter welcher Bedingung jene eine genaue Potenz dieser wird. Das Capitel schliesst mit dem Nachweise, der für die Möglichkeit der Darstellung einer Function durch eine zu derselben Gattung gehörige von Belang ist, dass es auch bei beliebigen Beziehungen zwischen den Elementen, ausgenommen die Gleichheit zweier, in jeder Gattung Functionen giebt, deren Determinante von Null verschieden ist. Während für die Existenz mehrwertiger Functionen bis dahin nur vereinzelte Beispiele aufgetreten waren, nimmt das 6te Capitel eine umfassendere Untersuchung der Frage nach den möglichen Anzahlen der Werte von Functionen auf; dieselbe wird zunächst auf die nach der Existenz von Gruppen reducirt, welche Substitutionen mit einer gewissen Minimalzahl von Elementen besitzen. Dann werden die diesbezüglichen Sätze von Serret u. A. und namentlich der allgemeine Satz von Jordan (cfr. F. d. M. X. 1878. p. 101) abgeleitet. Das 7te Capitel giebt Untersuchungen über besondere Arten von Gruppen, wie sie für die Anwendung auf algebraische Fragen sich als notwendig erweisen, und zwar zunächst über die Gruppen Ω, d. h. diejenigen transitiven Gruppen, bei denen Grad und Ordnung einander gleich sind, und auf welche bereits die Untersuchung der isomorphen Gruppen im 4ten Cap. geführt hatte. Da jede „Classe" von Gruppen, d. h. die Gesammtheit aller einstufig isomorpher transitiver Gruppen einen und auch nur einen Typus einer Gruppe Ω enthält, so liefert die Aufstellung aller Typen der Gruppen Ω des Grades und der Ordnung r die Repräsentanten aller zu r gehörigen Classen und damit auch die Anzahl derselben; einen Typus bildet die durch die Potenzen einer Circularsubstitution gebildete „cyklische Gruppe"; im Ganzen ergeben

sich drei Typen von Gruppen Ω. Ferner werden betrachtet jenigen Gruppen, die höchstens ein Element ungeändert la besonders die metacyklische und halbmetacyklische Gruppe. Substitutionen der behandelten Gruppen lassen sich einfach stellen durch die Angabe der Indicesänderungen der Elen diese Bemerkung führt weiter auf die linearen gebrochenen stitutionen (mod. p) und zu Gruppen des Grades $p+1$ un Ordnung $p(p^2-1)$. Den Schluss des Capitels bilden die Gr deren Substitutionen unter einander vertauschbar sind. Im Capitel wird dann noch kurz auf die im vorigen Capitel berührte analytische Darstellung der Substitutionen eingeg und die geometrischen und arithmetischen Substitutionen u lineare Gruppe behandelt.

Der zweite Abschnitt beginnt mit der Auflösung der chungen der ersten vier Grade unter Heranziehung von im Abschnitte abgeleiteten Eigenschaften der mehrwertigen tionen und dient als Vorbereitung für das Folgende. D nauere Präcisirung der Fragestellung für die Auflösung Gleichungen beliebigen Grades zeigt zunächst, dass die findung sämmtlicher Wurzeln der Gleichung die Aufsu nur einer einzigen Wurzel der „Galois'schen Resolv gleichung" erfordert. Die letztere giebt Gelegenheit, au Begriff „specieller" Gleichungen überhaupt einzugehen, wora die Einführung der für die Specialität charakteristischen, „a kannt angesehenen Functionen-Gattung" resp. „Gruppe der chung" knüpft. Vorläufig werden von der letzteren nur Haupteigenschaften nachgewiesen, nämlich die charakterist Eigenschaften der Gruppe der irreductibeln und derjenigen chungen, deren Wurzeln rationale Functionen einer belie unter ihnen sind. Sodann wird die Gruppe der Galois'sche solventengleichung von allgemeinen und „speciellen" Gleich behandelt, der Begriff der „Resolvente" verallgemeinert u die Besprechung der Bedeutung der Auflösung der allgem Resolventengleichung für die Auflösung der ursprünglichen chung als Anwendung eine kurze Auseinandersetzung der Lagr schen Reduction geknüpft. (9. Cap). Als Grundlage und

reitung für die allgemeine Theorie sind die nächsten drei
pitel zu betrachten, welche nach der Reihe den Kreisteilungs-,
n Abel'schen und denjenigen Gleichungen, bei denen rationale
ziehungen zwischen drei Wurzeln bestehen, speciell den Galois'-
en und den Tripelgleichungen gewidmet sind. Hierbei wird
Anwendung der Substitutionentheorie durch die von vornherein
ebenen rationalen Wurzelrelationen, welche diese Gleichungen
rakterisiren, ohne weiteres ermöglicht. Beim Uebergang zu
emeinen algebraischen Untersuchungen aber ist nun zunächst
Frage zu erledigen, ob die Substitutionentheorie, die lediglich
rationale Functionen anknüpft, auch bei Aufgaben, wie der
algebraischen Auflösung von Gleichungen verwendbar ist.
kann nur auf algebraischem Wege geschehen; daher ist das
Capitel im Wesentlichen arithmetischen Betrachtungen gewid-
Nach Einführung des Begriffs des Rationalitätsbereiches
dem der zugehörigen Functionen, wird mittels eines wich-
Hülfssatzes eine Normalform für dieselben gewonnen
die eigentümliche Form der Wurzeln algebraisch auflösbarer
chungen festgestellt; der Umstand, dass die hierin auftreten-
irrationalen Functionen der Coefficienten rationale Functionen
Wurzeln selbst sind, beseitigt dann den oben erwähnten
ifel. Daran knüpft sich der Nachweis der Unauflösbarkeit
emeiner Gleichungen von höherem als dem 4ten Grade. Dann
noch tiefer in das Wesen der Darstellung der Wurzeln
sbarer Gleichungen eingedrungen und als Anwendung der
erhalten, dass jede irreductible auflösbare Gleichung eines
zahlgrades eine Galois'sche oder Abel'sche Gleichung sein
. Im 14ten Capitel folgt die eingehende Untersuchung der
ppe einer Gleichung. Es wird gezeigt, wie sich die Eigen-
ichkeiten der Gruppe, wie Transitivität und Imprimitivität, in
valente algebraische Eigenschaften der Gleichung selbst um-
n lassen; die Eigenschaft des Zusammengesetztseins erfordert
ührliche Untersuchungen, namentlich über die Galois'sche
lvente. Der Nachweis, dass die Auflösung aller zu derselben
ppe gehörigen Gleichungen durch die einer einzigen unter
gegeben wird, rechtfertigt schliesslich die Uebertragung

des Begriffs der Auflösbarkeit von Gleichung auf Gruppe. Weiter handelt es sich um die Reduction einer zusammengesetzten Gleichung und die Zerfällung derselben in rationale Factoren. Der Schluss des Capitels beschäftigt sich mit dem Nachweise, dass die Beschränkung, wonach in allen den vorangehenden Untersuchungen der gegebenen Gleichung immer nur rationale Functionen der Wurzeln der Gleichung selbst adjungirt wurden, nu eine scheinbare ist, insofern ebensowenig die Adjunction de Wurzeln einer neuen Gleichung, deren Coefficienten demselbe Rationalitätsbereich angehören, wie die der ursprünglichen, a die Annahme, dass die Wurzeln beider Gleichungen einer in de selben rationalen Relation genügen, eine Erweiterung liefert. I (15.) Schlusscapitel wird zu der gruppentheoretischen Behandlu der auflösbaren Gleichungen übergegangen. Es werden die für d Auflösbarkeit charakteristischen Eigenschaften der Gruppe d Gleichung in mancherlei Formen festgestellt, an die sich eini Anwendungen knüpfen. Für den allgemeinen Fall, dass d Grad der Gleichung verschiedene Primfactoren besitzt, wird d Abel'sche Reductionsverfahren auseinandergesetzt. Der Fall fern dass der Grad eine Primzahlpotenz p^k ist, kann noch durch Voraussetzung beschränkt werden, dass die Gruppe der Gleichu imprimitiv sei. Hierfür wird dann der Charakter der Grup festgestellt. Der specielle Fall $k = 1$ führt auch auf diese Wege zu dem früher durch die algebraische Methode geliefert Satz über die Natur der auflösbaren Gleichungen (s. oben) von ein Primzahlgrade. Der Fall $k = 2$ liefert die Sätze, die Herr Jord (Liouv. J. (2) XIII. p. 111 ff.) angegeben hat. Schliesslich wi noch auf die rationale Darstellbarkeit der Wurzeln einer au lösbaren primitiven Gleichung vom Grade p^k durch eine bestimm Anzahl unter ihnen eingegangen. (Eine Berichtigung zu p. Zusatz II. des Buches findet man in Klein Ann. XXII. p. Fussnote).

T.

E. Schröder. Ueber die Anzahl der Substitutione welche in eine gegebene Zahl von Cyklen zerfalle

Hoppe Arch. LXVIII. 353-378.

Bestimmung der Anzahl aller Substitutionen von n Elementen, welche den Grad n besitzen; Recursionsformeln hierfür. Anzahl der Substitutionen von n Elementen, welche r bestimmte Elemente umsetzen, nebst Methode ihrer Aufstellung. Anzahl der Substitutionen von n Elementen, welche vom Grade r sind. Anzahl der Substitutionen, welche eine bestimmte Zahl von Cyklen besitzen. Die Anzahl derjenigen der $n!$ Substitutionen von n Elementen, welche in k Cyklen zerfallen, ist gleich der Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen zur $(n-k)^{\text{ten}}$ Klasse aus den Elementen $1, 2, 3, \dots n-1$. No.

W. Dyck. Gruppentheoretische Studien. Habilitationsschrift. Leipzig. Teubner. Klein Ann. XX. 1-45.

Eine Substitution A_i wird als irgend welche Operation definirt, die auf das mit 1 bezeichnete Object angewendet werden soll. Sind m solcher Operationen $A_1, A_2, \dots, A_m$ gegeben, so entsteht durch Iteration und Combination derselben eine Gruppe. Besitzen die A keine Perioden und bestehen zwischen ihnen keine Relationen, so erhalten wir die allgemeinste Gruppe G von m Substitutionen; ihre Ordnung ist unendlich gross. Durch Einführung von A_n mittels der Gleichung $A_1 A_2 \dots A_m A_n = 1$ kann man die negativen Exponenten bei den A vermeiden. Ein Polygonnetz kann die Gruppe geometrisch darstellen; der Uebergang von einem Polygon zu einem anderen repräsentirt eine Substitution, welche im Sinne der Analysis situs das Netz in sich selbst überführt. Durch irgend welche Relationen, die stets in die Form $F(A_1, \dots, A_m) = 1$ gebracht werden können, hebt sich aus der allgemeinen eine besondere Gruppe G' heraus; G und G' lassen sich isomorph auf einander beziehen. Der Herr Verfasser legt principiellen Wert darauf, die Gruppen G' durch blosse Kenntnis einer Anzahl von Beziehungen zwischen den erzeugenden Substitutionen zu definiren. Geometrisch betrachtet spaltet die isomorphe Zuordnung von G und G' das unendliche Netz in eine Reihe von äquivalenten Gebieten, deren jedes der Gruppe G' entspricht; die Ränder eines solchen Gebietes sind einander paarweise zu-

geordnet; heftet man sie in der dadurch bestimmten Verbindung an einander, so erhält man ein geschlossenes Netz als Bild von G. Bei endlichen Gruppen müssen für die A Perioden bestehen; man hat also die Relationen

$$\text{(I)} \qquad A_i^{\nu_i} = 1, \quad \prod_i A_i = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots m, n)$$

und für jede so definirte Gruppe lässt sich in dem unendlichen Netz ein einfach zusammenhängendes Fundamentalpolygon construiren, dessen Ränder einander paarweise zugeordnet sind. Zu den Beziehungen (I) können noch Relationen

$$\text{(II)} \qquad P_h(A_1, A_2, \ldots) = 1$$

hinzutreten. Die hiernach geschlossene Fläche giebt durch ihren Zusammenhang der Gruppe ein bestimmtes Geschlecht p. Für $p = 0$ ergeben sich fünf Gruppen, deren eine, die Ikosaedergruppe, wie übrigens Hamilton schon angiebt, durch

$$A_1^5 = 1, \quad A_2^3 = 1, \quad A_3^2 = 1, \quad A_1 A_2 A_3 = 1$$

bestimmt ist. Dies ergiebt beispielsweise: Setzt man irgend welche krummlinigen Dreiecke a_1, a_2, a_3 derart aneinander, dass in den Ecken a_1 je zehn abwechselnd schraffirte und weisse Dreiecke zusammenstossen, in den Ecken a_2 je sechs, in den Ecken a_3 je vier, so enthält das entstehende Netz unter allen Umständen nur 60 Dreiecke jeder Art, welche die ganze Ebene ausfüllen. Es werden einige Bemerkungen über Fälle von $p = 1$ und über die Gruppe der Modulargleichung für Primzahltransformationen gemacht.

No.

F. Brioschi. Sur les fonctions de sept lettres. C. R. XCV. 665-669, 814-817, 1254-1257.

Es ist nicht möglich, ein eingehendes Referat über diese, hauptsächlich Formeln bietende Arbeit zu geben. Es muss genügen, den Inhalt kurz zu charakterisiren als zur Theorie der 30-werthigen Functionen von sieben Elementen, sowie zur Verbindung derselben mit den Modulargleichungen achten Grades gehörig.

No.

ɪLVESTER. Sur les puissances et les racines de tutions linéaires. C. R. XCIV. 55-59.

r der „reciproken Determinante" einer gegebenen anrstehen wir diejenige, welche die reciproke Substitution die zweite dargestellten Substitution repräsentirt. Addirt den Diagonalhauptgliedern einer Determinante $-\lambda$, so ›ine Function von λ, deren Wurzeln als „λ-Wurzeln der ante" bezeichnet werden sollen. Dann gelten folgende ie λ-Wurzeln der Reciproken sind die reciproken Werte urzeln der Determinante; die k^{ten} Potenzen (k als comel angenommen) der λ-Wurzeln einer Determinante sind mit den λ-Wurzeln der k^{ten} Potenz der Determinante. ergiebt sich eine Lösung des Problems: die k^{te} Potenz ebenen Substitution zu finden. No.

ɪION. Introduction à la théorie des déterminants. . Paris. Gauthier-Villars. 8°.

eser kleinen Schrift sind die allgemeinen Eigenschaften rminanten, sowie ihre Anwendungen auf die Lösung Gleichungen, auf die Elimination zwischen linearen en oder zwischen zwei Gleichungen von höherem ethode von Cauchy und Tschirnhausen) aus einander ge- Determinanten mit zwei oder drei Reihen, ohne Beler Theorie der Inversionen. Im Anfang findet man neine Definition einer Determinante durch Permutationen bolische Producte etc. Mn. (O.).

ER. Die Anfangsgründe der Determinanten in ie und Anwendung. Wiesbaden. Bergmann.

entare Einführung, für das erste Studium geeignet. In itung heisst es: „Die Determinanten geben für den, ıur einigermassen mit ihnen beschäftigt hat, ein klareres

Bild des betreffenden analytischen Ausdrucks, als die algebrai-
sche Entwickelung desselben." Wäre das schön! No.

E. BARDEY. Zur Lehre von den Determinanten. Hoffmann Z. XIII. 111-114, 171-186.

J. DIEKMANN. Determinanten in der Schule. Hoffmann Z. XIII. 356.

GERLACH. Determinanten in der Schule. Hoffmann Z. XIII. 442-443.

Nur von pädagogischem Interesse. No.

TH. MUIR. A treatise of the theory of determinants wit graduated sets of exercices. London. Macmillan.

L. KLUG. Entwickelung des Euler'schen Algorithmu Hoppe Arch. LXVII. 337-342.

Bekanntlich führte Leonhard Euler die im Wesentlichen m einer abgekürzten Determinantendarstellung sich deckende B zeichnung ein:

$$\gamma_1 + \cfrac{1}{\gamma_2 + \cfrac{1}{\gamma_3 + \cdots + \cfrac{1}{\gamma_n}}} = \frac{[\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n]}{[\gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n]}.$$

Herrn Klug scheint nicht bekannt zu sein, dass für diese Alg rithmen eine überreiche Literatur existirt, welche im Wesentlich auch die von ihm im vorliegenden Aufsatze entwickelten Sät in sich begreift. Namentlich giebt es eine Fülle von Regeln z independenten Bildung der Gruppenglieder, die sich grösstente nur im Ausdrucke unterscheiden (Burkhardt, Hauber, Roth Bartholomaei, Minding u. a.). Vermutlich dürfte auch darunt die hier gegebene Vorschrift enthalten sein, welche folgend Wortlaut hat: „Alle Glieder einer Gruppe werden aus dem erst Gliede derselben dadurch gebildet, dass man die Indexe", war

nicht Indices? „vertauscht, und zwar wird ein grader Index nur mit einem von ihm grösseren graden, ein ungrader mit einem von ihm grösseren ungraden Index vertauscht, aber so, dass in jeder Complexion der Indexe dieselben in natürlicher Ordnung seien, d. h. ein höherer Index (Zahl) stehe niemals vor einem niedrigeren.“ Solche Definitionen sollten denn doch, wenn sie auch sachlich richtig sind, heutzutage nicht mehr geleistet werden; wozu haben wir denn das Kunstwort Inversion?

Gr.

G. A. van Veltzer. Answer to query on the transformation of determinants of equal value. Anal. IX. 116-118.

Der Verfasser zeigt, dass eine beliebige Determinante im Allgemeinen nach den gewöhnlichen Regeln in eine äquivalente Determinante derselben Ordnung transformirt werden kann.

Jn. (O.).

T. Muir. The law of extensible minors in determinants. Edinb. Trans. XXX. 1-4.

Als Einleitung stellt der Verfasser folgendes Gesetz „Law of complementaries“ auf. Jedem allgemeinen Satz, welcher die Form einer identischen Gleichung zwischen einer Anzahl von Minoren einer Determinante oder zwischen der Determinante selbst und einer Anzahl ihrer Minoren annimmt, entspricht ein anderer Satz, der aus diesem dadurch hervorgeht, dass man für die Minoren ihre Cofactoren in der Determinante substituirt, und dann jedes Glied mit solchen Potenzen der Determinante multiplicirt, dass die Glieder denselben Grad haben. Er geht sodann zur Aufstellung und Herleitung seines „Law of extensible minors“ über. Wenn eine identische Relation zwischen einer Anzahl von Minoren einer Determinante oder zwischen der Determinante selbst und einer Anzahl ihrer Minoren aufgestellt werden kann, so kann man, wenn die Determinanten mit Hülfe ihrer Hauptdiagonalen bezeichnet werden, stets einen neuen

Satz erhalten, der sich auf eine Entwickelung der nächst höheren Ordnung bezieht, wenn man dem Ende der Diagonale jeder Determinante (einschliesslich der von der Ordnung Null), die in der Identität vorkommt, einen neuen Buchstaben mit einem neuen Index hinzufügt. Cly. (O.).

Th. Muir. On some transformations connecting general determinants with continuants. Edinb. Trans. XXX. 5-12

Die betreffende Transformation ist die einer allgemeinen Determinante in eine solche, welche an allen den Stellen Nullen hat, wo dies bei Sylvester's Kettenbruch-Determinante der Fall ist, d. h. überall, ausgenommen in der Hauptdiagonale und den beiden angrenzenden Minoren. Die resultirenden Sätze lassen Transformationen mittels der Gesetze der Complementären (siehe oben) zu. Auch ergeben sich noch einige interessante Identitäten.

Cly. (O.).

Chrystal. Note on Mr. Muir's transformation of a determinant into a continuant. Edinb. Trans. XXX. 13-14.

Chrystal. On a special class of Sturmians. Edinb. Trans. XXX. 161-165.

Functionen, die wie im Sturm'schen Satz zur Trennung der reellen Wurzeln einer Gleichung dienen, können Sturm'sche Functionen genannt werden. Der Verfasser ist bei Gelegenheit der Bearbeitung physikalischer Fragen darauf gekommen, dass die Eigenschaften symmetrischer Determinanten durch Constructionen einer speciellen Classe Sturm'scher Functionen hergeleitet werden können. Er gelangt so unabhängig und auf verschiedene, sehr einfache Weise zu Resultaten, die mit denen von Joachimsthal in Crelle J. XLVIII. 1854. p. 386 identisch sind. Cly. (O.).

Th. Muir. On circulants of odd order. Quart. J. XVIII. 261-266.

„Circulanten" sind Determinanten der Form

$$|a_{\lambda+\mu}| \qquad (\lambda, \mu = 0, 1 \dots n-1),$$

wenn jeder negative Index durch den kleinsten positiven ersetzt wird, dem er mod. n congruent ist. Es wird gezeigt, dass eine Circulante der Ordnung $2m+1$ als Product aus $(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})$ und einer Determinante m^{ter} Ordnung dargestellt werden kann, deren Elemente in den a cyklisch sind.

No.

G. Torelli. Sui determinanti circolanti. Nap., Rend. XXI. 83-91.

Ueber Circular-Determinanten vgl. F. d. M. X, 113; XI, 119; XII. 111, 116; XIII, 127, 128; sie haben die im vorigen Referate angegebene Form. Es wird gezeigt, dass eine Circulardeterminante der Ordnung $r.m$ als Circulardeterminante der Ordnung m darstellbar ist, deren Elemente Summen von m^{r-1} Subdeterminanten der Ordnung r der gegebenen Determinante sind. Ein ähnlicher Satz gilt für schiefe Circulardeterminanten, d. h. für solche, bei denen die Elemente links von der Hauptdiagonalreihe das negative Zeichen haben. Multiplicirt man die Circulardeterminante der Ordnung $n = m.r$, (wo m, r zu einander prim sind) mit $\sum a_\lambda$, so ist das Product durch dasjenige zweier Circulardeterminanten der Ordnungen r, m teilbar. Aus diesen Sätzen ergeben sich die bisher bekannten als Specialfälle. No.

J. J. Sylvester. On the properties of a split matrix. J. Hopkins Circ. 1882. 210-211.

Die Zeilen einer Determinante, z. B. der siebenten Ordnung, werden in zwei Teile geteilt, deren erster z. B. A, B, C, deren zweiter D, E, F, G umfasst. Unter dem Product BF zweier Zeilen wird die Summe der Producte entsprechender Elemente verstanden. Wenn die Producte jeder Zeile des ersten in jede Zeile des zweiten Teils gleich Null sind, so stehen die adjungirten

vollständigen Subdeterminanten der Matrizen A, B, C und D, E, F, G in constantem Verhältnisse $l:\lambda$. Bezeichnen wir mit Δ die Gesammtdeterminante und mit S, Σ die Summen der vollständigen Subdeterminanten beider Matrizen, dann ist

$$\frac{\lambda}{l} S = \frac{l}{\lambda} \Sigma = \Delta; \; S.\Sigma = \Delta^2.$$

Ist das Product jedes Zeilenpaares für Δ gleich Null, dann wird

$$\lambda^2 : l^2 = (D^2E^2F^2G^2) : (A^2B^2C^2); \; \Delta^2 = A^2.B^2.C^2.D^2 \dots G^2.$$

Sagt man, eine Determinante sei von der „Nullität“ k, wenn sie selbst, nebst allen ihren ersten, zweiten, ...$(k-1)^{\text{ten}}$ Subdeterminanten verschwindet, dann gilt der Satz: Die Nullität des Products einer Anzahl von Matrizen derselben Ordnung ist nicht kleiner als die Nullität eines einzelnen Factors und nicht grösser als die Summe der Nullitäten aller einzelnen Factoren.

No.

F. Caspary. Ueber die Umformung gewisser Determinanten, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Kronecker J. XCII. 123-144.

Herr Caspary geht von einer Auffassung der Determinanten aus, welche den Grassmann'schen Principien entspringt; dieselbe führt in einfachster Weise zu den Umformungen der Kegelschnittdeterminanten, mit denen sich die Herren Hunyady, Mertens, Pasch beschäftigt haben. Den Rechnungen zu Grunde gelegt werden Einheiten $e_1, e_2, \dots, e_r$, zwischen denen die Beziehungen

$$e_a e_a = 0, \; e_a e_b = -e_b e_a, \; e_1 e_2 \dots e_r = 1$$

herrschen; mit denselben werden andere „ergänzende Einheiten“ $E_1, E_2, \dots, E_r$ durch die Bedingungen $e_a E_a = 1$, $e_a E_b = 0$ verbunden. Die Multiplication von Grössen

$$p = p_1 e_1 + p_2 e_2 + \dots + p_r e_r, \dots$$
$$Q = Q_1 E_1 + Q_2 E_2 + \dots + Q_r e_r, \dots,$$

worin die $p_1, p_2, \dots$; $Q_1, Q_2, \dots$ Zahlengrössen bedeuten, führt

nn sofort auf Beziehungen, durch welche die gewünschten Um-
mungen leicht geliefert werden. No.

. H. Mitchell. Note on determinants of powers.
Sylv., Am. J. IV. 341-345; J. Hopkins Circ. 1882. 242.

Besprechung der Quotienten zweier Determinanten, welche rjenigen ähnlich gebildet sind, durch welche die zweite Wurzel s der Discriminante von n Grössen geliefert wird. No.

. W. Davis. The maximum value of a certain determinant. J. Hopkins Circ. 1882. 22-23.

Wenn die Elemente einer Determinante, deren Ordnung zwei ersteigt, zwischen $-a$ und $+a$ variiren können, so besitzt eselbe ein numerisches Maximum für die Annahme, dass alle lemente der Hauptdiagonale $-a$, die übrigen gleich $+a$ gesetzt erden. Dieselbe Frage wird für drei- und für vier-dimenonale Determinanten behandelt. No.

. Puchta. Ein neuer Satz aus der Theorie der Determinanten. Wien. Gerold's Sohn.

. Řehořovský. Ueber Borchardt's erzeugende Function.
Cas. XI. 111-121. (Böhmisch).

Führt man die symbolische Bezeichnung ein:

$$T = \Sigma \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{t_2 - \alpha_2} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_n},$$

die t beliebige Grössen, die α hingegen die Wurzeln der ichung

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

leuten, und bildet man die Determinanten

$$D = \Sigma \pm \frac{1}{(t_1 - \alpha_1)^2} \cdots \frac{1}{(t_n - \alpha_n)^2},$$

$$\Delta = \Sigma \pm \frac{1}{t_1 - \alpha_1} \cdots \frac{1}{t_n - \alpha_n},$$

so ist bekanntlich

$$D = \Delta T.$$

Dies wird hier auf möglichst einfache Weise bewiesen, wie der Vergleich mit Cayley's Herleitung zeigt. Dieselbe neue Entwickelung findet sich auch an entsprechender Stelle von des Verfassers „höhererAlgebra“ (I. Teil) eingereiht, wie später berichtet werden wird. Std.

R. F. Scott. On some determinants whose elements are rational fractions. Mess (2) XI. 165-172.

Sind in den Determinanten die Elemente mit Ausnahme der äusseren Reihe oder Colonnen ausgewertet, so sind sie allgemein von der Form $\frac{1}{x_m - \alpha_n}$. Es wird ferner bewiesen, dass, wenn eine Determinante der Ordnung nr gebildet ist aus n Gruppen von r Reihen, deren i^{te} Gruppe

$$\begin{matrix} (x_i-\alpha_1)^{-1}, & (x_i-\alpha_2)^{-1}, \ldots (x_i-\alpha_{nr})^{-1} \\ (x_i-\alpha_1)^{-2}, & (x_i-\alpha_2)^{-2}, \ldots (x_i-\alpha_{nr})^{-2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (x_i-\alpha_1)^{-n}, & (x_i-\alpha_2)^{-n}, \ldots (x_i-\alpha_{nr})^{-n} \end{matrix}$$

ist, der Wert der Determinante gleich

$$\frac{\{\zeta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2, \ldots x_n)\}^{r^2}\, \zeta^{\frac{1}{2}}(\alpha_{nr}, \alpha_{nr-1}, \ldots \alpha_1)}{\{f(x_1)\, f(x_2) \ldots f(x_r)\}^r},$$

wo

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{nr})$$

ist. Glr. (O.).

Walecki. Équation en s de degré m et décomposition d'une forme quadratique en carrés. Nouv. Ann. (3) I. 401-410, 556-561.

Vermindert man in der symmetrischen Determinante D_1 mit reellen Elementen diejenigen der Hauptdiagonale um s, so entstehe die Determinante D vom Grade m. Wenn D_1 die Discriminante einer quadratischen Form $f(x, y, \ldots z)$ ist, wird D die von $f(x, y, \ldots z) - s(x^2 + y^2 + \cdots + z^2)$. Hierauf gründen sich ein-

he Beweise über die Realität und die Multiplicität der Wurn s von $D = 0$ und über ihre Beziehung zu der Zerlegung n $f - s(x^2 + y^2 + \cdots z^2)$ in eine Summe von Quadraten. Wir erihnen beispielshalber den folgenden Satz: Bei der Zerlegung von

$$f(x, y, \dots z) - \sigma.(x^2 + y^2 + \cdots + z^2)$$

Quadrate, giebt es so viele positive Vorzeichen, als $D = 0$ urzeln hat, welche grösser sind als σ. Aus der Gleichung in s ird die lineare orthogonale Substitution abgeleitet, welche die quaatische Form in eine Quadratsumme umwandelt. No.

. Legoux. Sur une application d'un déterminant. Quart. J. XIX. 41-44.

Die Gleichungen dritten und vierten Grades werden dadurch elöst, dass ihre Polynome mit den Circulanten

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \\ a_2 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & x \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & x & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & x & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & x \end{vmatrix}$$

lentificirt werden. No.

. Muir. On a determinant formed by bordering the product of two determinants. Mess. (2) XI. 161-165.

Nimmt man zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

und bildet ihr Product

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3, & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3, & a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3, & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3, & b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3, & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3, & c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

und bezeichnet dies Product mit

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

so ist die betrachtete Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 \\ a_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ b_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ c_0 & C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Glr. (O.).

Th. Muir. On a symmetric determinant connected with Lagrange's interpolation problem. Lond., M. S. Proc. XIII. 156-161.

Es sei

$$L_n = \left| \sin \frac{\lambda.\mu}{n+1} \pi \right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ergiebt sich z. B.

$$L_n = \left[\frac{1}{2}(n+1)\right]^{\frac{n}{2}},$$

$$L_{2m} = (-1)^m 2^m \cdot \left| \sin \frac{\lambda.(2\mu-1)}{2m+1} \pi \right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\left| \sin \frac{\lambda.(2\mu-1)}{2m+1} \pi \right| = \left| \sin \frac{\lambda.\mu}{2m+1} 2\pi \right|.$$

In ähnlicher Weise erhält man für

$$M_n = \left| \cos \frac{\lambda.\mu}{n+1} \pi \right| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Resultate

$$M_{2n+1} = 0, \quad M_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(2n+1)\right]^{n-1},$$

$$\left| \cos \frac{\lambda.\mu}{2m+1} \pi \right| = (-1)^m 2^m \left| \cos \frac{\lambda.(2\mu-1)}{2m+1} \pi \right|$$

$$(\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

u. s. w. No.

Th. Muir. Note on the condensation of skew determinants, which are partially zero-axial. Lond., M. S. Proc. XIII. 161-164.

Die behandelten Determinanten entstehen, wenn man in

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots \\ -a_2 & x_2 & b_3 & b_4 \dots \\ -a_3 & -b_3 & x_3 & c_4 \dots \\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & x_4 \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

r Reihe nach $x_1 = 0$; ferner $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; u. s. w. setzt.

No.

. F. Scott. **Notes on determinants.** Mess. (2) XII. 105-118.

Der Verfasser betrachtet zuerst die Determinante n^{ter} Ordnung:

$$\begin{vmatrix} x_1 \;, & \alpha_1+\beta_2, & \alpha_1+\beta_3, \dots \\ \alpha_2+\beta_1, & x_2 \;, & \alpha_2+\beta_3, \dots \\ \alpha_3+\beta_1, & \alpha_3+\beta_2, & x_3 \;, \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

eren Elemente gegeben sind durch die Gleichungen

$$a_{iii} = x_i, \quad a_{ijk} = \alpha_i+\beta_j+\gamma_k;$$

rner die Determinante 4ter Klasse, deren Elemente gegeben nd durch

$$a_{iiii} = x_i, \quad a_{ijkl} = \alpha_i+\beta_j+\gamma_k+\delta_l,$$

. s. w. Sie werden mit Hülfe alternirender Zahlen ausgewertet. n Weiteren beschäftigt sich der Verfasser mit geometrischen 'ragen, welche ihn zur Betrachtung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 \;, & (\alpha_1+\alpha_2)^2, & (\alpha_1+\alpha_3)^2, \dots (\alpha_1+\alpha_n)^2, & 1 \\ (\alpha_2+\alpha_1)^2, & 0 \;, & (\alpha_2+\alpha_3)^2, \dots (\alpha_2+\alpha_n)^2, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (\alpha_n+\alpha_1)^2, & (\alpha_n+\alpha_2)^2, & (\alpha_n+\alpha_3)^2, \dots \quad 0 \;, & 1 \\ 1 \;, & 1 \;, & 1 \;, \dots \quad 1 \;, & 0 \end{vmatrix}$$

'ühren, und welche nebst einigen anderen ähnlichen ausgewertet wird.

Glr. (O.).

V. E. Serdobinsky. Zur Determinantentheorie. Mosk. S X. Lief. 1. (Russisch).

Es wird hier ein Schachspielproblem ohne Anwendung der Determinanten-Theorie gelöst, das von Günther in seinem „Lehr-

buch der Determinanten-Theorie", 2. Aufl. S. 545, und auch von Glaisher (On the problem of the eight queens. Philosoph. Mag. 1874. December) betrachtet worden ist. Ty.

A. Sachse. Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. Hoppe Arch. LXVIII. 427-432.

Aehnlich wie Herr E. Lucas (vgl. F. d. M. IX. 1877. 113) stellt Herr Sachse mit Hülfe einer „Differenzengleichung" die Euler'schen und die Bernoulli'schen Zahlen als Determinanten her, deren Elemente Facultäten der ganzen Zahlen sind. Durch Entwickelung nach Subdeterminanten ergeben sich Recursionsformeln. No.

N. Jadanza. Sopra un determinante gobbo che si presenta nello studio dei cannocchiali. Torino, Atti. XVII. 714-723.

Ableitung einiger Resultate aus der Theorie der Dioptrik mit Hülfe der bekannten hierbei auftretenden Kettenbruchdeterminante. No.

R. F. Scott. On some forms of cubic determinants. Lond., M. S. Proc. XIII. 33-43.

Es werden cubische Determinanten nach besonders einfachen Bildungsgesetzen aufgestellt und berechnet. 1) Es sind $n-m$ Lagen unter einander gleich, ebenso die m übrigen unter sich; 2) alle Elemente sind Null, ausgenommen diejenigen der drei Diagonalebenen; 3) aus der ersten Lage werden die übrigen durch einfache lineare Combinationen mit constanten Grössen gebildet u. s. w. No.

KRONECKER. Die Subdeterminanten symmetrischer ysteme. Berl. Ber. 1882. 821-824.

Zwei Systeme von je n^2 Grössen

$$a_{ik},\ a'_{ik} \qquad (i,k=1,2,\dots n)$$

sen reciprok, wenn $\sum_i a_{hi}\, a'_{ik}$ für $h=k$ den Wert 1, sonst den rt Null hat. Zwei Systeme entsprechender Subdeterminanten reciproken Systemen sind selbst einander reciprok, und da h das System der adjungirten Subdeterminanten, dividirt durch Determinante, das reciproke eines Subdeterminantensystems so ist die Adjungirte einer jeden Subdeterminante, dividirt ch die Determinante, gleich der entsprechenden Subdetermi- te des reciproken Systems. Ist das System (a_{ik}) symmetrisch, setzt man

$$U_{ik} = \sum_{g,h} a_{gh}\, u_{gi}\, u_{hk} \qquad (g,h,i,k=1,2,\dots n),$$

n ist jene Summe von Subdeterminanten-Producten

$$|a_{gh}|\cdot|u_{gi}|\cdot|u_{hk}|.$$

schen den verschiedenen Ausdrücken $|u_{gi}|\cdot|u_{hk}|$, bei denen

$$g=g_1,\dots g_m;\ h=h_1,\dots h_m;\ i,\ k=1,\ 2,\dots m$$

l, existiren genau dieselben linearen Relationen, wie zwischen $|a_{gh}|$, falls die a als unbestimmte Grössen betrachtet werden. die Subdeterminanten $|U_{ik}|$ $(i=i_1,\dots i_m;\ k=k_1,\dots k_m)$ ebt sich die wesentliche Eigenschaft, dass sie als lineare logene Functionen der sämmtlichen von einander linear-unab- gigen Subdeterminanten des Systems (a_{ik}) darstellbar sind, so s die Coefficienten von einander linear-unabhängige ganze ıctionen der Unbestimmten u_{ik} sind.

Zwischen den Subdeterminanten allgemeiner symmetrischer teme bestehen folgende identische lineare Relationen

$$|a_{gh}| = \sum_r |a_{ik}| \qquad (r=m+1,\dots 2m),$$

$$(g=1,\dots m;\ h=m+1,\dots 2m),$$

$$(i=1,\dots m-1,\ r;\ k=m+1,\dots r-1,\ m,\ r+1,\dots 2m).$$

No.

C. Runge. Die linearen Relationen zwischen den verschiedenen Subdeterminanten symmetrischer Systeme. Kronecker J. XCIII. 319-328.

Es wird gezeigt, dass jede zwischen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung von symmetrischen Determinanten bestehende lineare Gleichung, deren Coefficienten von den a_{ik} unabhängig sind, aus den eben angeführten Kronecker'schen Relationen durch lineare Verbindung abgeleitet werden könne. Die Anzahl der linear unabhängigen Subdeterminanten m^{ter} Ordnung beträgt nur den $\frac{1}{2}(m+1)^{ten}$ Teil aller vorhandenen; es wird eine Methode zu ihrer Aufstellung gegeben.

Unter den Subdeterminanten eines System $a_{ik} = -a_{ki}$ besteht keine lineare Relation. No.

C. Kostka. Ueber den Zusammenhang zwischen einigen Formen von symmetrischen Functionen. Kronecker J. XCIII. 89-124.

Die Arbeit ist eine Fortsetzung der B. IX, S. 318 besprochenen. Es handelt sich um die Ueberführung dreier Functionsformen T, K, C in einander, wobei sechs Aufgaben: T, K; T, C;... vorliegen. Die Formen sind

$$T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \Sigma\, t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \dots t_n^{\alpha_n};$$

hier ist die rechte Seite die ganze homogene symmetrische Function der t, welche aus dem ersten Gliede durch Permutation der Exponenten abgeleitet wird; ferner

$$K_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r} = c_{\beta_1} c_{\beta_2} \dots c_{\beta_r};$$

hier ist c_β die Summe der Combinationen der t zur β^{ten} Classe ohne Wiederholung; endlich ist

$$C_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_r} = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1} & c_{\lambda_1+1} \dots c_{\lambda_1+r-1} \\ c_{\lambda_2-1} & c_{\lambda_2} \quad \dots c_{\lambda_2+r-2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{vmatrix}.$$

Zunächst werden Beziehungen abgeleitet, durch welche die Coefficienten der Entwickelungen bei K, C und C, K auf einander

ucirt werden. Dann wird der Coefficient eines T' in der Auf-
›e T, C durch die Lösung eines combinatorischen Problems
'unden; und hierbei zeigt es sich, dass die Resultate der vier
fgaben, in welche C eingeht, durch eine einzige Quadrattafel
rgestellt werden können. Die successiven Constructionen dieser
fel für die verschiedenen Dimensionen sind einfacher Art; es
rden zugleich mit ihnen auch Proben für die Richtigkeit der
sultate gegeben. Den Schluss bilden kurze Betrachtungen
er die beiden noch fehlenden Aufgaben T, K und K, T.

No.

CROCCHI. Sopra la corrispondenza tra i coefficienti di un' equazione algebrica e le funzioni simmetriche complete. Batt. G. XX. 301-320.

Herr Crocchi untersucht die Aehnlichkeit, welche zwischen
ı Functionen V_p (Vgl. F. d. M. XI. 1879. 116; XII. 1880. 119)
d den Coefficienten a_p einer Gleichung mit den Wurzeln $x_1, x_2, \dots$
steht. Die Formeln für die Darstellung einer symmetrischen
nction $\varphi(x_1, x_2, \dots)$ durch die a_p wie durch die V_p entsprechen
ıander. Es ist

$$\frac{da_i}{ds_p} = 0, \quad \frac{dV_i}{ds_p} = 0 \; (i<p); \qquad \frac{da_i}{ds_p} = -\frac{1}{i}, \quad \frac{dV_i}{ds_p} = +\frac{1}{i} \quad (i = p)$$

s. w. Die Functionaldeterminante der Coefficienten nach den
'urzeln genommen, ist ihrem absoluten Werte nach gleich der
uadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung; für die
Discriminante besteht eine Determinanten-Darstellung durch die
V_p, welche bis auf gewisse Vorzeichen mit derjenigen durch die a_p
identisch ist.

No.

J. HAMMOND. On the calculation of symmetric functions. Lond. M. S., Proc. XIII. 79-84.

Berechnung der symmetrischen Functionen von $(n+1)$ Grössen aus denen von n Grössen.

No.

W. Řehořovský. Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln und der Coefficienten-Combinationen vom Gewichte Elf und Zwölf. Wien. Denkschr. XLVI. 51-58.

Fortsetzung der Tafeln von M. Hirsch und Faà de Bruno. (Die letzteren hat der Herr Verfasser controllirt und dabei nur zwei Druckfehler gefunden.) In einer Einleitung wird die Art der Berechnung dargelegt. No.

W. P. Durfee. Tables of symmetric functions of the twelfthic. Sylv., Am. J. V. 45-62.

Die Einrichtung dieser Tafeln ist nicht so tabellarisch übersichtlich wie diejenige in der soeben besprochenen Arbeit. Nebenbei sei bemerkt, dass Referent bei einer Vergleichung beider an dreizehn Stellen verschiedene Angaben gefunden hat. Eine Controlle der Tafeln wäre daher erwünscht. No.

W. P. Durfee. On symmetric functions. J. Hopkins Circ. II. 23.

Die Durfee'schen Tabellen (s. das vorstehende Referat) sind so eingerichtet, dass alle in der Nebendiagonale befindlichen Coefficienten gleich 1 werden. Es wird gezeigt, wie die Anordnung für die Colonnen und die Zeilen eingerichtet werden muss, damit dies statthabe. Ferner wird eine Ausdehnung der Waring'schen Formel gegeben. No.

F. Franklin. On Crocchi's Theorem. J. Hopkins Circ. II. 24.

J. J. Sylvester. On Crocchi's Theorem. J. Hopkins Circ. II. 2.

Einfache Beweise für das, F. d. M. XII. 1880. 119 besprochene Theorem. Vgl. auch das Referat auf p. 113. No.

Dritter Abschnitt.

Zahlentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

. G. LEJEUNE-DIRICHLET. Lezioni sulla teoria dei numeri, pubblicate e corredate di appendici da R. Dedekind, tradotte della terza edizione da Aureliano Faifofer. Venezia, Tip. Emiliana. 1881. 8°.

. CÉSARO. Formule d'arithmétique. Math. II. 97-101.

. CÉSARO. Sur une nouvelle formule arithmétique. Math. I.b. 148-149.

Auszüge aus einer grösseren Arbeit, die 1883 in extenso erschienen ist. Das Referat wird daher bis dahin verschoben.

Mn.

. KRONECKER. Zur Theorie der Abel'schen Gleichungen. Kronecker J. XCIII. 338-364.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 48.

V. Bouniakowsky. Quelques remarques sur les pr priétés d'une classe particulière des fractions dé males périodiques. Pétersb. Bull. XXVII.

Es wird hier auf einige periodische Decimalbrüche aufmer sam gemacht, welche die Eigenschaft haben, dass die Summ derjenigen Glieder einer Periode, die gleich weit vom Anfan einer jeden Hälfte abstehen, gleich der Zahl 9 ist, und die auss dem einer Congruenz, wie

$y_m \equiv y_{m-1} + y_{m-2}$ (mod. 9) oder $y_m \equiv 2y_{m-1} + y_{m-2}$ (mod. 9

wo die y_m die Zahlen einer Periode bezeichnen, genügen.

Ty.

K. Broda. Bildungsgesetz periodischer Brüche in be stimmten Zahlensystemen. Hoppe Arch. LXVIII. 85-100.

Das Problem wird hier in der Form behandelt, dass de Nenner eines gemeinsamen Bruches und die Stellenzahl des en sprechenden periodischen Decimalbruchs gegeben, hingegen d Grundzahl des zugehörigen Zahlensystems gesucht sein solle Hieran werden Untersuchungen über die Factoren der Form $a^m + 1$ geknüpft und speciell der bekannte Teiler 641 der Form $2^{2^5} + 1$ in eleganter Weise ermittelt. Sn.

G. S. Ely. Note on partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 211.

In einer Tafel von ganzen Zahlen mit zwei Eingängen sei die Columnen mit i, die Zeilen mit j bezeichnet; zwischen d Elementen bestehe die Relation

$$n_{i,j} = n_{i-1,j+1} + n_{i,j-i}.$$

Die i beginnen mit 1, die j mit 0, und es sei

$$n_{1,j} = n_{i,0} = 1.$$

Mit solchen Tabellen soll schon Euler (Com. Arith. Coll. Vol. I. sich beschäftigt haben. Die Anzahl der Zerlegung von i Din in j Teile soll gleich $n_{i,j}$ sein und dgl. m. Sn.

l. MITCHELL. Note on partitions. J. Hopkins Circ. 1882. 210.

Bezeichnet man durch das Symbol $(w:i, j)$ die Anzahl ver-
dener Teilungen der ganzen Zahl w in j oder weniger Teile,
n keiner $>i$, und durch E die Anzahl der im Folgenden
ltenen Ganzen, und ist

$$\varphi_j(w) = w - E\left(\frac{w+j-1}{j}\right) = E\left(\frac{(j-1)w}{j}\right),$$

st

$$(w:i, j) = \sum_{x=w-i}^{x=\varphi_j(w)} (x:w \quad x, j-1).$$

Anwendung dieser Formel lässt sich Sylvester's Formel für die
stellung von $(w:i, j)$--$(w-1:i, j)$ in Termen der Teilungen
erer Ordnung, Messenger (2) VIII. 1—8 (s. F. d. M. X. 1878.
2) herleiten. H.

I. SYLVESTER. On a question in partitions. J. Hopkins
rc. 1882. 179.

Kurze, dunkle Notiz über die Zerlegung einer gegebenen
l in eine Reihe, deren einzelne Glieder das arithmetische
tel der beiden benachbarten nicht übersteigen sollen.

Sn.

J. SYLVESTER. On a geometrical treatment of a theorem in numbers. J. Hopkins Circ. 1882 415.

Sn.

D. WEYR. Ueber Perott's Beweis, dass die Anzahl der Primzahlen unendlich ist. Cas. XI. 53. (Böhmisch).

Enthält eine kommentirte Reproduction dieses Beweises,
r sich Darboux Bull. (2) V. 183-184 (s. F. d. M. XIII. 1881.
133) findet. Std.

W. W. Johnson. Mr. Glaisher's enumeration of prim for the first nine millions. Anal IX. 133-134.

Bericht über die betreffenden Arbeiten nach den Rep. of th Brit. Ass. Jn. (O.).

L. Oppermann. Om vor Kundskab om Primtallene Mongde mellem givne Grändser. Kopenh. Overs. 18 169-179.

In diesem Aufsatze giebt der Verfasser eine gedrängte Ueber sicht über die verschiedenen Arbeiten, auf denen unsere jetzig Kenntnis der Verteilung der Primzahlen beruht. Einerseits wer den die directen Aufzählungen von Chernie, Burchardt, Dase, Ro senberg und Glaisher, andererseits die theoretischen Unter suchungen von Legendre, Gauss, Tchébycheff, Riemann, sowie di directen Berechnungen von Meissel berücksichtigt. Beiläufig wir der folgende unbewiesene Erfahrungssatz angeführt: Wenn di ganze Zahl $n > 1$ ist, so liegt zwischen $n(n-1)$ und n^2, sowi zwischen n^2 und $n(n+1)$ wenigstens je eine Primzahl. Ferne wird bemerkt, dass in den Burchardt'schen Tafeln die beide Primzahlen 3026279 und 1330001 fehlerhaft als zusammenge setzte Zahlen aufgeführt sind. Gm.

F. Studnička. Bemerkung über Primzahlen. Cas. XI. 13

Enthält Historisches über die Fermat'sche Zahl F_{23}.

Std.

E. de Jonquières. Formules pour déterminer combien il y a de nombres premiers n'excédant pas un nombre donné. C. R. XCV 1144-1146.

E. de Jonquières. Sur la formule récemment commu niquée à l'Académie au sujet des nombres premiers C. R. XCV. 1343-1344.

IPSCHITZ. Sur une communication de M. de Jonquières lative aux nombres premiers. C. R. XCV. 1341-1346.

Herr de Jonquières hat durch geschickte Handhabung der Sieb des Eratosthenes' bekannten Methode eine Formel die Anzahl der eine gegebene Zahl P nicht übersteigenden ızahlen gefunden; diese indes findet sich, wie er in der ten Note bemerkt, schon in Legendre's Théorie des nombres IV, 2[te] Aufl. 1808, 414), wenn auch ohne Beweis. Herr chitz weist den Zusammenhang jener Formel mit gewissen entheoretischen Sätzen nach, welche er bereits früher der demie vorgelegt habe. (C. R. LXXXIX. 948—950, vgl. auch . M. XI. 1879, 142—143). Sn.

EMOINE. Décomposition d'un nombre premier N en s puissances $n^{\text{ièmes}}$ maxima. C. R. XCV. 719-722.

Es werde von der Zahl N die grösste in ihr enthaltene lratzahl abgezogen, vom Rest wieder die grösste in diesem iltene Quadratzahl und so fort bis zur Erschöpfung der N. Die Anzahl der zu dieser Darstellung gebrauchten lratzahlen sei p. Der Herr Verfasser sucht alsdann für ein eschriebenes p das kleinstmöglichste N, welches er mit y_p ichnet, und findet, dass alle y_p, welche einem graden p entheu, mit den Ziffern 67 enden, und die einem ungraden, den Ziffern 23. Allgemein besteht die recurrirende Formel:

$$y_{p+1} = \left(\frac{y_p+1}{2}\right)^2 + y_p.$$

Schlusse finden sich Hinweise auf den Fall, dass die Quadraten durch Cubikzahlen ersetzt werden, u. s. f.

Sn.

ETERSEN. Om Primtal. Zeuthen T. (4) VI. 138-143.

Aus dem bekannten Ausdrucke mittels unvollständiger Quoen für den Exponenten der höchsten Potenz einer Primzahl p,

die in dem Producte $n!$ aufgeht, wird die folgende Formel abge-leitet

$$\frac{(a+b)!}{a!\,b!} = \Pi p^{\frac{t_a + t_b - t_{a+b}}{p-1}},$$

wo sich das Product Π auf alle Primzahlen p erstreckt, und t_a die Quersumme der Zahl a in einem System, dessen Basis p ist, bezeichnet.

Ferner wird gezeigt, wie man für das kleinste gemeinschaft-liche Multiplum der Zahlen bis n eine Formel angeben kann, und diese wird demnächst zur Auffindung von Grenzen der Anzahl der Primzahlen bis n benutzt. Das angewendete Verfahren kann wesentlich als eine geschickte Aenderung der Methode von Tchebycheff betrachtet werden und giebt auch als Resultat Grenzen, welche nur unbedeutend von den seinigen abweichen. Das Verfahren besitzt den Vorzug, etwas schneller zum Ziele zu führen. Gm.

Ed. Weyr. Ueber einen zahlentheoretischen Satz.

Cas. XI. 39. (Böhmisch).

Ist ν eine beliebige ganze Zahl, deren Zusammensetzung durch die Formel

$$\nu = q_1^{n_1} q_2^{n_2} \dots q_m^{n_m}$$

gegeben erscheint, wobei die $q_k (k = 1, 2, \dots m)$ Primzahlen bedeuten, so ist bekanntlich der Ausdruck

$$p^\nu - \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1}} + \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2}} - \dots + (-1)^{m-1} \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \dots q_{m-1}}} + (-1)^m \Sigma p^{\frac{\nu}{q_1 q_2 \dots q_m}}$$

durch ν teilbar, falls p eine Primzahl vorstellt. Dieses Theorem wird nun auf beliebige ganze Zahlen p erweitert. Std.

A. P. Minin. Ueber Eigenschaften von Zahlen, die den vollkommenen analog sind.

Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch)

In dieser Abhandlung werden die Zahlen untersucht, die die Eigenschaft besitzen, einen aliquoten Teil der Summe all

hlen auszumachen, die kleiner als sie und relativ prim zu ıen sind. Ty.

. ANDRÉ. Sur la divisibilité d'un certain quotient par les puissances d'une certaine factorielle. C. R. XCIV. 426-428.

Arithmetischer Beweis des Satzes: Bezeichnet x eine Zahl, elche nicht als Summe von weniger als k Potenzen einer und erselben Primzahl dargestellt werden kann, so ist der Quotient

$$\frac{(nx)!}{(x!)^n\,(n!)^k}$$

ine ganze Zahl. Sn.

\. CAYLEY. A proof of Wilson's theorem. Mess. (2) XII. 41.

Der Satz heisst: „Wenn n eine Primzahl ist, so ist $.2\ldots(n-1)+1$ teilbar durch n", und wird durch Betrachtung es Polygons, welches aus der Verbindung von n Punkten entteht, gewonnen. Glr. (O.).

. CATALAN. Extrait d'une lettre. Darb. Bull. (2) VI. 224.

Es ist

$$(x+y+z)^{2m+1}-x^{2m+1}-y^{2m+1}-z^{2m+1}$$

tets durch $(x+y)\,(y+z)\,(z+x)$ teilbar. Sn.

). SCHIER. Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen. Wien. Ber. LXXXV. 503-508.

Die Arbeit erscheint als Fortsetzung einer früheren desselen Verfassers. Wir verweisen auf das damalige Referat ines anderen Referenten, dessen Einwände auch auf die am nde der vorliegenden Analyse wiederholten Resultate noch in raft bleiben. (Siehe F. d. M. XII. 1880. p. 135). Sn.

K. SCHWERING. Untersuchung über die fünften Potenzreste und die aus fünften Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen. Schlömilch Z. XXVII. 102-119.

Herleitung der Kummer'schen Normalform für obige Einheitswurzeln. Fünfteilung der Kreisteilungsgleichungen. Eigenschaften der entsprechenden Perioden, Relationen zwischen denselben, Charakter von 2, 3, 5, η. Die Periodengleichung.

Sn.

N. V. BUGAEFF. Ueber einige Eigenschaften der Reste und der Zahlsummen. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch)

Diese Abhandlung ist der Summation der kleinsten positiven Reste einer linearen Form, speciell auch der quadratischen und cubischen Reste, gewidmet. Ty.

T. J. STIELTJES jr. Over het quadratische rest-karakter van het getal 2. Nieuw Arch. IX. 193-195.

Wie der Titel sagt, beschäftigt sich diese kurze Arbeit mit quadratischen Resten vom Charakter 2. G.

L. MATTHIESSEN. Ueber eine antike Auflösung des sogenannten Restproblems in moderner Darstellung. Hoffmann Z. XIII. 187-190.

GERLACH. Das Restproblem für nicht teilerfremde Divisoren. Hoffmann Z. XIII. 351-354.

Eine von dem buddhistischen Priester und Astronomen Yih-hing († 717 u. Chr.) gegebene Lösung des Systems

$N \equiv r_1 \pmod{m_1}$, $N \equiv r_2 \pmod{m_2}$, $N \equiv r_3 \pmod{m_3}$, u. s. w.

wird in der ersten Mitteilung discutirt, in der zweiten bewiesen.

Sn.

LET. Sur les résidus cubiques et biquadratiques
ıivant un module premier. S. M. F. Bull IX. 157-162.

Einfache Darlegung des Zusammenhanges der Reciprocitäts-
tze für die quadratischen, cubischen, biquadratischen Reste
den Kreisteilungsgleichungen in den Fällen, wo die Anzahl
Perioden 2, 3, 4 ist. Einige allgemeine Notizen über die
ɘgung dieser Gleichungen nach einem Primzahlmodul. Der
adratische Charakter der Zahl 2.

Sn.

Ι. STIELTJES jr. Bijdrage tot de theorie der derde-en
ierde-machts resten. Amst., Versl. en Meded. XVII. 338-417.

Die Arbeit behandelt die Theorie der cubischen und biqua-
ischen Reste und schliesst sich in dieser Hinsicht an die be-
ıte, indessen unvollendet gebliebene Abhandlung von Gauss:
ɘoria residuorum biquadraticorum" an. Das allgemeine Reci-
itätsgesetz ist später von Eisenstein (Crelle J. Band 28) be-
en. Hier werden dieselben Theorien auf eine andere Weise
ındelt, die darauf beruht, dass die Primzahl, deren Charakter
mmt werden soll, ersetzt wird durch ein congruentes Pro-
von Factoren.

Der Charakter dieser Factoren wird durch Betrachtungen
mmt, die mit denen, welche das oben genannte Werk von
ss enthält, übereinstimmen; nur findet eine Erweiterung auf
plexe Zahlen statt. Auf diese Weise wird der Charakter von
in Beziehung auf eine Primzahl von der Form $a+bi$ be-
mt, ebenso werden die Zahlen mit einem Modulus von der
n $4n+3$ behandelt. Dann werden alle Sätze bewiesen,
he von Gauss auf inductivem Wege gefunden und in Art. 28
Th. res. biq. zusammengestellt sind. Der Beweis beruht auf
Theorie der complexen Zahlen, welche hier als Hülfsmittel
aucht wird, da die Sätze selbst sich nur auf reelle Zahlen
ɘhen.

G.

F. Hofmann. Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über eine Erweiterung des Congruenzbegriffes. Klein Ann. XX. 471-487.

Der zu beweisende Satz findet sich bei Gauss (Disq. ar. 81): p sei Primzahl; dann ist die Summe aller primitiven Wurzeln der Congruenz $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ durch p teilbar, falls $p-1$ durch ein Quadrat teilbar ist, und $\equiv (-1)^n \pmod{p}$, falls $p-1$ ein Product von n verschiedenen Factoren ist. Die Beweismethode besteht in einer Gruppirung der Potenzen einer primitiven Wurzel von p, einer Anordnung derselben in regulären Polygonen auf der Peripherie eines Kreises. Herr Adolf Hurwitz giebt eine analytische Formulirung des Beweises. Die Erweiterung des Congruenzbegriffes bezieht sich auf Brüche und Wurzeln; der Herr Verfasser beruft sich auf den Vorgang von Gauss, um die Bezeichnungen

$$\sqrt[n]{a} \equiv b \pmod{p}, \quad \frac{a}{b} \equiv c \pmod{p}$$

einzuführen, und schreibt also z. B. mod. 13:

$$\frac{\sqrt{-1}}{2} \equiv \frac{\sqrt{12}}{2} \equiv \frac{5}{2} \equiv 9.$$

Sn.

B. Stankewitsch. Zur Theorie der Congruenzen mit einer Veränderlichen in Bezug auf einen Primzahlmodulus. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

In dieser Note werden folgende drei Theoreme über Congruenzen in Bezug auf einen Primzahlmodulus bewiesen:

I. Ist die Congruenz $x^2 - q \equiv 0 \pmod{p}$ möglich, so werden die Zahlen

$$A = S_{i-1} + S_{i-3}.q + S_{i-5}.q^2 + \cdots + S_1.q^{\frac{i-2}{2}},$$

$$B = S_i + S_{i-2}.q + S_{i-4}.q^2 + \cdots + q^{\frac{i}{2}},$$

$i = \frac{p-1}{2}$ ist, und S_k die Summe der Zahlen 1, 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$ je k bedeutet, nie durch p teilbar, und die einzige immer stirende Lösung der Congruenz

$$Ax - B \equiv 0 \pmod{p}$$

identisch mit derjenigen der Lösung der Congruenz

$$x^2 - q \equiv 0 \pmod{p},$$

zu ihrem kleinsten positiven Reste eine Zahl aus der Reihe 2, 3, ..., $\frac{p-1}{2}$ hat.

II. Hat die Congruenz $f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$ vom Grade n t ganzzahligen Coefficienten n Wurzeln, so wird wenigstens ie von diesen Wurzeln auch der Congruenz

$$f_{p-n}(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{p-n}) \equiv 0 \pmod{p},$$

o $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{p-n}$ irgend welche $p-n$ Zahlen aus der ihe 1, 2, 3, ..., $p-1$ bezeichnen) genügen.

Nach dem Beweise dieses Theorems wird eine auf das- lbe basirte Methode zum Auffinden aller Lösungen der Con- uenz

$$f_n(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

egeben.

III. Es sei ω der grösste gemeinsame Teiler der Zahlen m nd $p-1$, dann lässt sich bekanntlich die Lösung der Con- ruenz

$$x^m - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

uf die folgende:

$$x^\omega - 1 = 0 \pmod{p}$$

urückführen. Nun sei jetzt $F(x)$ (in Bezug auf den Modulus p) er grösste gemeinsame Teiler von $x^\omega - 1$ und der Function

$$P = (x^{\frac{\omega}{a}} - 1)(x^{\frac{\omega}{b}} - 1)\ldots(x^{\frac{\omega}{k}} - 1),$$

) $a, b, c, \ldots, k$ die verschiedenen Primzahlen bezeichnen, die ω aufgehen, und $f(x)$ der Quotient der Function $x^\omega - 1$ durch x), dann sind die Wurzeln der Congruenz

$$f(x) \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

die primitiven Wurzeln der Congruenz

$$x^{\omega} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Ty.

N. V. Bugaeff. Die Lösung der Congruenzen 2ten Grades in Bezug auf einen Primzahlmodulus. Mosk. S. X. Lief. 2 (Russisch).

Der Satz von Wilson giebt für die Congruenz

$$x^2 + a^2 \equiv 0 \ (\text{mod. } p)$$

die Lösung

$$x \equiv 1, 2, 3, \cdots, \frac{p-1}{2} a \quad (\text{mod. } p).$$

Ist $p = 8u+5$, so wird die Congruenz

$$u^2 \equiv q \quad (\text{mod. } p),$$

im Falle, dass sie eine Lösung hat, also im Falle, dass

$$q^{4n+2} \equiv q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p)$$

ist, durch die Formeln

$$u = \pm q^{\frac{p+3}{8}} \quad (\text{mod. } p)$$

oder

$$u \equiv 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-1}{2} q^{\frac{p+3}{8}} \quad (\text{mod. } p)$$

gelöst, je nachdem

$$\left.\begin{array}{r} q^{2n+1} \equiv 1 \\ \text{oder} \quad q^{2n+1} \equiv -1 \end{array}\right\} \quad (\text{mod. } p)$$

ist. Es sei jetzt $p = 2^{\lambda} l + 1$, wo l irgend eine ungrade Zahl bezeichnet. Die Congruenz $z^2 \equiv q$ (mod. p) ist unter der Bedingung

$$q^{2^{\lambda-1} l} \equiv 1 \ (\text{mod. } p)$$

möglich. Setzt man $q^l = Q$, so nimmt diese Bedingung folgende Gestalt an:

$$Q^{2^{\lambda-1}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

as entweder zu der Congruenz

$$\left.\begin{aligned} Q^{2^{\lambda-2}}-1 &\equiv 1 \\ Q^{2^{\lambda-2}}+1 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{p}$$

ler

hrt. Der erste Fall wird uns durch wiederholte Zerlegung der nken Seite in zwei Factoren entweder zur Congruenz

$$Q = q^l \equiv 1 \pmod{p}$$

ingen, und dann wird uns die Congruenz

$$u \equiv q^{\frac{l+1}{2}} \pmod{p}$$

e Lösung der vorgelegten Congruenz zweiten Grades geben, ler zur Congruenz

$$Q^{2^{\mu}}+1 \equiv 0 \pmod{p},$$

o $\mu<\lambda$ ist; dann hat man zwei Wege, um die Zahl μ zu er- iedrigen: 1) mit Hülfe einer primitiven Wurzel a der Zahl p; ie Lösung wird durch die Congruenz ersten Grades

$$a^{l\varrho} u \equiv q^{\frac{l+1}{2}} \pmod{p}$$

egeben, wo ϱ durch die Formel

$$q^l \equiv a^{2l\varrho} \pmod{p}$$

efinirt ist; 2) mit Hülfe des quadratischen Nichtrestes n; dann t die Lösung durch die Congruenz

$$n^{l\varrho} u \equiv q^{\frac{l+1}{2}} \pmod{p}$$

egeben, wo ϱ durch die Formel

$$q^l \equiv n^{2l\varrho} \pmod{p}$$

estimmt ist. Ty.

Migotti. Zur Theorie der Kreisteilung. Wien. Ber. LXXXVII. 8-14.

Eigenschaften der Gleichung, deren Wurzeln die sämmtlichen mitiven m^{ten} Wurzeln sind, für eine zusammengesetzte Zahl m. ationen zwischen den Potenzsummen dieser Wurzeln. Beson-

ders eingegangen wird auf den Fall, wo m das Product zweier Primzahlen p und q ist. Bezeichnet man die p^{ten} Einheitswurzeln mit

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{p-1},$$

die q^{ten} mit

$$\beta, \beta^2, \beta^3, \ldots, \beta^{q-1},$$

so sind die $(p-1)(q-1)$ primitiven $(pq)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln in der Form $\alpha^{\varrho}.\beta^{\sigma}$ enthalten. Es wird streng bewiesen, dass die gesuchte Gleichung keine anderen Coefficienten als 0 und 1 haben kann. Sn.

SCHWERING. Zur Theorie der algebraischen Functionen, welche von Jacobi $\psi(\alpha)$ genannt werden. Kronecker J. XCIII. 334-338.

Herr Schwering zeigt, dass $1+\psi(\alpha)$ immer durch $(1-\alpha)^3$ teilbar ist; ferner, dass die Anzahl der verschiedenen Functionen $\psi(\alpha)$ sofort auf den sechsten Teil der sich zunächst darbietenden reducirt werden kann. Sn.

S. J. BASKAKOFF. Ueber eine Methode, Zahlidentitäten zu finden, und ihre Anwendung auf die Theorie der Zahlenfunctionen. Mosk. S. X. Lief. 3. (Russisch).

In dieser Abhandlung werden die Formeln von Liouville bewiesen, die er in zwölf Artikeln: „Sur quelques formules générales, qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres" (Journal des mathématiques, 1858 et 1859) gegeben hat. Ty.

A. BERGER. Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala. E. Berling.

In den einleitenden Paragraphen werden die bekannten Grundeigenschaften der Gammafunction, ihrer logarithmischen Ableitung und der Stirling'schen Reihe entwickelt. Aus diesen er-

sich eine grosse Zahl von Lehrsätzen über die mittleren
e solcher Quotienten, deren Zähler zahlentheoretische Func-
n des Nenners sind. Als solche Functionen werden zu-
st allgemein die symmetrischen Functionen der Divisoren
ganzen Zahl betrachtet; sodann speciell deren Anzahl,
ne, Summe der Reciproken, Summen von graden oder un-
n Potenzen dieser Reciproken, Summe der Logarithmen,
tionen von der Form Σa^x und $\Sigma x a^x$, u. s. f. Die gefundenen
sind folgender Art: „Die Summe der Divisoren einer ganzen
ist im Mittel $^1/_6 \pi^2$ mal so gross, als die Zahl selbst.“ Oder:
l $d_1, d_2, \ldots, d_n$ alle Teiler einer ganzen Zahl und a eine
ve Grösse, kleiner als Eins, so ist die Summe

$$d_1 \,.\, a^{d_1} + d_2 \,.\, a^{d_2} + \cdots + d_n \,.\, a^{d_n}$$

littel gleich $\frac{a}{1-a}$.“ u. dgl. m.

Die folgenden Abschnitte behandeln die Reste, welche bei
Division einer ganzen Zahl durch alle kleineren übrig bleiben.
: „Das arithmetische Mittel dieser Reste ist das$\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$-
der Zahl selbst.“ Oder: „Bringt man die Grössen

$$\sqrt[2s]{\frac{n}{1}},\ \sqrt[2s]{\frac{n}{2}},\ \sqrt[2s]{\frac{n}{3}}, \ldots \sqrt[2s]{\frac{n}{n}}$$

lie Form:

$$\text{ganze Zahl} + \text{Bruch},$$

i s eine ganze Zahl bezeichnet, so ist die mittlere Summe
dieser Brüche für $n=\infty$

$$2^{2s} - \frac{B_s\,(2^{2s-1}-1)\,2(\pi)^{2s}}{(2s)!},$$

B_s die s^{te} Bernoulli'sche Zahl.“ Sn.

ID. Applications de la dérivation d'Arbogast à la
olution de la partition des nombres et à d'autres
oblèmes. Résal J. (3) VIII. 61-72.

Eine Methode zur Entwickelung von

$$\varphi(a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$$

nach ganzen Potenzen von x, welche bisher nur von Lacr reproducirt und verwandt worden, findet neue interessante A wendungen auf eine Reihe von zahlentheoretischen und algebrai schen Problemen, z. B. auf die Darstellung der Discriminant einer Gleichung, der Eliminationsresultante von zwei Gleichunge auf die Umkehrung der Reihen. Es wird gezeigt, wie man al ganzzahligen Lösungen der bekannten Gleichung

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots = n$$

sofort, ohne Rechnen und ohne Probiren, hinschreiben kan Endlich giebt der Herr Verfasser noch eine besondere Darstellun der Bernoulli'schen Zahlen, z. B. der dritten:

$$B_3 = \frac{1}{2^9.3^5.4^4.5^4.6^2.7} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 4.3 & 4.3.2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 5.4 & 5.4.3 & 5.4.3.2 & 0 \\ 1 & 6 & 6.5 & 6.5.4 & 6.5.4.3 & 6.5.4.3.2 \\ 1 & 7 & 7.6 & 7.6.5 & 7.6.5.4 & 7.6.5.4.3 \end{vmatrix},$$

deren Gesetz einleuchtet. Sn.

Ch. Méray. Solution du problème général de l'analys indéterminée du premier degré. C. R. XCIV. 1167-1169.

Ein System von m ganzzahligen Gleichungen ersten Grad mit n Unbekannten ($n \geqq m$) sei vorgelegt; alle Systeme vo ganzzahligen Lösungen zu finden. Es wird nur die Form de allgemeinen Auflösung gegeben und die genauere Analys welche auch die Ermittelung der in dieser enthaltenen Constante ermöglichen soll, versprochen. Sn.

Moret - Blanc. Démonstration des propositions M. Lionnet. Nouv. Ann. (3) I. 357-365.

Es werden einige diophantische Gleichungen mitgeteilt, welc nur triviale Lösungen zulassen, z. B. soll die Summe von a

ınder folgenden Quadraten ungrader Zahlen nie eine Trigonal-
l ergeben, und ähnliches. Sn.

DURFEE. Note on some properties of the numerical olutions of $ax^2-y^2 = -1$. J. Hopkins Circ. 1882. 78.

Wenn man die ganzzahligen Lösungen der obigen Gleichung, Grösse nach geordnet, mit x_1, y_1; x_2, y_2; ... bezeichnet, so ist

$$x_n y_{n+t} - x_{n+t} y_n = -x_t,$$
$$ax_n x_{n+t} - y_n y_{n+t} = -y_t.$$

Sn.

VILLICUS. Ueber ganzzahlige Verhältnisgruppen in er Alligationsrechnung. Z. f. Realsch. VII. 213-221.

Nachweis, dass die Aufgaben der Mischungsrechnung mit eil auf die Lösung einfacher diophantischer Gleichungen ckzuführen seien. Gr.

HERMES. Gleichungen ersten und zweiten Grades chematisch aufgelöst in ganzen Zahlen. Leipzig. Teubner.

Eine Zusammenstellung der Regeln, welche zur kürzesten echnung der Lösungen von diophantischen Gleichungen ersten zweiten Grades erforderlich sind. Die Beweise sind in m Anhange nur angedeutet; als Zweck der Arbeit erscheint wirkliche Ausführung der Rechnungen, welche denn auch h zahlreiche Beispiele illustrirt ist. Den Rechnungen ist die endivision durchgängig zu Grunde gelegt. Die Gleichungen n Grades finden durch die Aufsuchung der Näherungswerte s Kettenbruchs in bekannter Weise ihre Erledigung, während n des zweiten Grades zunächst drei Specialfälle:

$$Bxy + Cx + Dy + F = 0,$$
$$x^2 \pm Py + R = 0,$$
$$ax^2 + 2bxy + a_1 y^2 = P$$

vorangeschickt werden. Die Analyse ist mit besonderem Augen-merk auf die Erschöpfung aller erdenklichen Fälle durchgeführt; im Laufe derselben finden sich speciell sieben Fälle hervorgehoben, in welchen die allgemeine diophantische Gleichung zweiten Grades

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

keine oder nur triviale Lösungen erlaubt. Sn

PEPIN. Sur le problème de former un carré en ajoutant un cube à un nombre donné. Brux. S. Sc. VI. B. 86-100.

Verallgemeinerung der Sätze von Jonquières (Nouv. Ann. (2) XVII. 374, siehe F. d. M. X. 1878. p. 145). Zur Charakterisirung mögen zwei Beispiele angeführt werden: I. Die Lösung der Gleichung $x^3 + a = y^2$ in ganzen Zahlen ist unmöglich, wenn $a = c^3 - 4^\alpha b^2$, wo b und c zwei ungrade, positive oder negative Zahlen bezeichnen, von denen die erste keinen Teiler von der Form

$$8l+1,\ 8l+3,\ 8l+7 \text{ für } \alpha = 1,$$

von der Form

$$8l+3,\ 8l+5,\ 8l+7 \text{ für } \alpha > 1$$

hat. II. Wenn 6 relativ prim zu 10 ist, und keinen Factor von der Form $20l+11$ enthält, und wenn $a = 32(2d+1)^5 - 5b^2$ ist, so giebt es für $x^5 + a = y^2$ keine Lösung in ganzen Zahlen.

Mn. (O.).

S. GÜNTHER. Ueber einen Specialfall der Pell'schen Gleichung. Bair. Bl. XVII. 19-24.

Theon Smyrnaeus ist, wie aus seinem mathematischen Commentar zu Platon's Werken erhellt, mit folgenden Relationen vertraut:

$$2.1^2 - 1 = 1^2,\quad 2.5^2 - 1 = 7^2,$$
$$2.29^2 - 1 = 41^2,\quad 2.169^2 - 1 = 239^2, \ldots;$$

man muss also annehmen, dass er die Pell'sche Gleichung

$$2x^2 - 1 = y^2$$

verstanden habe. Es erhebt sich die Frage, wie er kommen sei, und als ein Weg, der ihn möglicherweise i Resultaten führen konnte, sich auch vollständig innerhalb unbestimmten Analytik des Altertums gezogenen Grenzen g der folgende gelten. Aus

$$x+1 = \frac{p}{q}(y+x), \quad x-1 = \frac{q}{p}(y-x)$$

nn $p^2+2pq-q^2 = z^2$ gesetzt wird,

$$\frac{4q^2+z\mp 2q\sqrt{2q^2+z}}{z}, \quad y = \frac{-4q^2-z\pm 4q\sqrt{2q^2+z}}{z}.$$

nun für $z = 1$ irgend eine Zahl q bekannt ist, für welche in vollkommenes Quadrat wird, liefert diese Lösung eine he Anzahl ganzzahliger Werte für x und y. Ebenso Auflösung der allgemeineren Gleichung

$$(a^2+b^2)x^2-1 = y^2$$

führt. Diese elementare Methode ähnelt derjenigen, deren h Paul Tannery's Ansicht Archimedes bei der Behand- Gleichungen

$$3x^2\mp 1 = y^2$$

haben soll. Gr.

LIS. Solution d'une question (58). Math. II. 64-67.

ung der Gleichung

$$X^2+Y^2+Z^2 = K(x^2+y^2+z^2), \qquad K=7, 19, 67, \ldots$$

n Zahlen. Mn.

'IN. Nouveaux théorèmes sur l'équation indéter- e $ax^4+by^4 = z^2$. C. R. XCIV. 122-124.

: Fülle neuer Fälle wird mitgeteilt, in welchen die ophantische Gleichung unlöslich sein soll.

Sn.

A. N. KORKIN. Ueber die Unmöglichkeit der Gleichung $x^n+y^n+z^n=0$ durch ganze Functionen zu genügen. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russisch).

Von der im Titel bezeichneten Unmöglichkeit wird hier ein Beweis gegeben. Ty.

A. CAYLEY. Note on the standart solutions of a system of linear equations. Quart. J. XIX. 38-41.

„Normallösungen" für ein System von linearen homogenen Gleichungen, deren Anzahl geringer ist als die der Unbekannten, construirt Herr Cayley folgendermassen: Den Unbekannten wird eine Reihenfolge gegeben $x_1, x_2, x_3, \ldots$; als erste Lösung gilt diejenige, bei der möglichst viele der ersten auf einander folgenden x gleich 0 sind, während die nächste Unbekannte gleich 1 gesetzt wird; etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0;\quad x_7 = 1,\ldots.$$

Als zweite Lösung gilt die, bei welcher $x_7 = 0$ ist, möglichst viele der ersten auf einander folgenden x gleich 0 werden, und das erste nicht verschwindende gleich 1 ist, also etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0;\quad x_5 = 1,\quad x_6 = \xi_6,\quad x_7 = 1,\ldots.$$

Für die nächste Lösung wird $x_5 = 0$, $x_7 = 0$ gefordert; ausserdem sollen möglichst viele der ersten auf einander folgenden x gleich 0, und das erste nicht verschwindende gleich 1 sein, also etwa

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0;\quad x_4 = 1,\quad x_5 = 0,\quad x_6 = \xi_6',\quad x_7 = 0,\ldots$$

u. s. w. Aus diesen Lösungen lässt sich jede Lösung des Systems zusammensetzen. Es wird eine Anwendung auf die Berechnung einer Semiinvariante gegeben. No.

H. SCHEFFLER. Die magischen Figuren. Allgemeine Lösung und Erweiterung eines aus dem Altertum stammenden Problemes. Leipzig. Teubner.

Die geschichtliche Einleitung zu dieser Schrift ist, da der Verfasser nur das Klügel'sche Wörterbuch zur Richtschnur g

und von späteren Bearbeitungen des Problems keine
nommen zu haben scheint, etwas mager ausgefallen; so
vohl auch die Behauptung (S. 5), dass man bisher das
nmene" magische Quadrat (bei welchem nicht nur

$$a_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{k,i} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

gleich, sondern auch

$$_{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{i=n} a_{i,k+i-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

lichen Wert haben sollen, wie die beiden ersterwähnten
) viel zu wenig gewürdigt habe, kaum aufgestellt worden
enn der vorhandenen Literatur etwas mehr Beachtung
t worden wäre. Hat doch schon der Byzantiner Moscho-
m diesen allgemeinen Diagonalreihen gerecht zu werden,
rst bei ihm vorkommenden Begriff des cyklischen Anein-
hens aufgestellt. Diese Bemerkungen beabsichtigen jedoch
r Weise, die Verdienstlichkeit dieser umfassenden und
en Neubearbeitung einer altehrwürdigen Aufgabe zu
n, vielmehr behalten die Methoden des Verfassers, wenn-
e stellenweise mit den von Hugel, Frost u. A. angewand-
einstimmen, ihren vollen und selbständigen Wert. Eine
nlichkeit der Schrift ist es, dass die Regeln zur Con-
der magischen Figuren für sich vorgetragen sind,
die Beweise in einem besonderen Anhang vereinigt
Zur Darstellung der Zauberquadrate mit ungrader Zellen-
dient die folgende elegante Vorschrift: Man wähle vier
che ganze Zahlen a, b, a', b' von der Beschaffenheit, dass
n ihnen, sowie jede der fünf Verbindungen $ab' - a'b$,
$+ b'$, $a - a'$, $b - b'$ relativ prim zu n (event. auch $= 1$)
bilde aus denselben die nachstehenden Werte:

$+ 0.b'n$	$1 + (a + 0.a') \quad + (b + 0.b')n$
$+ 1.b'n$	$1 + (a + 1.a') \quad + (b + 1.b')n$
$+ 2.b'n$	$1 + (a + 2.a') \quad + (b + 2.b')n$
zu	etc. bis zu
$-1).a' + (n-1).b'n,$	$1 + (a + (n-1)a') + (b + (n-1)b')n,$

$$\begin{cases} 1+(2a+0.a') \quad +(2b+0.b')n \quad \ldots \\ 1+(2a+1.a') \quad +(2b+1.b')n \quad \ldots \\ 1+(2a+2.a') \quad +(2b+2.b')n \quad \ldots \\ \text{etc. bis zu} \\ 1+(2a+(n-1)a')+(2b+(n-1)b')n\ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+((n-1)a+0.a') \quad +((n-1)b+0.b')n \\ 1+((n-1)a+1.a') \quad +((n-1)b+1.b')n \\ 1+((n-1)a+2.a') \quad +((n-1)b+2.b')n \\ \text{etc. bis zu} \\ 1+((n-1)a+(n-1)a')+((n-1)b+(n-1)b')n. \end{cases}$$

Jede dieser Zahlen ist ein Trinom von der Form $(1+c+$
Statt der Coefficienten c und d nehme man nun deren kl
positive Reste nach n, und zwar mit Einrechnung von 0,
mit Ausschluss von n; dann lassen sich die so erhaltenen Z
sofort in ein magisches Quadrat von n^2 Zellen einordnen.
Lösung umschliesst, wie ersichtlich, alle möglichen Lösunge
früherer Zeit, und es ist deshalb nicht zu verwundern, dass m
ältere Regeln als Corollare aus der Scheffler'schen hervorg
Wenn n dagegen eine grade Zahl ist, so können die fünf Z
a, b, a', b', $ab'-a'b$ nicht mehr sämmtlich mit n teilerfremd
und damit ist in diesem Falle die Anwendbarkeit der
massgebend gewesenen Sätze ausgeschlossen. Deshalb fü
Verfasser jetzt das Quadrat mit diagonalen Doppelzügen
welche er „Kreuze" nennt, und begründet auf diese ein
und halb geometrisches, aber ebenfalls völlig allgemeines
fahren. Diese Kreuze geben Veranlassung zur Bildung ge
Specialfiguren, der „Zwillinge", „Drillinge", „Vierlinge".
erhalten wir eine Auflösung durch Coordinaten, welche sich
wesentlich mit der Hugel'schen Methode deckt; man bildet
eine „magische Coordinatentafel" und eine „Ortstafel" und
aus diesen beiden nachher das gewünschte Quadrat zusa
Nachdem sodann noch die bereits von Michael Stifel beha
Aufgabe erörtert ist, ein gegebenes Quadrat so zu „rän
dass auch dem neuen grösseren Quadrate die Eigenschaf
magisches zu sein, gewahrt bleibt, wendet sich der Verfass

›nstruction magischer Polygone und betritt damit ein Gebiet, elches vor ihm noch gar nicht bebaut war; nur das mit wenigen 'orten abgemachte magische Rechteck hatte sich vorher schon armuth zum Studienobjecte ersehen. Man denke sich ein ·gelmässiges Vieleck, umgeben von einer Reihe anderer Vielecke ›n gleicher Seitenzahl und in ähnlicher Lage; dann soll eine ɜwisse Menge ganzer Zahlen so auf den Umfängen dieser Viel- :ke verteilt werden, dass stets die nämliche Summe heraus- ommt, man mag von jeder beliebigen Seite die darauf stehen- en Zahlen zusammen addiren. Nachfolgend sehen wir ein agisches Dreieck und ein magisches Fünfeck vor uns.

26. 3. 6. 10. 24. 27.
18. 20. 9. 11. 21. 2.
22. 15. 16. 17. 8. 5.
4. 7. 12. 13. 23.
1. 19. 14.
25.

1.
28. 26.
10. 15. 11.
25. 18. 17. 27.
4. 12. 6. 13. 3.
29. 19. 21. 22.
9. 14. 20. 11. 7.
24. 31.
2. 30. 8. 23. 5.

Für das Dreieck liefert Umlauf I.:

$$26+3+6+10+24+27 = 27+2+5+23+14+25$$
$$= 25+1+4+22+18+26 = 96,$$

mlauf II.:

$$20+9+11+21 = 21+8+13+19 = 19+7+15+20 = 61.$$

ür das Fünfeck liefert Umlauf I.:

$$1+28+10+25+4 = 4+29+9+24+2 = 2+30+8+23+5$$
$$= 5+31+7+22+3 = 3+27+11+26+1 = 68,$$

mlauf II.:

$$15+18+12 = 12+19+14 = 14+20+11 = 11+21+13$$
$$= 13+17+15 = 45.$$

iese Untersuchungen über magische Vielecke bilden unstreitig ı neues und schönes Capitel der angewandten Zahlentheorie. ıdlich kommt noch der vollkommene magische Würfel an die ·ihe; die Methoden, welche zu dessen Construction angewendet

werden, bestehen durchweg in Verallgemeinerungen derjenigen, welche sich bereits in der Ebene bewährten; ja es würde offenbar möglich sein, ohne Veränderung des Grundgedankens die Lösung auch auf ein Gitter von beliebig vielen Dimensionen auszudehnen. In dieser Consequenz liegt einer der Hauptvorzüge der Scheffler'schen Theorie.

Anhangsweise zeigt der Verfasser, dass die gewöhnlich nur als eine etwas abstruse Verstandesübung aufgefasste Lehre vom magischen Quadrat in der Combinatorik nicht selten eine zweckmässige Verwendung findet. Da ferner jedes Element eines solchen Quadrates als eine Summe von der Form $(x+y)$ betrachtet wird, so liegt es nahe, zu untersuchen, ob nicht auch die Substitution $(x+yi)$ sich mit Erfolg durchführen liesse. Es ist damit für die bekannte graphische Darstellung der complexen Zahlen die Möglichkeit gegeben, ihren ohnehin schon so reichen Wirkungskreis noch mehr zu erweitern. Gr.

Th. Harmuth. Ueber polydimensionale Zahlenfiguren. Hoppe Arch. LXIX. 90-108.

Der Herr Verfasser dehnt seine früheren Untersuchungen über magische Rechtecke und Parallelepipeda nunmehr auch auf den Raum von mehr als drei Dimensionen aus. (Vgl. F. d. M. XII. 1881. 145, 146.) Sn.

– –

Beweise weiterer Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Zahlentheorie von Moret-Blanc, Lionnet, S. Marks, T. Muir, H. L. Orchard, E. Rutter, G. Heppel, G. Eastwood, Morth, G. F. Walker, K. Gale, W. A. Whitworth, Sylvester, W. J. C. Sharp, C. Bickerdike, W. B. Grove, B. Easton, E. Buck, W. W. Taylor finden sich Nouv. Ann. (3) I. 475-476, 476-478; Ed. Times XXXVI. 24-25, 42-43, 48, 66-67, 97-98, 117-118; XXXVII. 24-25, 27, 44, 55-56, 101-102.

Capitel 2.

Theorie der Formen.

POINCARÉ. **Sur une extension de la notion arithmétique de genre.** C. R. XCIV. 67-69, 124-127.

Die Gauss'sche Einteilung der binären quadratischen Formen nach Ordnungen und Geschlechtern, die dann von Eisenstein auf die quadratischen ternären Formen übertragen wurde, wird hier auf beliebig hohe Formen mit beliebig vielen Variabeln ausgedehnt mittels der beiden Definitionen:

„Zwei algebraisch äquivalente Formen gehören derselben Ordnung an, wenn für beide der grösste gemeinsame Teiler ihrer Coefficienten der gleiche ist, und das Nämliche auch statt hat für die Coefficienten ihrer sämmtlichen invariantiven Bildungen, gleichgültig ob alle diese Formen mit oder ohne Polynomialcoefficienten geschrieben werden."

„Zwei solche Formen gehören demselben Geschlecht an, wenn sie „nach irgend einem Modul äquivalent" sind, d. h. wenn es eine ganzzahlige lineare Substitution der Variabeln giebt, deren Determinante in Bezug auf jenen Modul congruent Eins ist, und welche beide Formen, abgesehen von jenem Modul in einander überführt". Als erstes Ordnungs-Beispiel dienen die quadratischen Formen mit n Variabeln. Es werden drei „Ordnungscharactere" aufgestellt, die sich alle auf die Determinante Δ der Form stützen, von denen z. B. der erste aus den grössten gemeinsamen Teilern aller Unterdeterminanten (von Δ) derselben Ordnung besteht. Damit dann zwei gegebene Formen von derselben Ordnung seien, ist es notwendig und hinreichend, dass zwei der Charactere für beide Formen dieselben sind.

Zweitens werden die cubischen binären Formen in Ordnungen eingeteilt. Hier giebt es einen einzigen Ordnungscharacter, bestehend aus dem grössten gemeinsamen Teiler der Coefficienten der Form, sowie ihrer Hesse'schen, einmal mit, einmal ohne

Binomial-Coefficienten geschrieben, also im Ganzen aus vier Zahlen.

Als erstes Beispiel für die Geschlechtsdefinition werden wiederum die quadratischen Formen mit n Variabeln untersucht. Weiss man von zwei solchen Formen nur, dass sie derselben Ordnung angehören und die gleiche Determinante Δ besitzen, so müssen sie, um auch demselben Geschlecht anzugehören, nach irgend einer Potenz der ungraden Primfactoren von Δ, sowie nach irgend einer Potenz der Zahl Zwei äquivalent sein. Für das Erstere werden die Bedingungen allgemein angegeben, für das Letztere beschränkt sich der Verfasser auf ein Beispiel.

Als letztes Beispiel dienen wieder die cubischen binären Formen, von denen vorläufig mitgeteilt wird, wie sie sich in Geschlechter bezüglich der Moduln 2, 3 und 5 verteilen. Die Wichtigkeit dieser Ausdehnungen braucht wohl kaum bemerkt zu werden. My.

G. Battaglini e F. Brioschi. Relazione sulla memoria del Prof. R. de Paolis: „Sulla espressione di una forma binaria di grado n con una somma di potenze n^e". Rom., Acc. L. (3) VI. 165.

Die Besprechung wird nach dem Erscheinen der Arbeit selbst erfolgen. O.

Hermes. Ein Algorithmus zur Behandlung quadratischer Formen. Hoppe Arch. LXVIII. 432-439.

Geht die binäre Form (a_{n-1}, b_{n-1}, a_n) in bekannter Weise durch die Aequivalentsubstitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ in die benachbarte (a_n, b_n, a_{n+1}) über, so kann man den dritten Coefficienten a_{n+1} entweder mit Hülfe der Determinante D der ursprünglichen Form durch $\frac{b_n^2 - D}{a_n}$ oder mit Benutzung der Substitutionscoefficienten

rch

$$a_{n-1} + 2b_{n-1}\delta_n + a_n\delta_n^2$$

rstellen. Dies letztere kann man auch schreiben:

$$a_{n+1} = a_{n-1} - \delta_n r_n,$$

)

$$r_n = 2m_n - a_n\delta_n, \quad m_n = -b_{n-1}.$$

s kann also r_n als Rest einer Division aufgefasst werden, bei elcher a_m der Divisor und δ_n der Quotient ist, der ja bekanntch den Wert $\delta_n = \frac{b_{n-1} - b_n}{a_n}$ besitzt.

Darauf gründet sich ein von numerischen Ausrechnungen beeiteter Algorithmus, der hier eine ähnliche Rolle spielt, wie die ettendivision bei den linearen diophantischen Gleichungen.

My.

. Weber. Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Klein Ann XX. 301-330.

Wie der Herr Verfasser einleitend bemerkt, hat Dirichlet ine Methoden zum Beweise des Satzes, dass jede arithmetische eihe unendlich viele Primzahlen enthält, auf quadratische Formen it regulärer negativer Determinante angewandt. Hier werden an jene Methoden auf quadratische Formen ohne jede Einhränkung ausgedehnt und der Beweis in übersichtlichem Zuimmenhange vollständig dargestellt. Die h Classen von eigentch primitiven quadratischen Formen einer bestimmten nicht ıadratischen Determinante D werden, im Hinblick auf die von auss gegebenen Gesetze der Composition, als Elemente einer bel'schen Gruppe vom Grade h betrachtet; die Hülfssätze über ruppen (und Charaktere) finden sich in einem besonderen, vorgeschickten Paragraphen. Den „Kern des Beweises" bildet, wie i den entsprechenden Untersuchungen Dirichlet's, nur dass grade ser Punkt früher nie völlig erledigt wurde, der Nachweis, ss gewisse Reihen für ein gegebenes Argument einen bestimmı Grenzwert haben sollen; speciell, es sollen die Summen:

$$\sum (ax^2+2bxy+cy^2)^{-1-\varrho} - \frac{g}{\varrho},$$
$$\sum \frac{l(ax^2+2bxy+cy^2)}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}} - \frac{g}{\varrho^2}$$

für $\varrho = 0$ und irgend ein endliches g endliche Grenzwerte haben. Falls b^2-ac negativ ist, müssen x, y alle positiven und negativen ganzen Zahlen mit Ausnahme der Wertcombination 0, 0 durchlaufen, während für ein positives b^2-ac die Variabeln x, y alle ganzzahligen Werte annehmen, welche den Bedingungen genügen:

$$y \geqq 0, \quad x > \gamma y,$$

wo $\gamma > \beta > \alpha$, wenn α, β die reellen Wurzeln der Gleichung

$$ax^2+2bx+c = 0$$

sind; $a > 0$. Die Erledigung dieses Hauptpunktes geschieht durch Anwendung von zweifach unendlichen Thetareihen, gemäss einer Angabe des Herrn Dedekind; und zwar fand sich die anzuwendende Formel für den Fall negativer Determinanten bereits bei Rosenhain, während für positive eine analoge erst noch zu entwickeln war. In einem Schlussparagraphen werden die Formen zweiter Art und die quadratischen Determinanten einfach erledigt.

Sn.

Th. Pepin. Sur la classification des formes quadratiques binaires. Rom., Acc. P. d. N. L. XXXIII. 1881. 354-391.

Beziehungen der Classenzahl für eigentlich primitive und derivirte Formen. Lehrsätze über irreguläre Determinanten; z. B.: ist D eine solche, und ist p ihr Irregularitätsexponent, so ist auch Dm^2 irregulär und der Irregularitätsexponent durch p teilbar. Der Herr Verfasser erledigt einen Zweifel von Gauss, (D. A. art. 306. VIII.), ob es Determinanten unter — 10000 gebe, deren Irregularitätsexponent grösser als 3 sei, durch den Nachweis, es habe $-6075 = -243.25$ den Irregularitätsexponenten 9. Auch giebt er Methoden, um Determinanten mit vorgeschriebenen Irregularitätsexponenten zu bilden.

Sn.

Berger. Sur une application des nombres des classes des formes quadratiques binaires pour un déterminant négatif. Upsala, Berling.

Der Verfasser legt seiner Untersuchung den Ausdruck

$$S_m = \sum_{k=1}^{k=p} U_{m+4(k-1)p}$$

Grunde, wo $U_n = (-1)^{[\sqrt{n}]}$ ist (unter $[x]$ die grösste in x haltene ganze Zahl verstanden), dem er nach mannigfaltigen formungen die Gestalt giebt:

$$S_m = -\frac{1}{2} - \frac{p}{2}(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 2\left[\frac{m}{4p} - \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}\right]$$
$$+4\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\left\{\left[\frac{m}{4p}-\frac{k^2}{p}\right]-\left[\frac{m}{4p}-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{4}-\frac{k^2}{p}\right]\right\}.$$

ist eine positive, ungrade Primzahl.

Hier wird die Grösse $\frac{k^2}{p}$ gemäss der Gleichung umgewandelt:

$$\frac{k^2}{p} = \left[\frac{k^2}{p}\right] + \frac{r_k}{p},$$

)

$$k^2 \equiv r_k \pmod{p}.$$

Führt man noch das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{k}{p}\right)$ ein, so gegt man zu der bemerkenswerten, mit dem Ausdruck für S_m zu mbinirenden Hülfsgleichung

$$\sum_{k=1}^{k=\frac{p-1}{2}}\left\{\left[\frac{\beta-r_k}{p}\right]-\left[\frac{\alpha-r_k}{p}\right]\right\} = \frac{[\beta]-[\alpha]}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k>\alpha}^{k\leqq\beta}\left(\frac{k}{p}\right).$$

)

$$0 \leqq \alpha < \beta < p.$$

werden vier Fälle unterschieden:

$p \equiv 1 \pmod 4$ I. $0 \leqq m < p$, II. $p \leqq m \leqq 4p-1$,

$p \equiv 3 \pmod 4$ III. $0 \leqq m < 3p$, IV. $3p \leqq m \leqq 4p-1$.

Für den ersten z. B. erhält dann S_m die elegante Darstellung

$$S_m = +1+2 \sum_{k>\frac{m-p}{4}}^{k\leq\frac{m}{4}} \left(\frac{k}{p}\right).$$

und ähnlich in den drei anderen Fällen.

Die Grössen S lassen sich nun ganz und linear durch K_1 und K_2 ausdrücken, d. h. durch die Classenzahlen der quadratischen primitiven Formen erster Art von der Determinante $-p$, resp. $-2p$. So z. B. erhält man für $p\equiv 1 \pmod{8}$

$$S_0 = 1+K_1,\ S_p = -1+K_1,\ S_{2p} = -1-K_1,\ S_{3p} = -1-K_1,$$

$$S_{\frac{p-1}{2}} = 1+K_1+K_2,\ S_{\frac{3p-1}{2}} = -1-K_1,\ S_{\frac{5p-1}{2}} = -1+K_1+K_2,$$

$$S_{\frac{7p-1}{2}} = -1-K_1.$$

Diese Formeln gestatten folgende Anwendung:

Bezeichnet man mit $Q(x)$ die grösste ganze in x enthaltene Quadratzahl, so lässt sich der ursprüngliche Wert für S_m leicht auch so schreiben:

$$S_m = \sum_{k=1}^{k=p} (-1)^{Q[4(K-1)p+m]}.$$

Dann ist z. B. in den eben angeführten Formeln folgender Satz enthalten:

„Unter den p Quadratzahlen

$$Q(0)\ Q(4p)\ Q(8p)\dots\ Q[4(p-1)p]$$

giebt es

$$\frac{p+1+K_1}{2};\ \frac{p+1}{2},\ \frac{p+1+K_1}{2},\ \frac{p+1-2K_1}{2}$$

grade Zahlen, je nachdem

$$p\equiv 1,\ 3,\ 5,\ 7 \pmod{8}.“$$

Aus der Eigenschaft von K_1 und K_2, wesentlich positiv zu sein, erhalten diese Sätze noch nähere Bestimmungen, deren rein arithmetischer Beweis schwer sein dürfte.

Zum Schluss folgt noch eine Tabelle mit den Zahlen K_1, K_2 für Primzahlen unter 100. My.

. L. CHARVE. De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. Ann. d. l'Éc. Norm. (2) XI. 119-135.

Es wird auf diese Formen die Methode ausgedehnt, die ›lling für die Reduction der ternären positiven Formen aufgeellt hat.

Durch eine ganzzahlige Substitution von der Determinante ± 1 ›he die gegebene Form f über in eine äquivalente F. Man hre dann in f eine fünfte Variable u ein, indem man x, y, z, t setzt durch $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$ und analog in F die neuen ariabeln X, Y, Z, T durch $X-U$, $Y-U$, $Z-U$, $T-U$. So gengt man zu zwei Formen φ, Φ, die man so schreiben kann, ass sie sich aus den (zehn) Quadraten der Differenzen der fünf ariabeln linear zusammensetzen, und die für $u=0$, resp. $U=0$ ieder rückwärts in f, resp. F übergehen. Die Substitution, die ann φ in Φ überführt, ist leicht angebbar: ist ihre Determinante leich ± 1, so sind φ und Φ äquivalent.

Die Aufgabe ist nun, diese neue Form φ mit fünf Variabeln uf ihre reducirte Form zu bringen. Nennt man die Coeffiienten succ. $a, b, c, \dots, l$, so heisst die Form eine reducirte, venn irgend eine der drei (gleichwertigen) Bedingungen erüllt ist:

1) Alle Coefficienten sind positiv;

2) a ist allein negativ und dem absoluten Werte nach kleiner, ls b, c, d, e, f, g;

3) a und h sind allein negativ: daher ist a, absolut genomnen, kleiner als b, c, d, e, f, g; und h absolut kleiner als $\cdot, c, e, f, k, l$; endlich ist noch der absolute Wert von $a+h$ leiner als b, c, e, f.

Es giebt immer nur eine zu φ äquivalente Form, die eine ieser Bedingungen und damit alle erfüllt. (Dabei sind aber die wischen den Variabeln möglichen Permutationen ausser Acht elassen.) Die erforderliche Substitution setzt sich aus folgenden vei einfachen Substitutionen zusammen:

$$x = T-Z, \quad x = Y-X,$$
$$y = X-U, \quad y = U-T,$$
$$z = Y-U, \quad z = U-Z,$$
$$t = T-U, \quad t = Y-T,$$
$$u = 0, \quad u = 0.$$

My.

E. W. SYMONS, J. O'REGAN, R. TUCKER, A. MARTIN. Solutions of a question (6688). Ed. Times XXXVI. 56.

Sind a, b, c drei solche Grössen, dass die Summe zweier immer grösser als die dritte ist, und sind x, y, z drei Grössen deren Summe positiv ist, so ist x, y, z negativ, wenn

$$a^2x^{-1}+b^2y^{-1}+c^2z^{-1} = 0.$$

O.

Capitel 3.

Kettenbrüche.

Vierter Abschnitt.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Combinationslehre.

G. B. Marsano. Sul numero delle combinazioni a tre a tre dei successsivi intieri 1, 2, 3,..., B, aventi ciascuna una somma non maggiore di C. Altra nota. Batt. G. XX. 249-269.

Die vorhergehende Note, auf welche die gegenwärtige Bezug nimmt, ist zu finden l. c. XIX. 156. (s. F. d. M. XIII. 1881. 150.). Die daselbst gestellte und gelöste Aufgabe nahm die Anzahl der aus der Reihe 1, 2, ..., B gewählten Elemente beliebig. Sie wird jetzt auf 3 beschränkt, und die Aufgabe direct durch Discussion gelöst. Es ergiebt sich eine Tabelle über die Bestandteile der gesuchten Zahl, welche viele Fälle unterscheidet.

H.

J. Bourget. Sur les permutations de n objets et sur leur classement. C. R. XCV. 508-511.

Der Verfasser stellt folgendes neue Successionsgesetz der Permutirung von n Elementen 1, 2, 3, ..., n auf. Man permutire cyklisch $n-1$, n; jedes der zwei Glieder des Cyklus stelle man hinter $n-2$ und permutire die drei Elemente cyklisch; jedes der sechs Glieder dieses Cyklus stelle man hinter $n-3$ und permutire die vier Elemente cyklisch, u. s. w. Die schliessliche cyklische

Permutation von 1 und jeder der $(n-1)!$ vorher erhaltenen Permutationen ergiebt sämmtliche $n!$ Permutationen in der gedachten Reihenfolge. Die Aufgabe nun, die ϱ^{te} Permutation bei dieser Anordnung anzugeben, führt auf folgenden Algorithmus, für welchen der Beweis nicht mitgeteilt ist. Man dividire ϱ durch n und notire den Quotienten Q_n und den Rest R_n; man dividire Q_n+1 durch $n-1$ und notire den Quotienten Q_{n-1} und den Rest R_{n-1}; man dividire $Q_{n-1}+1$ durch $n-2$ und notire Quotienten und Rest, u. s. f., bis man die Reihe der Reste $R_1, R_2, \dots, R_n$ bestimmt hat. Die gesuchte ϱ^{te} Permutation laute $a_1\ a_2 \dots a_n$. Dann findet man a_k durch Addition der Reste in der bestimmten Folge

$$a_k = R_{n-k+1} + R_{n-k+2} + \cdots + R_n,$$

wenn man h so oft von der bis dahin erhaltenen Summe subtrahirt, als

$$R_{n-k+1} + \cdots R_h > h$$

wird. H.

J. Bourget. Sur un problème de permutations successives nommé battement de Monge. Résal J. (3) VIII. 413-434.

Die Permutation, welche die Elemente

$$1, \quad 2, \quad 3, \dots n, \quad n+1, \dots 2n-1, \quad 2n$$

in

$$2n,\ 2n-2,\ 2n-4, \dots 2, \quad 1, \dots 2n-3,\ 2n-1$$

überführt, heisst Battement de Monge. Nach einer gewissen Anzahl von Wiederholungen derselben, welche jedem Werte von n zukommt, kehrt stets dieselbe Ordnung wieder. Ein solches System wiederholter Battements de Monge bis zum Schluss der Periode hat mancherlei Eigenschaften, welche hier entwickelt werden. Diese sind untersucht worden von Bachet, Monge, Bouniakowski, Bellavitis und Thomas de Saint-Laurent. Der Letztgenannte hat dabei Fehler begangen. Die einfacheren unter den Eigenschaften sind folgende: Stellt man die Reihen eines Systems über einander, so steht unter jedem Elemente in allen Reihen dasselbe Element. Die Columnen (Verticalreihen) sind

so cyklische Permutationen von einander, soweit sie irgend ein
ement gemein haben. In manchen Columnen zerfällt der
ɏklus in mehrere Teilcyklen. In jeder Columne, von der Wie-
erkehr an nach oben gelesen, zeigt das k^{te} Element, welches h
ute, an, dass das erste Element in der k^{ten} Reihe die h^{te} Stelle
nnimmt. Es wird untersucht, in welchem Falle ein Element
ständig seine Stelle behält; hier muss $n = 3p-1$ sein. Ferner
er Fall, wo zwei Elemente wechseln. Ferner das Minimum der
eriodenlänge. Die Längen der einzelnen Cyklen sind Teiler des
yklus, welcher das Element 1 enthält. Ein unveränderliches Element
it zweimal soviel Elemente hinter sich als vor sich. H.

ANAT. Ueber Permutationen der Zahlen des dekadischen Systemes. Pr. Drohobycz. Galizien. (Polnisch). I. Teil.

Es sei

$$N = a_n \,.\, 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 \,.\, 10^2 + a_1 \,.\, 10 + a_0$$
$$+ b_1 \,.\, 10^{-1} + b_2 \,.\, 10^{-2} + \cdots + b_m \,.\, 10^{-m};$$

und m beliebige ganze Zahlen, a und b ganze Zahlen aus der
eihe 0, 1, 2, 3, ..., 9. Permutirt man auf verschiedene Weisen die
oefficienten a und b, so erhält man verschiedene Zahlen P.
erechnung der Anzahl aller Zahlen, die nach 2, 3, ... μ-maliger
ertauschung der Ziffern entstehen, und Bestimmung der Differenz
vischen der gegebenen und jeder der neu entstandenen Zahlen
t das Ziel dieser Arbeit. Dn.

. HEPPEL. Solution of two questions (6502, 6589). Ed. Times XXXVI. 57-62.

In

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

llen die Buchstaben 16 Zahlen einer arithmetischen Reihen dar,
welche die Summe des Anfangs- und Endgliedes s ist. Sie

sind so geordnet, dass $2s$ die Summe von jeder der 24 Gruppen *abcd,... aeim,... afkq,...* etc. ist. Es wird die Anzahl der Gruppirungen bestimmt, die diesen Bedingungen genügen.

O.

C. F. MALMSTEN. Generalisering af det s. k. „Femtonspelet“ (Boss Puzzle'spel). Göteborg. Handl. 1882. 75-105.

Der Verfasser behandelt hier mathematisch eine Verallgemeinerung des bekannten „Fünfzehn-Spiels“, welche man erhält, wenn man mit n^2-1 statt mit 15 Zahlen operirt; er zerteilt die möglichen Fälle in zwei Classen, „0-Gruppen“ und „1-Gruppen“, und zeigt, dass eine Gruppe der ersten Classe nimeals in eine der zweiten transformirt, dass aber eine beliebige Gruppe immer in eine beliebige Gruppe derselben Classe verwandelt werden kann, und dass es also in jedem Falle möglich sei, anzugeben, ob eine Lösung des Spiels zu finden oder nicht zu finden ist. Schliesslich deutet der Verfasser an, dass eine noch weitere Verallgemeinerung möglich sei, indem seine Sätze auch für $n.m-1$ Zahlen gelten.

E.

H. M. TAYLOR und R. C. ROWE. Note on a geometrical theorem. Lond. M. S., Proc. XIII. 102-106.

Die Arbeit ist eine Erweiterung der von Euler, J. A. de Segner, Lamé, O. Rodrigues, M. J. Binet und E. Catalan behandelten Aufgabe: Auf wie viele Arten lässt sich ein Vieleck durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in Dreiecke zerlegen? Voraus gehen historische und literarische Notizen. Die Lösung des Urproblems lautet:

$$P_n = \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!},$$

wo $n+2$ die Seitenzahl, P_n die gesuchte Zahl ist. Der Verfasser setzt nun statt der Dreiecke allgemein p-Ecke und fragt nach der Anzahl P_n der Zerlegungen des $[(p-2)n+2]$-Ecks in

..iche durch Diagonalen, die sich nicht schneiden. Er findet die ..elation

$$P_n = \Sigma P_a P_b P_c \ldots,$$

..o a, b, c, ... **die möglichen ganzen Zahlen einschliesslich 0, für ..elche**

$$a+b+c+\cdots = n-1,$$

..nd deren Anzahl stets $= p-1$ **ist, bedeuten. Setzt man nun**

$$f(x) = 1+P_1x+P_2x^2+\cdots,$$

..o findet man bei obiger Relation:

$$f(x) = 1+xf(x)^{p-1}.$$

Entwickelt man f **in die Lagrange'sche Reihe nach Potenzen ..on** x, **so ergiebt die Coefficientenvergleichung:**

$$P_n = \frac{[(p-1)n]!}{n![(p-2)n+1]!}$$

..ls Lösung der allgemeinen Aufgabe. H.

LAISANT. Remarques sur la théorie des régions et des aspects. S. M. F. Bull. X. 52-55.

Zieht man durch je zwei unter n beliebigen Punkten in der Ebene unbegrenzte Gerade, so wird die Ebene in ϱ Regionen geteilt. Unter diesen sind

$$\varrho_{\prime} = \frac{1}{8}(n-1)\,(n-2)\,(n^2-3n+4)$$

begrenzt, und

$$\varrho_{i} = n(n-1)$$

nicht begrenzt. Von allen Punkten einer Region gesehen erscheinen die n Punkte in derselben Reihenfolge. Daher ist ϱ eine obere Grenze der möglichen verschiedenen Aspecte. Die Zahl der Aspecte hängt nicht bloss von n, sondern auch von der Lage der n Punkte ab. Ihre Bestimmung ist eine schwierige Aufgabe, die hier nicht in Angriff genommen wird.

H.

kunst und der Ingenieurwissenschaften im weitesten Sinne, um denselben den Weg zu zeigen, auf welchem sie die durch Beobachtungen und Messungen gewonnenen Daten, den Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend verwerten und anwenden können.

Es werden daher die allgemeinen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung kurz abgeleitet, und dann wird die grosse Wichtigkeit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Beobachtungsresultate, auf die Ermittelung der in denselben liegenden Fehler und auf die zur Erklärung der Erscheinungen aufgestellten Hypothesen gezeigt.

Der zweite Abschnitt handelt von den Beziehungen zwischen der Grösse der Beobachtungsfehler und der Wahrscheinlichkeit ihres Vorkommens. Der Hauptsatz dieser Beziehungen wird aus den Binomial-Coefficienten abgeleitet, indem der Beobachtungsfehler als die Differenz zwischen den Summen der in unendlicher Anzahl auftretenden positiven und negativen kleinsten Fehler aufgefasst wird. Die Methode der kleinsten Quadrate mit Anwendungen und praktischen Regeln für die Ausführung der Rechnung bildet den dritten Abschnitt, während der vierte der Erläuterung des mittleren und wahrscheinlichen Fehlers, der Wahrscheinlichkeit der ermittelten Constanten, ihrer wahrscheinlichen Fehler etc. gewidmet ist. Im fünften Abschnitt giebt der Verfasser einige Beispiele von der Anwendung der von ihm vorgetragenen Lehren, und im sechsten Abschnitt zeigt er specieller die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung beim Nivelliren. Der Anhang enthält eine Quadrat-Tabelle, eine Tabelle der relativen Wahrscheinlichkeit der Fehler und eine Tabelle der Wahrscheinlichkeit des Ueberschreitens verschiedener Fehlergrenzen.

Aus dieser Inhaltsübersicht wird ersichtlich, dass der Verfasser überall den praktischen Zweck in's Auge fasst, und dem entsprechend hat er den Stoff mit grossem Geschick behandelt. Die theoretische Begründung der einzelnen Sätze ist klar und präcise und vermeidet geflissentlich jedes Eingehen auf Nebenfragen, welche von der Hauptsache abführen.

Die dritte Auflage bringt manche Zusätze und Aenderungen,

m, wie der Verfasser in dem Vorwort hervorhebt „das Verändnis zu erleichtern und möglichen Bedenken vorzubeugen." ie Anwendungsbeispiele sind zum Teil verändert. Ls.

. BERTRAND. Sur la théorie des épreuves répétées.
C. R. XCIV. 185-186.

Der Verfasser giebt folgende Ableitung des Bernoulli'schen atzes. Es seien p und q die Wahrscheinlichkeiten zweier entgengesetzter Ereignisse, von denen das Eine oder das Andere ntreffen muss; mithin giebt die Entwickelung des Binoms

$$(p+q)^\mu = \Sigma A_k p^k q^{\mu-k}$$

e Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Combinationen, welchen die beiden Ereignisse bei μ Versuchen auftreten innen. Es wird angenommen, dass Jemand sich verpflichtet be, nach μ Versuchen die Summe $\left(\frac{n}{\mu}-p\right)^2$ zu bezahlen, wo n Anzahl der Fälle bezeichnet, in denen das Ereignis, dessen ahrscheinlichkeit p ist, aufgetreten.

Die mathematische Hoffnung E desjenigen, dem das Verrechen gemacht worden, ist augenscheinlich gleich

$$\Sigma\left(\frac{k}{\mu}-p\right)^2 A_k p^k q^{\mu-k}$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\Sigma k^2 A_k p^k q^{\mu-k} - \frac{2p}{\mu}\Sigma k A_k p^k q^{\mu-k} + p^2 \Sigma A_k p^k q^{\mu-k};$$

d da, wie man leicht findet,

$$\Sigma A_k p^k q^{\mu-k} = 1,$$
$$\Sigma k A_k p^k q^{\mu-k} = \mu p,$$
$$\Sigma k^2 A_k p^k q^{\mu-k} = \mu p + \mu(\mu-1)p^2,$$

ergiebt sich

$$E = p\frac{(1-p)}{\mu} = \frac{pq}{\mu}.$$

t wachsendem μ convergirt also E gegen 0, und folglich muss ch $\left(\frac{n}{\mu}-p\right)$ mit wachsendem μ gegen 0 convergiren.

Ls.

Em. Barbier. Deux moyens d'avoir π au jeu de pile ou face. C. R. XCIV. 1461-1463.

Werden $2n$ Münzen geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass n Münzen auf die Bildseite, n Münzen auf die Schriftseite fallen:

$$P = \frac{2n.2n-1\ldots n+1}{n!\ 2^{2n}} = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2^n},$$

und mithin unter Anwendung der Formel von Wallis

$$P \text{ näherungsweise } = \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$

1. Werden mit den $2n$ Münzen unendlich viele Würfe gemacht, und nennt man die durchschnittliche Anzahl der Würfe, unter denen einer ist, bei welchem n Münzen auf die Bildseite, n Münzen auf die Schriftseite fallen, M, so folgt

$$M = \frac{1}{P}, \text{ also } \frac{M^2}{n} = \pi.$$

2. Entwickelt man für eine unendliche Zahl von Würfen die Differenz der Münzen, welche Schrift und Bild zeigen, wobei die Differenz stets positiv genommen wird, wenn sie nicht gleich Null ist, und nennt man den Mittelwert dieser Differenz D, so ergiebt sich

$$D = 2nP, \text{ also } \frac{4n}{D^2} = \pi.$$

Die Werte $\frac{M^2}{n}$ und $\frac{4n}{D^2}$ geben auch bei einer endlichen Anzahl von Versuchen Näherungen für π. Ls.

Weitere Lösungen von Aufgaben über Wahrscheinlichkeit von Seitz, Matz, B. Easton, D. McAlister, McFarlane, S. Tebay, Ch. Ladd, W. A. Whitworth, J. O'Regan, W. H. Blythe, G. Heppel, E. Blackwood, K. Gale finden sich Ed. Times XXXVI. 50, 85, 94-96; XXXVII. 40-42, 52, 67, 68, 71, 121-122.

O.

L. Vogler. Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Das Buch ist wesentlich für praktische Geometer bestimmt und behandelt die Vorschriften der Ausgleichungsrechnung mit einer dem genannten Zwecke entsprechenden Vollständigkeit und Ausführlichkeit unter Einfügung zahlreicher Beispiele. Da der Inhalt materiell nichts Neues giebt, so sei hier nur erwähnt, dass die Darstellung mit ganz elementaren Hülfsmitteln operirt und wohl geeignet ist, solche Leser in die Methode der kleinsten Quadrate einzuführen, denen es wesentlich nur auf die praktische Anwendung, jedoch nicht auf eine vollkommen strenge Begründung der Principien ankommt. B.

P. van Geer. Over het gebruik van determinanten by de methode der kleinste kwadraten. Nieuw Arch. IX. 180-188.

Eine frühere Arbeit des Verfassers über die Anwendung der Determinanten bei der Methode der kleinsten Quadrate (s. F. d. M. VII. 1875. 114) und eine Arbeit Glaisher's in den Monthly Notices of the R. Astron. Society (F. d. M. XIII. 1881. 162) haben die Veranlassung zu der vorliegenden Note gegeben, welche dieselbe Aufgabe behandelt. Einige der in diesen Arbeiten erhaltenen Resultate und Eigenschaften sind bereits in einer Abhandlung von Jacobi: De formatione et proprietatibus determinantium (Crelle J. Bd. XXII. p. 285) mitgeteilt. G.

Th. Wittstein. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Astr. Nachr. 2446.

Wenn y eine gegebene nicht lineare Function der gesuchten Unbekannten, M den beobachteten Wert von y, und p sein Gewicht bedeutet, so verlangt die gewöhnliche Rechnungsvorschrift die Einführung genäherter Werte für die Unbekannten, um den Fehlergleichungen die lineare Form geben zu können. Diese Substitution lässt sich, wie gezeigt wird, umgehen, sobald eine

bestimmte Function $f(y)$ von y in Bezug auf die Unbekannten linear ist; man hat nur nötig, den in der Form

$$f(M) = f(y)$$

angesetzten Fehlergleichungen das Gewicht

$$p_1 = \frac{p}{\left(\frac{df(M)}{dM}\right)^2}$$

zu geben. B.

Th. Wittstein. Ein Zusatz zur Methode der kleinsten Quadrate. Schlömilch Z XXVII. 315-317.

Anknüpfend an die Schwierigkeiten, denen man begegnet, wenn man die Methode der kleinsten Quadrate in solchen Fällen anwenden will, in welchen die Function, von welcher eine Reihe beobachteter Werte vorliegt, in Bezug auf die zu bestimmenden Constanten nicht linear ist, also entweder eine höhere algebraische oder eine transcendente ist, zeigt der Verfasser, wie es für eine gewisse Klasse von Functionen möglich ist, diese Schwierigkeit zu beseitigen, nämlich für alle solche Functionen, die sich durch die gewöhnlichen Operationen in eine andere, welche linear ist, umformen lassen.

Der Verfasser stützt sich dabei auf einen Lehrsatz, den er folgendermassen ausdrückt: Wenn von einer Function y eine Reihe von bestimmten Werten mit den Gewichten p versehen, gegeben ist, so kann man zur Bestimmung der in der Function enthaltenen unbekannten Constanten, anstatt die Summe der Fehlerquadrate dieser Function zu einem Minimum zu machen, vollkommen correct auch so verfahren, dass man die Summe der Fehlerquadrate einer beliebigen Function von y, welche $f(y)$ sei, zu einem Minimum macht, dabei jedoch jeder Beobachtung ein Gewicht p' beilegt, welches zu dem vorigen p in der Beziehung steht:

$$\frac{p}{p'} = k\left(\frac{df(M)}{dM}\right)^2,$$

ro k eine willkürliche und für alle Beobachtungen identische ositive Constante bedeutet.

Der Beweis gründet sich darauf, dass man an die Stelle es Verhältnisses der kleinen Differenzen $f(y)-f(M)$ und $y-M$ as Verhältnis ihrer Differentiale setzen darf.

Schliesslich zeigt der Verfasser die Anwendung seines Verahrens an einigen Beispielen. Ls.

Ĵ. A. Maggi. Intorno ad alcune formole relative al calcolo degli errori d'osservazione. Lomb. Rend. (2) XV. 351-358.

Der Verfasser giebt die Ableitung für die Berechnung der rahrscheinlichsten Werte eines Systems von Unbekannten, welche 1 linearer Form in einer Function auftreten, wenn Werte dieser 'unction durch überzählige Beobachtungen gegeben sind. Durch Einführung des Präcisions-Modulus und des mittleren Beobach-ungsfehlers wird gezeigt, welchen Gesetzen die Fehler dieser rahrscheinlichsten Werte unterworfen sind, und endlich wird der nittlere Beobachtungsfehler aus den Resultaten der Beobachtung estimmt. Ls.

P. Harzer. Ueber die Wahrscheinlichkeit, einen Cometen aufzufinden als Function seines geometrischen Winkelabstandes von der Sonne. Astr. Nachr. 2453.

Die genannte Aufgabe ist in dem Briefwechsel zwischen Bessel und Olbers behandelt, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Helligkeit des Cometen umgekehrt proportional den Quadraten seiner Abstände von Sonne und Erde ist. Verfasser zeigt, dass das von Olbers gefundene Resultat nicht correct ist, und leitet unter gewissen, praktisch zulässigen Vereinfachungen für die Wahrscheinlichkeit, dass der Comet in dem Winkelabstande $\pi-\varphi$ von der Sonne entdeckt werde, den angenäherten Ausdruck

$$C\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

ab, wo C eine Constante ist, deren Wert von dem Flächenstück der Himmelskugel abhängt, das man, als bei vorliegender Aufgabe auszuschliessen, um die Sonne abzugrenzen hat.

B.

T. W. WRIGHT. On the computation of probable errors. Anal. IX. 74-78.

Tafeln für die Werte der Multiplicationsconstanten in Bessel und Peters' Formeln für den wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung und des arithmetischen Mitteln von m Beobachtungen. Schreibt man

$$r = \frac{0,6745}{\sqrt{m-1}}\sqrt{[\nu^2]} = \lambda_1\sqrt{[\nu^2]},\quad r_0 = \frac{0,6745}{\sqrt{m(m-1)}}\sqrt{[\nu^2]} = \lambda_2\sqrt{[\nu^2]}$$

$$r = \frac{0,8453}{\sqrt{m(m-1)}}[\nu = \lambda'[\nu,\quad r_0 = \frac{0,8453}{m\sqrt{m-1}}[\nu = \lambda''[\nu,$$

so geben die Tafeln die Werte von λ_1, λ_2, λ' und λ'' für $m=$ bis $m = 100$ auf vier Decimalstellen. Jn. (O.).

E. L. DE FOREST. On an unsymmetrical probability curve. Anal. IX. 135-141, 161-168.

Der Verfasser sucht zu zeigen, dass die Wahrscheinlichkeitscurve von der Form

$$y = \frac{a dx}{\Gamma(a^2 b)}(ax)^{a^2 b - 1} e^{-ax}$$

sei, wo a und b constant sind. Jn. (O.).

E. L. DE FOREST. Law of error in the position of a point in space. Anal. IX. 33-40, 65-74.

Der Verfasser sucht ein Wahrscheinlichkeitsgesetz aufzustellen, ohne die Annahme, dass der Fehler in einer Richtung unabhängig ist von dem Fehler in einer anderen zur ersten senkrechten Richtung. Jn. (O.).

re Lösungen von Aufgaben über mittlere Werte W. J. C. SHARP, J. L. KITCHIN, C. MORGAN, ASTON, H. G. DAY, S. TEBAY, T. R. TERRY, K. GALE, z, D. EDWARDES, MATZ finden sich Ed. Times XXXVI. , 47, 52, 53, 53, 71-72, 84; XXXVII. 42-44, 109-111, 120.

O.

XIMOWITSCH. Interpolation der impliciten Funcen und die Berechnung der Wurzeln. Kazan Ber. 1882. (Russisch).

wird hier zur Interpolation der Function x von y, die lie Gleichung

$$y = f(x)$$

ist, die bekannte Interpolationsformel von Newton für ne Zwischenräume angewendet unter der Voraussetzung, r Wert von x zwischen solchen von seinen Werten a und b wischen welchen die Gleichung $f'(x) = 0$ keine Wurzeln ann wird eine Regel zur Beurteilung der Genauigkeit dieser gegeben, gestützt auf ein Lemma über Newton's Intersformel, die nur im letzten § III. bewiesen wird; ferner s Restglied dieser Formel gefunden und zuletzt gezeigt, dem Falle, wo die zur Interpolation gebrauchten Werte sich unendlich nahe rücken, diese Formel in die von mit Lagrange'schem Restgliede übergeht. Im § II werden beiden erwähnten Formeln zwei andere, zur Berechnung rzeln der Gleichung $f(x) = 0$ dienende Formeln gewonnen, nen die zweite die von Euler in seiner Differentialrechd. II. Cap. 9 § 234 gegebene ist, nur dass sie jetzt mit Restgliede erscheint.

Ty.

WOODWARD. On the actual and probable values nterpolated values derived from numerical tables neans of first differences. Anal. IX. 143-149, 169-175.

r Verfasser betrachtet vorzugsweise interpolirte Werte, in

denen die Correction der genaue Proportionalteil der Tafeldifferenz ist, so dass der Fehler $(1-t)\varepsilon_1+t\varepsilon_2$ ist, wenn ε_1 und ε_2 die Fehler der Tafelwerte sind. Verfasser findet als den wahrscheinlichen Fehler r:

$$r=\frac{1}{4}(1-t),\qquad \text{wenn } 0<t<\frac{1}{3},$$

$$r=\frac{1}{2}\left[1-\sqrt{2t(t-1)}\right],\qquad ,,\ \frac{1}{3}<t<\frac{2}{3},$$

$$r=\frac{1}{4}t,\qquad ,,\ \frac{2}{3}<t<1.$$

Er betrachtet ferner die gewöhnlichen interpolirten Werte, in denen die Correction aus der nächsten Einheit in der letzten Stelle der Tafelwerte gezogen ist, und findet für $t=\frac{1}{2}$ den wahrscheinlichen Fehler 0,29, im Gegensatz zu Bremiker, der in der Einleitung zu seinen sechsstelligen Tafeln 0,26 dafür giebt. Zur Probe wurden 500 solche Werte aus einer fünfstelligen Logarithmentafel genommen. Es ergab sich, dass 49,8 pro 100 kleiner und 50,2 pro 100 grösser als 0,29 waren. Der Verfasser findet $r=0{,}26$ für $t=\frac{1}{3}$ und $r=0{,}27$ für $t=\frac{1}{4}$.

Jn. (O.).

C. P. J. van den Berg. The theory of wages. Transl. fr. the Dutch. London. E. Marlborough & Co.

Ausgehend von der mathematischen Betrachtungsweise, welche Stanley Jevons, Léon Walras und d'Auluis de Bourouill in die Behandlung der Probleme der National-Oekonomie eingeführt haben, und fussend auf den von diesen aufgestellten Grundsätzen untersucht der Verfasser die Lohnfrage. Er zeigt, dass die verschiedenen früher aufgestellten Behauptungen und Erklärungen einer wissenschaftlichen Beleuchtung nicht stand halten, und dass die Höhe der Löhne unabhängig von jeder Willkür durch natürliche Gesetze auf Grund des Verhältnisses zwischen dem Vorrat von Capital zu dem Vorrat von Arbeitskraft geregelt wird.

s giebt für jeden Lohnsatz einen Gleichgewichtszustand für das erhältnis des Arbeiters zum Capitalisten, und somit würde die age nach der Höhe der Löhne unbestimmt bleiben, wenn zu r Gleichgewichtsbedingung nicht noch eine fernere Bedingung nzukäme. Diese ergiebt sich aus der Tatsache, dass für die rzeugung einer bestimmten Quantität von Producten Capital und rbeit in verschiedener Weise mit einander combinirt werden önnen, und dass diejenige Combination gewählt werden wird, elche die vorteilhafteste ist; diese Combination ist wieder vom ohnsatz abhängig.

Der Zweck des Verfassers gipfelt darin, zu zeigen, dass bei eier Concurrenz zwischen Capitalisten und Arbeitern der Lohnatz die höchste Höhe erreichen muss, welche mit Notwendigeit aus den vorhandenen socialen Beziehungen hervorgeht.

Ls.

ı. Morgenbesser. Die mathematischen Grundlagen des gesammten Versicherungswesens. Berlin. Puttkammer und Mühlbrecht.

Das Buch erfüllt keineswegs das, was der Titel desselben erspricht, denn es enthält nur eine Zusammenstellung der am äufigsten vorkommenden Formeln für die Berechnung der Lebensersicherungs-Prämien, deren Gebrauch, wie der Verfasser in dem orwort selbst sagt, es dem Lebensversicherungsbeamten mögich macht „ohne zeitraubendes Nachschlagen in voluminösen Büchern und weiteres Eingehen in die Theorie der betreffenden ersicherung die Höhe des fraglichen Betrages sofort zu ermitteln“.

Ob für eine solche „Zusammenstellung“ ein Bedürfnis voranden ist, vermögen wir nicht zu beurteilen. Neues haben wir n dem Buche nicht gefunden. Zu loben ist es indes, dass der erfasser die von den Lebensversicherungstechnikern im Jahre 864 vorgeschlagene Bezeichnungsweise adoptirt hat.

Ls.

Institute of Actuaries. Textbook of the principles of interest (including annuities certain), life annuities and assurances, and their practical application. Part I. Wm. Sutton. Interest including annuities certain. G. King. The theory of finance. London. C. & E. Layton.

Diese beiden Erscheinungen sind nach verschiedenen Richtungen so nahe mit einander verwandt, dass es erlaubt sein wird, um Wiederholungen zu vermeiden, sie gemeinsam zu besprechen.

Der Mangel eines vollständigen Lehrbuchs der Lebensversicherungstechnik, in welchem die modernen Anschauungen und Methoden ihre Berücksichtigung finden, hatte schon vor mehreren Jahren das Institute of Actuaries veranlasst, sich mit der Herausgabe eines solchen zu beschäftigen und Herrn W. Sutton damit zu beauftragen.

Der erste Teil dieses mit Spannung erwarteten Werkes, dem von vornherein ein autoritativer Charakter gesichert ist, liegt jetzt vor. Derselbe enthält eine vollständige Theorie der Zinsrechnung mit Einschluss der unbedingten Renten und umfasst 163 Seiten und einen Anhang von elf Seiten. Man darf aber keineswegs glauben, dass die einzelnen Fragen mit besonderer Breite behandelt würden, oder dass der Autor Ueberflüssiges oder nicht dahin Gehöriges in den Kreis seiner Betrachtungen gezogen hätte. Im Gegenteil, Herr Sutton hat es verstanden, sich überall der grössten Kürze, welche mit einer erschöpfenden Darstellung vereinbar ist, zu befleissigen, so dass eine gedrängtere Behandlung kaum möglich gewesen wäre, wenn die Absicht, überall auf eine praktische Verwertung der dargestellten Sätze zu verweisen, erreicht werden sollte.

Der Stoff ist in sieben Capitel gegliedert: I. Zinsen. Betrag eines Capitals mit Zinsen. Gegenwärtiger Wert einer später fälligen Summe. Discont. II. Renten. a) Rente und Zinsen jährlich zahlbar; b) Rente und Zinsen in gleichen aber unterjährlichen Terminen zahlbar; c) Rente und Zinsen in Perioden von verschiedener Dauer zahlbar. III. Renten, bei denen die Beträge in den einzelnen Terminen ungleich sind, die Termine selbst constant oder veränderlich. IV. Bestimmung des Zinsfusses, wenn das zurückgezahlte Capital dem vorgeschossenen gleich

. Näherungsmethoden. Die Bestimmung des wirklich gezahlten nsfusses, wenn das zurückgezahlte Capital von dem Betrag des rgeschossenen verschieden ist. V. Praktische Beispiele und Erterungen. VI. Die Anwendung der höheren Analysis auf die heorie der Zinseszinsen. VII. Ueber Zinsentabellen.

Fast gleichzeitig mit dem Textbook ist die Arbeit von King erhienen. Dieselbe bezeichnet sich als eine kurze Abhandlung über e Lehre von den Zinsen und den unbedingten Renten und bildet ie No. 8 der neuen Reihenfolge der Transactions of the Actuarial ociety of Edinburgh. Das Buch ist hervorgegangen aus den orlesungen, welche von dem Verfasser zur Vorbereitung auf as Mittelexamen bei dem Institute of Actuaries gehalten werden. iese Vorlesungen umfassen auch die mathematische Theorie er Lebens-Versicherungsrechnung, und der Verfasser hatte rsprünglich die Absicht gehabt, das ganze Gebiet dieser Vorsungen unter dem Titel Elements of Actuarial Science zu beandeln. Dieser Plan ist jedoch aufgegeben, denn nachdem der rste Teil des Textbooks veröffentlicht worden, hat Herr Sutton em Institute of Actuaries erklärt, seine anderweitigen Beschäfgungen liessen ihm nicht die erforderliche Zeit für die Bearbeitung des zweiten Teils, und in Folge dessen hat das Institute iese Arbeit dem Herrn King übertragen.

Die Theory of Finance unterscheidet sich von dem Textook in der Hauptsache nur dadurch, dass es den behandelten egenstand etwas enger begrenzt hat; es umfasst 92 Seiten Text nd 5 Seiten Tabellen.

Wir dürfen beide Bücher auf das Wärmste empfehlen.

Ls.

. F. Hardy. An improved method of approximating to the value of annuities involving three lives. J. Inst. Act XXIII. 274-285.

Das gewöhnliche Verfahren zur näherungsweisen Berechnung s Leibrentenwertes für drei verbundene Personen $R(x, y, z)$, wo y, z die Alter sind, und zwar x das jüngste, besteht bekanntlich

darin, dass man mit Hülfe einer Rententabelle für zwei verbundene Personen und für einfache Leibrenten zunächst das Alter w bestimmt, so dass

$$R(w) \text{ näherungsweise gleich } R(y, z);$$

dann giebt

$$R(x, w) \text{ eine Näherung für } R(x, y, z).$$

Die Methode würde ein streng richtiges Resultat liefern, wenn die Sterblichkeit der Gompertz'schen Hypothese entspräche, was bekanntlich nicht der Fall ist. Besser schliesst sich ihr die Makeham'sche Hypothese an, und so erlangen wir auch genauere Resultate, wenn wir diese bei unserm Verfahren dadurch berücksichtigen, dass wir bei Gleichsetzung von $R(w)$ mit $R(y, z)$ den ersteren Wert aus einer Tafel mit einem andern Zinsfuss wählen.

Nach den Untersuchungen des Verfassers genügt es, wenn man diesen Zinsfuss, welcher von dem Wert h in der Makeham'schen Formel $G.K^{g^t}h^t$ abhängt, um ein halbes Procent erhöht. Bezeichnen wir den Rentenwert aus der Tafel mit einhalb Procent höheren Zinsen durch $\underline{R}$ statt R, so würde w so zu bestimmen sein, dass

$$R(y, z) \text{ näherungsweise gleich } \underline{R}(w)$$

ist, und dann folgert man

$$R(x, y, z) \text{ näherungsweise gleich } \underline{R}(x, w).$$

Ls.

M. N. Adler. A method of solving approximately questions in compound interest without the aid of tables. J. Inst. Act. XXIII. 359-360.

Bezeichnet man den Betrag, auf welchen das Capital 1 nach x Jahren zum Zinsfuss p angewachsen ist, mit m, so folgt

$$m = (1+p)^x,$$

und folglich

$$x = \frac{lm}{l(1+p)},$$

wo l logar. natur. bedeuten soll.

Es ergiebt sich leicht

$$x \text{ näherungsweise gleich } \frac{lm}{p}\left(1+\frac{p}{2}\right).$$

tzt man $m = 2$, so wird $lm = 0{,}6931$, und man findet die Zeit, elche erforderlich ist, damit sich ein Capital bei dem Zinsss p verdoppelt:

$$\frac{0{,}6931}{p}\left(1+\frac{p}{2}\right).$$

Wird p gleich 2, so wird die vorstehende Formel $\frac{70}{2}$, und an erkennt leicht, dass man bei jeder Steigerung des Zinsfusses m drei Procent die Zahl 70 um eine Einheit erhöhen muss, um ann durch Division mit der Zahl, welche den Zinsfuss in Proenten ausdrückt, die Anzahl der Jahre zu finden, die erforderlich it, damit sich das Capital verdoppelt. Ebenso findet man die eit, welche dazu erforderlich ist, damit das Capital 1 sich erhöht auf

$$1\tfrac{3}{4} \text{ gleich } \frac{0{,}56}{p},$$

$$1\tfrac{1}{2} \quad " \quad \frac{0{,}40}{p},$$

$$1\tfrac{1}{4} \quad " \quad \frac{0{,}23}{p}.$$

Mit Hülfe dieser vier Zahlen ist es aber leicht, die Aufgaben ler Zinseszinsrechnung zu lösen, wie der Autor an zahlreichen Beispielen zeigt. Ls.

G. F. Hardy. On the rate of interest in annuities certain. J. Inst. Act. XXIII. 266-274.

Für die Berechnung des Zinsfusses einer Rente, welche eine estimmte Reihe von Jahren gezahlt werden soll, und für welche er gegenwärtige Wert und der Betrag der Rente gegeben ist, uss man bekanntlich Näherungsformeln anwenden.

Der Verfasser giebt deren zwei neue, welche wenig Arbeit achen und sehr genaue Resultate geben.

Es sei a der Kaufpreis einer n Jahre dauernden Rente von 1 jährlich, x der gesuchte Zinsfuss, und seien a_1, a_2, a_3 die in den Zinstabellen aufgeführten Rentenwerte für eine n Jahre dauernde Rente mit dem Zinsfuss x_1, x_1+h, x_1+2h. Wenn a_1 und a_2 so gewählt werden, dass sie den Wert a einschliessen, dann liegt offenbar auch x zwischen x_1 und x_1+h.

Setzen wir $x = x_1+\varrho$, und bezeichnen wir die ersten und zweiten Differenzen zwischen a_1, a_2, a_3 durch Δ und Δ^2, so sind die beiden Näherungsformeln

$$1)\qquad \varrho = h\left\{\frac{\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2}{a-a_1}+\frac{\frac{1}{2}\Delta^2}{\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2}\right\}^{-1},$$

$$2)\qquad \varrho = h\,\frac{\Delta+\frac{1}{2}\Delta^2}{\frac{(\Delta)^2}{a-a_1}+\frac{1}{2}\Delta^2}.$$

Ls.

D. J. McG. McKenzie. On the transformation of annuities and annuity values payable yearly into the like, when payable in fractional intervals of a year by means of constant factors. J. Inst. Act. XXIII. 162-187.

De Moivre behandelt in seiner Doctrine of Chances die beiden Probleme: 1) wie gross müssen die halbjährlichen Rentenzahlungen sein, wenn der Kaufpreis der jährlich zahlbaren Rente bestimmt ist? 2) wie steigert sich der Kaufpreis der Rente, wenn statt der Jahreszahlung halbjährliche Zahlung im Betrage der Hälfte der Jahresrente gewährt werden soll?

Der Verfasser der vorliegenden Arbeit hat diese Aufgabe dahin erweitert, dass er nicht nur die halbjährlich, sondern allgemein die in verschiedenen Jahresbruchteilen zahlbaren Rente in's Auge fasst. Er berechnet constante Factoren, mit deren Hülfe die Umrechnung geschieht, und hat solche in Tabellenform veröffentlicht.

Ls.

MALMSTÉN. Zur Theorie der Leibrenten. Act. Math. -76.

›r Verfasser behandelt die Aufgabe: Wie wird der Wert ‚eibrente, welche bezahlt werden soll, so lange noch ›nen von n Personen des Alters $x_1, x_2, \dots, x_n$ am Leben ‚usgedrückt durch die Werte der Verbindungsrenten für , $v+2, \dots, n$ Personen vom gegebenen Alter $x_1, x_2, \dots, x_n$. der für die Lebensversicherungstechnik üblichen Bezeich- ›deutet $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ den Wert der Verbindungsrente für ›nen vom Alter $x_1, x_2 \dots, x_n$; bezeichnen wir mit

$$\Sigma R(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})$$

nme der Werte aller Verbindungsrenten für die verschie- Combinationen von $(v+p)$ Personen, welche aus n Personen lter $x_1, x_2, \dots, x_n$ gebildet werden können, so findet der ›er den Wert der gesuchten Leibrente, welche gezahlt soll, so lange noch v Personen von n Personen des Alters $\dots, x_n$ am Leben sind, gleich

$$\sum_{p=0}^{p=n-v} \left\{(-1)^p (v+p-1)_p \; \Sigma R(x_1, x_2, \dots, x_{v+p})\right\},$$

$\vdash p-1)_p$ die bekannte Bezeichnung des Binomial-Coeffi- sein soll. Ls.

YLVESTER and F. FRANKLIN. On a logical problem nected with assecurances on joint lives. J. Hopkins 1882. 202.

nige Formeln der mathematisirten Logik lassen sich zur von Aufgaben aus dem Gebiete des Versicherungswesens den. Mi.

MEECH. System and tables of life insurance. ich Conn.

›ses Werk ist durch die Untersuchungen der Sterblich- ahrungen von dreissig Lebensversicherungs-Gesellschaften ·einigten Staaten Nordamerikas veranlasst worden. Die

denselben zu Grunde liegenden Beobachtungen erstrecken sich bis zum 31. December 1874 und umfassen mehr als eine Million versicherter Leben mit einer Beobachtungsdauer von durchschnittlich circa $4\frac{1}{2}$ Jahren für jedes Leben. Das Beobachtungsmaterial wurde einem Comité von Actuarien abseiten der einzelnen Gesellschaften in Form von Zählkarten überliefert und dort nach den verschiedensten Richtungen bearbeitet. Das schliessliche Ergebnis dieser Arbeit ist durch den Vorsitzenden des Comités L. W. Meech veröffentlicht worden und liegt uns in einem stattlichen Folio-Bande von 550 Seiten vor. Derselbe zerfällt in zwei Teile.

I. Teil: Unmittelbare Beobachtungen und Tabellen.

Der Text bringt eine genaue und in's Einzelne gehende Beschreibung, wie die von den Gesellschaften beobachteten Erfahrungen auf die Zählkarten eingetragen, wie diese revidirt, geordnet und bearbeitet worden, um daraus die Sterblichkeitserfahrungen nach den verschiedensten Richtungen abzuleiten. Dieselben sind bezogen auf die versicherten Personen und auf die versicherten Summen, sie sind unterschieden nach dem Geschlecht und nach jährlichen Altersklassen der Versicherten mit der Unterteilung der Versicherungsdauer; Letzteres zu dem Zweck, um den Einfluss, welchen die Selection auf die Sterblichkeit ausübt, zu bestimmen. Diese Selection wird beim Versicherungsabschluss von der Versicherungsanstalt auf Grund der stattfindenden ärztlichen Untersuchung gegen die sich zur Versicherung meldenden Personen geübt, da die Anstalten nur solche Anträge annehmen, bei denen kein Bedenken gegen die Gesundheitsverhältnisse obwalten. Nach dem Versicherungsabschluss tritt aber eine Selection der Versicherten gegen die Anstalt in entgegengesetzter Richtung ein, weil nur diejenigen Versicherten, deren Gesundheitsverhältnisse sich dauernd günstig erhalten, von dem Recht, bei Lebzeiten wieder von der Versicherung zurückzutreten, Gebrauch zu machen pflegen. Versicherte, deren Gesundheit gelitten hat, geben die Versicherung nicht wieder auf, und während die Beobachtungen der Anstalt kurze Zeit nach dem Abschluss der Versicherung sich auf ausgewählte gesunde Personen beziehen, kann leicht

das Verhältnis sich später so weit umkehren, dass die Sterblichkeitsverhältnisse der versicherten Personen sogar unter dem Sterblichkeitsdurchschnitt der allgemeinen Bevölkerung stehen. Die Resultate werden ausserdem dargestellt, gesondert für die verschiedenen klimatischen Zonen und nach den Krankheiten, welche den Tod herbeigeführt haben.

Ueber alle diese Punkte werden ausführliche Erläuterungen gegeben, unter stetem Hinweis auf die darauf bezügliche in dem Journal des Institute of Actuaries enthaltene Literatur. Es ist darin freilich nicht viel Neues enthalten, und wir hätten gewünscht, dass der Verfasser auch den von den Seinigen abweichenden Methoden und Ansichten etwas mehr Beachtung geschenkt hätte; aber wir erkennen gern an, dass hier eine ausführliche und zusammenhängende Darstellung des ganzen Verfahrens zur Ableitung der Sterblichkeit aus den Aufzeichnungen der Lebensversicherungsanstalten gegeben wird. Diesem ersten Teil sind die vollständigen Resultate der unmittelbaren Beobachtungen nach den bezeichneten Richtungen in Tabellenform angefügt.

II. Teil: Leibrenten und Lebensversicherungen.

Ausgehend von den einfachsten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, sowie von den Sätzen über die mathematische und die moralische Hoffnung entwickelt der Verfasser das ganze System der Lebensversicherungs-Rechnung. Aus den im ersten Teil enthaltenen unmittelbaren Beobachtungen leitet er zunächst die „Nordamerikanische Sterblichkeitstafel“ ab und zwar mit Unterscheidung der Geschlechter. Er findet dabei, dass bei der Sterblichkeitstafel für Männer nur ganz unbedeutende Ausgleichungen in den niedrigsten und höchsten Altersclassen erforderlich waren, um sie und zwar für die Alter von 10 bis 99 Jahren vollkommen mit der Makeham'schen Sterblichkeitsformel in Einklang zu bringen, wo, die Anzahl der Lebenden vom Alter x

$$= ks^x g^{q^x}$$

gesetzt,

$$s = 0{,}9936957, \quad g = 0{,}9993122, \quad q = 1{,}099713375$$

ist.

Bei der Sterblichkeitstafel für das weibliche Geschlecht, für

welche keine sehr zahlreichen Beobachtungen zu gebote standen, waren besonders für die Altersclassen über 70 Jahr grössere Ausgleichungen zur Herstellung der Regelmässigkeit erforderlich. Die schliessliche Ausgleichung geschah hier nach dem Verfahren von Woolhouse. Auch diese Tabelle umfasst die Alter von 10 bis 99 Jahren.

Wir haben es zu bedauern, dass der Autor nicht auch die unausgeglichenen Tafeln veröffentlicht hat, weil wir jetzt eines unmittelbaren Urteils über die Wirkung seiner Ausgleichung entbehren.

Es folgt dann eine sehr vollständige Ableitung der verschiedenen bei der Lebensversicherung gebrauchten Rechnungsformeln, sowol zur Bestimmung der Prämien wie auch der Reserven, und eine ausgedehnte Sammlung von Tabellen und Hülfstafeln auf Grund der Nordamerikanischen Sterblichkeitstafel und des Zinsfusses, bei den Haupttafeln mit 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Procent.

Ls.

Wolf. Ein Beitrag zur Invalidenfrage. D. Vers. Z. XXIII. No. 56.

W. Küttner. Die Activitätswahrscheinlichkeit. D. Vers. Z. XXIII. No. 89.

Dr. Wolf stellt die Hypothese auf, dass bei dem Zusammentreffen mehrerer von einander nicht unabhängiger Ereignisse, welche er so berechnet, als ob die Ereignisse von einander unabhängig wären, die Anzahl der Fälle, in denen das eine Ereignis zuerst auftritt, zur Anzahl der Fälle, in denen das andere zuerst auftritt, sich verhält wie die Wahrscheinlichkeit des einen Ereignisses zur Wahrscheinlichkeit des anderen. Er untersucht auf Grund dieser Annahme die Wahrscheinlichkeit, nach Verlauf eines Jahres als Activer zu leben, wenn die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr zu sterben durch x, die Wahrscheinlichkeit, im nächsten Jahr invalide zu werden durch y bezeichnet wird. Wären diese beiden Ereignisse von einander unabhängig, so würden unter n Personen nxy Fälle vorkommen, in denen

sowol der Tod wie auch Invalidität eintreten würde, und nach der Annahme des Verfassers wären darunter $nxy\frac{y}{x+y}$ Fälle, in denen zuerst Invalidität und dann der Tod, $nxy\frac{x}{x+y}$ Fälle, in denen zuerst der Tod und dann die Invalidität eintreten würde. Diese letztern sind wegen der Abhängigkeit der Ereignisse von einander unmöglich. Die Gesammtheit der Fälle, wo entweder der Tod oder die Invalidität oder beides zugleich auftritt, ist also bei n Personen nicht $nx+ny-nxy$, sondern

$$nx+ny-n\frac{y}{x+y}xy,$$

und mithin wird die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit als Nichtinvalider (Activer) am Ende des Jahres zu leben:

$$1-x \quad y+\frac{xy^2}{x+y}.$$

Es werden ausserdem die Formeln von Heym, Behm und Zeuner betrachtet.

Küttner wendet gegen diese Ableitung ein, dass sie von der Betrachtung von Ereignissen ausgeht, die von einander unabhängig sind, und zeigt, wie sich die verschiedenen aufgestellten Formeln ergeben, wenn man von den geeigneten Voraussetzungen über die Verteilung der Invaliditäts- und der Sterbefälle über die in Betracht gezogene Zeitstrecke ausgeht. Er weist auch die Berechtigung der Wolf'schen Formel nach, nachdem er die Voraussetzungen, aus denen dieselben abgeleitet werden kann, erörtert hat, und zeigt den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Formeln. Ls.

A. Amthor. Ueber einige Arten der Aussteuerversicherung insbesondere die Militairdienstversicherung. Pr. Dresden.

Der Verfasser beabsichtigt, für alle die zahlreichen Formen, in denen die Militärdienst-, die Aussteuer- und die Altersversor-

gungsversicherung aufzutreten pflegt, die Formeln für die Berechnung der Prämien und der Reserven zu geben, so dass man nur nachzuschlagen braucht, um jede gewünschte Formel zu finden, und es wird gewiss Niemand dem Fleiss und der Ausdauer, welche diese Arbeit kennzeichnet, seine Anerkennung versagen. Mit den aufgestellten Formeln können wir uns aber nur teilweise einverstanden erklären, und müssen daher eine Prüfung der Formeln vor dem Gebrauch derselben für notwendig halten. Insbesondere halten wir die Formeln für die Militärdienstversicherung, (mit welcher sich die Abhandlung vorwiegend beschäftigt), wenn es sich um andere als einmalige Prämien handelt, für irrig.

Zur Bestimmung der Prämien muss natürlich die Leistung der Anstalt der Gegenleistung der Versicherten als gleichwertig gegenüber gestellt werden. Dabei behandelt der Verfasser Dienstuntauglichkeit, welche die Befreiung vom Militär nach sich zieht, so, als ob dieselbe ausschliesslich erst dann in die Erscheinung tritt, wenn das dienstpflichtige Alter gekommen ist, anstatt dieselbe ihren Ursachen nach in zwei Teile zu zerlegen, in diejenigen Fälle, welche bis zu der von den Militärärzten vorgenommenen Untersuchung mindestens zweifelhaft bleiben, und in diejenigen Fälle, welche während der Versicherungsdauer alljährlich zweifellos erkennbar werden, und welche das Aufhören der Versicherung und der dadurch bedingten Prämienzahlung nach sich ziehen. Der Umstand, dass das statistische Material nicht vorhanden ist, um diese Trennung rechnerisch auszuführen, entschuldigt es nach unserer Meinung durchaus nicht, dass die Formel unrichtig aufgestellt worden; derselbe hätte vielmehr nur dazu führen dürfen, die Unmöglichkeit einer richtigen Berechnung der Prämien darzutun. Liegen die Verhältnisse hier doch nicht anders, wie auf manchen anderen Versicherungsgebieten, wie z. B. bei der Invaliditätsversicherung, für welche man die richtigen Formeln aufgestellt hat, bei denen aber die Prämienberechnung so lange unterbleiben muss, bis die statistischen Verhältnisse erforscht sind.

Der Verfasser berechnet die Leistung der Anstalt mit Hülf

jenigen Verhältnisses, welches sich aus allgemeinen Beobachgen für die Einstellung im militärpflichtigen Alter ergeben , und stellt derselben die Gegenleistung der Versicherten so genüber, als ob die Jahresprämien für alle diejenigen Knaben, lche am Leben bleiben, bei der Anstalt eingehen würden, hrend doch diejenigen, bei denen es zweifellos wird, dass sie m Militärdienst untauglich geworden, ihre Versicherung sofort fgeben werden und die weiteren Prämienzahlungen unterlassen. ie Anzahl der Zahlenden ist also nicht den Lebenden gleich. etztere werden vielmehr alljährlich um einen später durch die eobachtung zu ermittelnden Bruchteil zu verkleinern sein, und ieses hätte in der Formel ausgedrückt werden müssen. Die esammtleistung des Versicherten ist also geringer als die Formel es Verfassers ergiebt, und die Prämie stellt sich in Folge dessen her. Wie gross der ziffermässige Unterschied ist, das wird ch freilich erst dann ermitteln lassen, wenn die Statistik dafür rhanden ist; die Ansicht, die Differenz sei erheblich, hat vorufig, wenn man die Nebenumstände berücksichtigt, wol mehr rechtigung als die gegenteilige.

Auch demjenigen, was der Verfasser über die Wahl der hlen, welche in die Formeln einzuführen sind, äussert, können r durchaus nicht zustimmen. Wenn derselbe meint, dass bei n von ihm in Betracht gezogenen Versicherungsarten diejenin statistischen Verhältnisse, welche sich aus der allgemeinen der Bevölkerung gemachten Beobachtung ergeben, den Bechnungen zu Grunde gelegt werden dürften, so übersieht er, ss hier ein Factor in Wirksamkeit tritt und eine grosse Rolle ielt, den die Engländer sehr treffend „Selection" benennen. i Versicherungen, welche bei Erreichung eines gewissen Alters llig werden, darf man keineswegs mit dem Verfasser annehmen, Sterblichkeit unter den Versicherten werde derjenigen, wie unter der allgemeinen Bevölkerung beobachtet worden, nahezu eichkommen.

Und gerade bei der Militärdienstversicherung werden vorsweise nur solche Kinder beteiligt werden, bei denen man gen ihrer kräftigen Constitution erwarten darf, dass sie das

militärpflichtige Alter erreichen und auch militärpflichtig befunden werden. In erhöhtem Masse richten sich diese Bedenken gegen die Annahme des Verfassers, es werde der Procentsatz der von den versicherten Personen zum activen Dienst herangezogenen 42 Procent nicht übersteigen, weil dies Verhältnis bei der allgemeinen Bevölkerung kaum erreicht werde. Wir möchten vielmehr annehmen, dass der Procentsatz aus der ausgewählten Gesellschaft der Versicherten ungleich höher ausfallen wird als bei der allgemeinen Bevölkerung, weil hier diejenigen, welche wegen ihrer Gebrechen oder Fehler vom Militärdienst befreit sind, fast gänzlich fehlen werden.

Und da über diese Verhältnisse das statistische Material bis jetzt nicht vorhanden ist, so halten wir die Folgerung des Verfassers, dass eine Versicherungs-Gesellschaft im Stande sein werde, mit den Prämien, wie sie sich auf Grund des von ihm empfohlenen Verfahrens berechnen, den übernommenen Verpflichtungen zu genügen, für eine überaus gewagte. Ls.

D. Mc Alister. On probability and Listerism. Ed. Times XXXVII. 40-42, 59-61.

McFarlane. On probability and Listerism. Ed. Times XXXVII. 77-80, 92.

Die Aufgabe, um welche es sich handelt, ist folgende: Von zehn Fällen, die nach der Lister'schen Methode behandelt wurden, verliefen sieben Fälle glücklich, während drei durch Blutvergiftung endeten; von vierzehn Fällen, bei denen gewöhnlicher Verband angewendet wurde, verliefen neun Fälle glücklich, während in fünf Fällen Blutvergiftung eintrat. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Erfolg der Lister'schen Methode dem Zufall zuzuschreiben ist?

Ueber die Lösung der Aufgabe hat sich unter den Obengenannten eine Polemik entsponnen, an welcher sich auch H. MacColl, Miss Eliza Blackwood, Mr. Whitworth beteiligten. Die Lösungen, welche gegeben werden, sind die folgenden:

Dr. Macfarlane. Die Wahrscheinlichkeit des Erfolges einer handlung nach der Lister'schen Methode werde durch p, dieige bei gewöhnlichem Verband durch q bezeichnet; dann ist $-q$ die Wahrscheinlichkeit der Wirkung des antiseptischen ttels, und die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen lle der Erfolg der Lister'schen Methode nicht auf Rechnung es charakteristischen Teils zu setzen ist, findet er gleich $\frac{q}{p-q}$, s ist für die gegebene Aufgabe $\frac{45}{4}$.

Dr. Mc. Alister. Die Aufgabe hätte auch so eingekleidet rden können: Es sind zwei Urnen A und B vorhanden; in ler derselben befindet sich eine grosse Anzahl weisser und hwarzer Kugeln. Aus A werden der Reihe nach $a+b$ Kugeln zogen, davon sind a Kugeln weiss; aus B werden $p+q$ Kugeln zogen, davon sind p Kugeln weiss. $\frac{a}{a+b}$ ist grösser als $\frac{p}{p+q}$, id die Aufgabe besteht darin, die Wahrscheinlichkeit zu bestimen, dass das Verhältnis der weissen Kugeln zu den schwarzen der Urne B kleiner ist, als in der Urne A. Er berechnet ann für die vorliegenden Zahlen, dass man 3:2 wetten kann, dass ie Wahrscheinlichkeit des Erfolges bei der Lister'schen Methode er Methode selbst, und nicht dem Zufall zuzuschreiben ist.

Whitworth bezeichnet die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens es Ereignisses unter der gewöhnlichen Methode durch p, unter er Lister'schen Methode durch μp, dann ist die a priori Wahrcheinlichkeit des beobachteten Gesammt-Ereignisses

$$P = p^9 (1-p)^5 (\mu p)^7 (1-\mu p)^3,$$

vo μ irgend einen Wert zwischen 0 und $\frac{1}{p}$ haben kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\mu<1$, d. h. dass die Lister'sche Methode einen Nutzen hat, ist

$$\frac{\sum_{\mu=0}^{\mu=1} P}{\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{1}{p}} P} = \frac{\int_0^1 \mu^7 (1-\mu p)^3 \, d\mu}{\int_0^{\frac{1}{p}} \mu^7 (1-\mu p)^3 \, d\mu} = 165p^8 - 440p^9 + 360p^{10} - 120p^{11}.$$

Dies ist, $p = \frac{9}{14}$ gesetzt, gleich 0,0078, mithin ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit = 0,9922. Man kann also nach ihm 229 gegen 2 wetten, dass die Lister'sche Methode von Nutzen ist. Wir haben geglaubt, dass die grosse Verschiedenheit der Lösungen interessant genug sei, um hier mitgeteilt zu werden; auf die darüber geführte Polemik können wir nicht näher eingehen. Ls.

E. Césaro. Une question de probabilité. Math. II. 177-179.

Eine Stange von der Länge l wird in drei Stücke zerbrochen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei der Stücke kleiner sind als eine gegebene Länge a? Die Lösung erfolgt geometrisch, indem die Längen der drei Stücke durch die trilinearen Coordinaten eines Punktes dargestellt werden. Mn. (O.).

F. J. van den Berg. Over een meetkundig vraagstuk van kansberekening. Nieuw Arch. IX. 32-59.

Behandelt die öfters besprochene Aufgabe: wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Linie, welche einen gegebenen Kreis schneidet, ausserdem noch einen zweiten gegebenen Kreis schneiden wird? Die Auflösungen von Schoute und Crofton (Phil. Transact. 1868) gründen sich auf die Voraussetzung, dass schon von Anfang an die Geraden über die ganze Ebene in allen Teilen gleichmässig verteilt gedacht werden, und dass also in dieser Hinsicht die Beziehung, in welcher sie zu der ersten gegebenen Curve stehen, keinen Einfluss hat. Bei der vorliegenden Auflösung wird indessen angenommen, dass die in Rede stehenden Geraden von Anfang an auf eine andere mehr willkürliche Weise auf der Ebene liegen. Eingehender wird die Aufgabe behandelt für den Fall, dass die beiden Punkte, welche jede Schnittlinie mit dem ersten Kreis gemeinschaftlich hat, gleichmässig über den Kreisumfang verteilt sind, so dass sie als die Gesammtheit aller Seiten und Diagonalen eines regelmässigen in den Kreis beschriebenen

s von unendlich vielen Seiten angesehen werden können. .lle, welche von der gegenseitigen Lage der Kreise ab- werden dabei angegeben, ebenso wird die Formel für die rte Wahrscheinlichkeit aufgestellt und in die Form eines ıten Integrals gebracht. Dies Integral kann auch in eine che Reihe entwickelt werden. G.

NEK. Eine geometrische Anwendung der Wahr- inlichkeitsrechnung. Cas. XI. 121-123. (Böhmisch).

: kurze Aufsatz behandelt die Aufgabe, die Wahrschein- zu finden, dass zwei beliebige Punkte einer Dreiecks- vom Inhalte 1 auf derselben Seite einer durch andere liebige Punkte gezogenen Linie liegen. Der Verfasser ierfür den Wert

$$W = \frac{11}{18}.$$

Std.

.IN, D. Edwardes. Solutions of a question (6743). imes XXXVII. 24.

Wahrscheinlichkeit, dass der Umfang eines Dreiecks, Ecken in dem Mittelpunkte eines Kreises mit dem Radius r ei beliebigen Punkten auf diesem Kreise liegen, kleiner ist ist

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0{,}6285\ldots$$

O.

---

e Lösungen von Aufgaben über geometrische Wahr- inlichkeit von Matz, T. R. Terry, McFarlane, '. Walker, H. McColl, L. Tanner, W. J. C. .er, D. Edwardes, B. Easton, J. Hammond, Seitz, Ladd, Nash finden sich Ed. Times XXXVI. 24, 27-28, 72, 83, 101-102, 114; XXXVII. 27-28, 82-83, 85-86, 92-93, 101.

O.

Fünfter Abschnitt.

Reihen.

Capitel 1.

Allgemeines.

O. Hölder. Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze. Klein Ann. XX. 535-549.

Wenn die Partialsummen

$$a_1+a_2+\cdots+a_n = s_n$$

für $\lim n = +\infty$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen G_1, H_1 besitzen, so convergirt die Potenzreihe

$$a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots$$

für alle Werte $-1<x<+1$, und ihre Summe $f(x)$ hat beim Grenzübergange $\lim x = 1-0$ endliche Unbestimmtheitsgrenzen G_2, H_2, deren Unterschied nicht grösser sein kann als H_1-G_1. Im Falle, dass für s_n ein Grenzwert bei $\lim n = +\infty$ existirt, geht der Satz in einen bekannten Abel'schen über. Sind die $s_1, s_2, s_3, \ldots$ nicht endlich, so bilde man

$$\frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n} = s'_n.$$

Dann gilt der vorstehende Satz auch, wenn man s'_n setzt statt s_n und enthält als speciellen Fall einen Satz von Frobenius (siehe F. d. M. XII. 1880. p. 188). Ihn weiter zu verallgemeinern gestatten wenigstens die Beweise des Herrn Verfassers nicht. Da-

agen zeigt er den Satz: „Wenn $\lim s'_n$ für $\lim n = +\infty$ nicht xistirt, so setze man

$$\frac{s'_1 + s'_2 + \cdots + s'_n}{n} = s''_n$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{s_1^{(\gamma-1)} + s_2^{(\gamma-1)} + \cdots + s_n^{(\gamma-1)}}{n} = s_n^{(\gamma)};$$

st nun $\lim_{n=\infty} s_n^{(\gamma)} = c$ (endlich), so folgt $\lim_{x=1} f(x) = c$." Der Satz ilt auch für complexe Werte der a_n.

Analoge Verallgemeinerung lässt der folgende auf Dirichlet ırückzuführende Satz zu: Es ist

$$\lim_{w=+0} \left\{ w \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{\nu^{1+w}} \right\} = c,$$

enn

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = c.$$

St.

. J. Stieltjes jr. Over eenige theorema's omtrent oneindige reeksen. Nieuw Arch. IX. 98-106.

In Borchardt's J. IXC. (s. F. d. M. XII. 1880. p. 188) stellt err G. Frobenius in der Arbeit über die Leibniz'sche Reihe den atz auf: „Ist s_n eine von n abhängige Grösse, und nähert sich

$$\frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

ei wachsendem n einer bestimmten, endlichen Grenze, so nähert ch

$$(1-x)\;(s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3 + \cdots),$$

lls x beständig zunehmend gegen 1 convergirt, derselben Grenze."

In der vorliegenden Arbeit wird diesem Satz die folgende rweiterung gegeben. Unter derselben Voraussetzung sollen, enn $u > 0$ ist, die Reihen

$$-x)\cdot\left[s_0 + \frac{u}{1} s_1 x + \frac{u(u+1)}{1\,.\,2} s_2 x^2 + \frac{u(u+1)(u+2)}{1\,.\,2\,.\,3} s_3 x^3 + \cdots\right]$$

und

$$\frac{s_1 x + \frac{1}{2} s_2 x^2 + \frac{1}{3} s_3 x^3 + \frac{1}{4} s_4 x^4 + \cdots}{l\left(\frac{1}{1-x}\right)}$$

nach derselben Grenze convergiren.

Der Beweis stimmt mit dem von Frobenius völlig überein. Als Beispiel wird die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 . 2 . \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots$$

genommen unter der Voraussetzung, dass die Reihe für $x = 1$ divergirt. G.

R. Mildner. Ueber Ableitung neuer unendlicher Reihen aus einer gegebenen durch Umstellung der Vorzeichen nach einem bestimmten Gesetze. Wien. Ber. LXXXVI. 999-1051.

Es handelt sich um die Aufgabe: aus dem gegebenen Werte einer Potenzreihe

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots \qquad (|x| < a)$$

den Wert derjenigen Reihe zu ermitteln, die aus jener hervorgeht, wenn abwechselnd eine beliebige Anzahl k auf einander folgender Glieder unverändert gelassen wird, während die Vorzeichen der nächsten k Glieder umgekehrt werden, d. h. der Reihe

$$R = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k-1} x^{k-1}) - (A_k x^k + \cdots + A_{2k-1} x^{2k-1}) + (A_{2k} x^{2k} + \cdots) - \cdots .$$

Von der bekannten Beziehung ausgehend, dass die aus der obigen abgeleitete neue Reihe

$$A_0 + A_k x^k + A_{2k} x^{2k} + \cdots = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} f\left(x e^{\frac{2\pi i g}{k}}\right) \qquad (|x| < a)$$

ist, leitet der Verfasser als Lösung der Aufgabe die für $|x| < a$ gültigen Formeln ab:

$$R = \frac{1}{k} \sum_{g=0}^{k-1} \left(i . tg \frac{g\pi}{k} + 1\right) f\left(-x e^{\frac{2g\pi i}{k}}\right),$$

nur für ungrade k gilt; und

$$R = \frac{1}{k}\sum_{g=0}^{k-1}\left(1-i.\operatorname{cotg}\frac{2g+1}{2k}\pi\right)f\left(xe^{\frac{2g+1}{2k}\pi i}\right),$$

für alle ganzzahligen Werte k gültig ist. Aehnliche Formeln geben sich für:

$$R' = (A_1x+A_2x^2+\cdots+A_kx^k)-(A_{k+1}x^{k+1}+\cdots+A_{2k}x^{2k})$$
$$+(A_{2k+1}x^{2k+1}+\cdots)-\cdots.$$

s Beispiele werden nach dieser Richtung hin die einfachsten r fundamentalen Reihen der Analysis ausführlich behandelt.

T.

Marchand. Note sur un développement d'une fonction en série. Nouv. Ann. (3) I. 450-458.

Es wird ausgegangen von der Beziehung

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)\,dx = \int_{\mu_1}^{\mu} F(\mu_1+\mu-x)\,dx;$$

ieselbe wird auf $\int_{\mu_1}^{\mu} F'(x)\,dx$ angewendet; durch nachherige Anendung von Integrationen nach Teilen ergiebt sich die Maclaurin'sche und Taylor'sche Formel mit ihren Restgliedern. 'erner wird namentlich auf die Anwendbarkeit der aus obiger Beziehung sich ergebenden Folgerungen:

$$\int_{\mu_1}^{\mu} f_1(\mu_1+\mu-x)\,f_2(\mu_1+\mu-x)\cdots f_p(\mu_1+\mu-x)\,f_{p+1}(x)\cdots f_n(x)\,dx$$
$$=\int_{\mu_1}^{\mu} f_1(x)\,f_2(x)\cdots f_p(x)\,f_{p+1}(\mu_1+\mu-x)\cdots f_n(\mu_1+\mu-x)\,dx$$

und

$$\int_{\mu_1}^{\mu} F(x)dx=\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu}{2}} F(x)\,dx+\int_{\mu_1}^{\frac{\mu_1+\mu}{2}} F(\mu_1+\mu-x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{\mu+\mu_1}{2}}^{\mu} F(x)dx+\int_{\frac{\mu-\mu_1}{2}}^{\mu} F(\mu_1+\mu-x)dx$$

aufmerksam gemacht und beispielsweise

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = \pi$$

hergeleitet. T.

J. S. Hayes. A demonstration of Maclaurin's theorem. Anal. IX. 12-14.

Fortsetzung der Arbeit aus Anal. VIII. p. 154. s. F. d. M. XIII. 1881. p. 174. Jn. (O.).

J. M. Rodrigues. Sobre a formula de Lagrange. Teixeira J. IV. 121-176. (Portugiesisch).

Die Reihe von Lagrange lässt sich nach der Richtung verallgemeinern, dass man mehr als eine der Wurzeln einer vorgelegten Gleichung entwickeln kann. Der Verfasser geht von der Gleichung

$$f(x) \pm a\varphi(x) = 0$$

aus und zeigt, dass sich eine Function $F(x)$ einer Wurzel dieser Gleichung entwickeln lässt mit Benutzung der Formel

$$F(x) = F(a) + \sum_i (-1)^i \frac{a^i}{1.2\dots i} \frac{d^{i-1}}{da^{i-1}} \left[F'(a)\left(\frac{\varphi(a)}{f'(a)}\right)^i\right],$$

wenn a eine Wurzel der Gleichung

$$f(x) = 0, \text{ und mod. max. } \left[a\frac{\varphi(a+z)}{f(a+z)}\right] < 1$$

ist. Bei algebraischen Gleichungen

$$x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \dots + A_0 = 0$$

setzt Herr Rodrigues

$$x^n + A_0 = f(x),$$

was n Werte für die Wurzel a giebt, die in die obige Reihe eintritt.

Herr Rodrigues stellt auch $F(x)$ durch ein bestimmtes Integral dar, in welches a eintritt. Ferner leitet er aus seiner Formel

ge andere bekannte Reihenentwickelungen her und schliesst mit Entwickelung einer Reihe von Resultaten, die für algebraische ichungen von Interesse sind. Tx. (O.).

J. Stieltjes jr. Over Lagrange's interpolatie-formule. Amst.; Versl. en Meded. XVII. 239-254.

Der Zweck dieser Untersuchung ist, den Rest der Lagrange'en Interpolationsformel in eine einfachere Gestalt als die eines timmten Integrals zu bringen und auch ohne Integralrechnung ıuleiten, ebenso, wie dies mit dem Rest der Taylor'schen Reihe chieht. Der Verfasser benutzt hierzu eine Erweiterung des eorems von Rolle, und bringt die Reihe auf die Form:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\varphi(x)}{(x-x_p)\,\varphi'(x_p)}\, f(x_p) + \frac{\varphi(x)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n} f^n(\xi),$$

$$\varphi(x) = (x-x_1)\,(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

l ξ einen Wert hat, welcher zwischen dem grössten und m kleinsten Wert der Zahlen $x, x_1, \ldots, x_n$ liegt.

Hieraus werden einige Folgerungen gezogen.

G.

Poincaré. Sur les séries trigonométriques. C. R. XCV. 766-768.

Die Reihe $\varphi(t) = \Sigma A_p \sin \alpha_p t$, worin A_p, α_p positive Zahlen zeichnen, convergirt, falls $\Sigma A_p \alpha_p$ convergirt. Nimmt man an, ss $\frac{1}{A_p}$ und α_p für $\lim p = +\infty$ den Grenzwert 0 haben, so ınn $\varphi(t)$ dem absoluten Betrage nach jede Zahl überschreiten; ne Bemerkung, welche für die Mechanik des Himmels nicht ıne Interesse ist. St.

V. Veltmann. Die Fourier'sche Reihe. Schlömilch Z. XXVII. 193-235.

Die Abhandlung untersucht das Verhalten der Fourier'schen Reihe im Anschluss an eine frühere Arbeit des Herrn Verfassers (vgl. d. Jahrb. XIII. 1881. 327). Von den einleitenden Sätzen über Potenzreihen ist hier zu erwähnen der Satz V., der übereinstimmt mit dem ersten Satze des Herrn Hölder, welchen wir oben p. 180 angeführt haben.

Die Fourier'sche Reihe wird gebildet mit einer Function $f(\gamma)$, welche für die Werte $0 \leqq \gamma \leqq 2\pi$, die auf einer Kreislinie vom Radius 1 construirt werden, in folgender Art definirt ist. Innerhalb eines jeden Bogens, sei er auch noch so klein, ist ein Bogen vorhanden, für dessen Punkte (die Grenzen ausgeschlossen) $f(\gamma)$ eindeutig definirt und stetig ist. Dabei liegen sämmtliche Werte $f(\gamma)$ zwischen denselben endlichen Zahlen. Zufolge dieser Annahme haben wir in jedem nicht im Innern eines Stetigkeitsbogens liegenden Punkte (p) endliche Unbestimmtheits-Grenzen für $f(\gamma)$, sowohl von rechts als auch von links her; die beiden ersteren, sowie die beiden letzteren können auch zusammenfallen. Als $f(p)$ kann jeder Wert gelten, der zwischen den am weitesten von einander abstehenden unter diesen vier Zahlen liegt. Die Stetigkeitsbögen können nach ihrer Grösse geordnet werden, wobei zu beachten ist, dass ihre Summe auch kleiner als 2π sein kann. (Vergl. eine ähnliche Bemerkung bei Herrn Harnack, Klein Ann. XIX. p. 238, siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 182). Die auf die angegebene Art definirten Functionen zerfallen in zwei Klassen, die im Intervalle $(0, 2\pi)$ integrirbaren und die nicht integrirbaren. Die ersteren sind dadurch charakterisirt, dass die Summe derjenigen Zwischenbögen n^{ter} Ordnung (d. i. derjenigen Bögen, welche von der ganzen Kreislinie nach Ausscheidung der Stetigkeitsbögen 1ter bis n^{ter} Grösse übrig bleiben), in deren jedem die Differenz des grössten und kleinsten Functionswertes (richtiger: der oberen und unteren Grenze von $f(\gamma)$) grösser als eine gegebene, sonst beliebige Grösse δ ist, mit wachsendem n zur Grenze Null convergirt. Nicht integrirbar im Intervalle $(0, 2\pi)$ ist $f(\gamma)$, wenn eine bestimmte Grösse δ existirt, so dass die soeben erwähnte Summe bei noch so grossem n nicht kleiner als eine bestimmte Grösse b wird. Beide

:olgen unmittelbar aus dem Riemann'schen Begriffe der 'baren Function.

e allgemeinen Sätze über die Summe der Fourier'schen scheinen im Wesentlichen nichts Neues darzubieten. (Vgl. 'ini, Serie di Fourier l. p. 100). Beachtenswert ist eine lerrn Verfasser aufgestellte specielle Fourier'sche Reihe, 'ergent ist in Punkten, welche die ganze Kreislinie in unendlich kleine Teile zerlegen, während sie für andere , welche ebenfalls überall einander unendlich nahe sind, con- und ihre Summe gleich ist dem Werte der Function, aus r sie abgeleitet ist. Am Schlusse der Abhandlung wird ie Frage erörtert, ob eine Function $f(y)$ von den bisher ;esetzten Eigenschaften auf mehr als eine Weise in eine metrische Reihe entwickelt werden kann. St.

RNACK. Théorie de la série de Fourier. Darb. Bull. 'I. 242-260, 265-280, 282-300.

LPHÉN. Sur la série de Fourier. C. R. XCV. 1217-1219.

rr Harnack hat die im vorigen Bande p. 182 angezeigte llung nach Massgabe des von ihm selbst darin gefundenen ılusses neu redigirt. Der § I, 14 Lehrsätze enthaltend, ıen einige von den folgenden Sätzen beruhen, ist unver- geblieben, und bietet somit noch immer Anlass zu Be- . Auch der fünfte Satz erscheint dem Referenten jetzt ıehr als völlig sicher.

ıe trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

m Intervalle (a, b) „im Allgemeinen" convergent, wenn rte x, in denen die Differenz der Unbestimmtheitsgrenzen

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

$n = +\infty$ grösser als eine beliebige positive Zahl δ oder ɔh ist, eine discrete Menge bilden. Convergirt eine solche

Reihe in einem beliebigen Intervalle im Allgemeinen, so folgt sofort $\lim a_n = \lim b_n = 0$ für $\lim n = +\infty$. Sind die Unbestimmtheitsgrenzen von $s_n(x)$ für $\lim n = +\infty$ im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ nur in discreten Punkten, absolut genommen, grösser als eine beliebige Zahl $\delta > 0$, so ist

$$a_n = b_n = 0. \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ist nicht allein $f(x)$ im Intervalle $(-\pi, +\pi)$ integrabel, sondern auch $[f(x)]^2$, so hat man stets

$$(1) \qquad \lim_{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx = \lim_{n=+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx = 0.$$

Es folgt dies einfach aus der Betrachtung des Integrales

$$(2) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - s_n(x)]^2\, dx,$$

unter $s_n(x)$ die Summe der $(n+1)$ Anfangsglieder der Fourier'schen Reihe verstanden. Man findet ferner

$$3)) \qquad \lim_{n=+\infty} \int_{x_0}^{x_1} s_n(x)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx.$$

Für das Verhalten der Fourier'schen Reihe für einen bestimmten Wert von x ist nur das des Integrales

$$\int_0^{\delta} [f(x+\beta) + f(x-\beta)] \frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta \qquad (\delta > 0)$$

bei $\lim n = +\infty$ massgebend. Ist $f(x+0) + f(x-0)$ eine endliche Zahl y, so convergirt sie demnach zum Werte $\frac{1}{2}y$ nur, wenn

$$\lim_{n=+\infty} \int_0^{\delta} [f(x+\beta) + f(x-\beta) - y] \frac{\sin n\beta}{\beta}\, d\beta = 0,$$

woraus die wichtigsten der bisher bekannten Sätze über die Convergenz der Fourier'schen Reihe abgeleitet werden.

Wenn $f(x)$ integrabel ist, $[f(x)]^2$ aber nicht, so bestehen die Sätze (1) und (3) noch fort, falls $f(x)$ innerhalb der bezüglichen Intervalle absolut integrabel ist.

Nun folgt der Nachweis des Satzes von P. du Bois-Reymond (jede trigonometrische Reihe, welche eine integrable Function

finirt, ist eine Fourier'sche Reihe), und der Nachweis der von emann angegebenen Entwickelungen einer gewissen nicht-inte-abeln Function in eine trigonometrische Reihe.

Am Schlusse findet man Regeln über die Differentiirung und tegrirung von trigonometrischen Reihen.

Auf dieselbe Weise wie Herr Harnack beweist Herr Halphén n Satz (1). Er bemerkt (gegen Herrn Hugoniot), dass das Ver-hwinden des Integrales (2) bei lim $n = +\infty$ allein nicht rechtige, auf die Convergenz der Fourier'schen und ähnlicher ihen zu schliessen. St.

. HARNACK. Berichtigung. Klein Ann. XIX. 524-529.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 182.

. LINDEMANN. Ueber das Verhalten der Fourier'schen Reihe an Sprungstellen. Klein Ann. XIX. 517-523.

Durch Rechnung wird direct gezeigt, dass die Fourier'sche eihe gleichmässig convergirt an einer Stelle, wo die dargestellte unction stetig ist (was Heine zuerst bewiesen hat); und dass e Convergenz derselben unendlich verzögert wird, wenn sich as Argument einer Stelle nähert, wo die dargestellte Function ustetig ist (was Seidel zuerst dargelegt hat). St.

'AVID. Application de la dérivation d'Arbogast à la solution de la partition des nombres et à d'autres problèmes. Résal J. (3) VIII. 61-72.

Siehe Abschn. III. Cap. 1. p. 129.

Capitel 2.

Besondere Reihen.

O. SCHIER. Ueber Potenzsummen rationaler Zahlen. Wien. Gerold's Sohn.

AL. ZDRAHAL. Ueber eine Eigenschaft der Binomial-Coefficienten. Cas. XI. 47. (Böhmisch).

Enthält einen neuen, auf combinatorischer Basis aufgebauten Beweis des Satzes, dass

$$\Sigma\binom{a}{\alpha}\binom{b}{\beta}\binom{c}{\gamma}\cdots=\binom{a+b+c+\cdots}{r},$$

falls die Bedeutung

$$r=\alpha+\beta+\gamma+\cdots$$

eingeführt wird, und $\binom{m}{\mu}$ symbolisch einen Binomialcoefficienten bezeichnet. Std.

J. C. O'NEIL DE MEDEIROS. Sobre um problema d algebra elementar. Teixeira J. IV. 177-184.

Entwickelung von x^m+x^{-m} nach Potenzen von x^1+x^{-1}. Tx. (O.).

H. J. KRANTZ. Solution d'une question (1322). Nouv. Ann. (3) I. 419-421.

$\sqrt{5}$ ist die Grenze des Verhältnisses der beiden Reihen

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{13^2}+\frac{1}{34^2}+\frac{1}{89^2}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{8}-\frac{4}{21}+\frac{5}{55}-\frac{6}{144}+\cdots.$$

O.

Rawson, R. Knowles. Solution of a question (7049). Ed. Times XXXVII. 109.

Beweis, dass

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{12}-\cdots \text{ in inf.} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\pi+\log(\sqrt{2}-1)\right\}.$$

O.

Jamet. Sur le développement de arctang x en série convergente. Math. II. 52-57.

Die Entwickelung geschieht ohne Benutzung der Differential-
l Integralrechnung. Mn.

J. Stieltjes jr. Over een algorithmus voor het meetkundig midden. Nieuw Arch. IX. 198-211.

Diese Arbeit schliesst sich an eine andere desselben Ver-
sers an, welche sich in Borchardt J. LXXXIX. p. 343 (siehe d. M. XII. 1880. p. 189) findet. Die Beweise der dort ge-
)enen Sätze über das geometrische Mittel einiger reeller Zahlen
rden hier ausführlich mitgeteilt und durch Beispiele erläutert.
r complexe Werte der Zahlen liefert die Anwendung im All-
meinen grosse Schwierigkeiten, welche nur verschwinden, wenn
ın sich auf zwei Zahlen beschränkt. G.

Sachse. Ueber die Darstellung der Bernoulli'schen und Euler'schen Zahlen durch Determinanten. Hoppe Arch. LXVIII. 427-432.

Siehe Abschn. II. Cap. 3. p. 110.

A. Stern. Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen. Kronecker J. XCII. 349-351.

Während schon Euler in seiner Differentialrechnung gezeigt
t, dass die Bernoulli'schen Zahlen allmählich in's Unendliche

wachsen, hat der Herr Verfasser noch nirgends die einfa[che] Eigenschaft dieser Zahlen bewiesen oder auch nur ausgesproch[en] gefunden, dass dieselben von der vierten an ohne jede Un[ter]brechung wachsen. Der Beweis hierfür wird ohne Schwierigk[eit] geführt, indem von der Euler'schen Definition der ν^{ten} Bernoulli'schen Zahl ausgegangen wird:

$$B_\nu = \frac{1 . 2 \dots 2\nu}{2^{2\nu-1}\pi^{2\nu}} S_{2\nu},$$

wo

$$S_{2\nu} = 1 + \frac{1}{2^{2\nu}} + \frac{1}{3^{2\nu}} + \cdots$$

ist. Aus den bekannten Werten für die ersten Bernoulli'sch[en] Zahlen ergiebt sich weiter, dass es deren nur zwei, nämlich B_3 und B_4 giebt, die einander gleich sind, und dass B_2 und B_3 kleiner als B_ν für $\nu > 4$ sind, während $B_1 < B_\nu$ für $\nu > 5$ ist.

T.

A. Berger. Elementära bevis för några formler i differenzkalkylen. Stockh. Öfv. XXXVII. 39-53.

Eine bekannte Relation der Bernoulli'schen Zahlen, sowie Ausdrücke für Σk^m (m positiv, ganz) und $\Sigma \log k$ werden auf neue Art hergeleitet. Ausserdem wird folgende halb-convergente Entwickelung für ein beliebiges reelles $\mu < 1$ gegeben:

$$1^\mu + 2^\mu + \cdots + x^\mu$$
$$= \frac{x^{\mu+1}-1}{\mu+1} + \frac{x^\mu}{2} + K_\mu + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1} B_k(\mu)_k}{2k x^{2k-1-\mu}}$$
$$+ (-1)^n \theta \frac{B_{n+1}(\mu)_{2n+1}}{2(n+1)x^{2n+1-\mu}} \qquad (0<\theta<1),$$

wo die Constante K_μ durch eine unendliche Reihe dargestellt ist.

H.

G. F. Walker. On a certain inequality and a limit. Mess. (2) XII. 37-38.

Beweis, dass für alle Werte von p und q, ausser 0, $\frac{x^p-y^p}{x^q-y^q}$

hen $\frac{p}{q}x^{p-q}$ und $\frac{p}{q}y^{p-q}$ liegt. Daraus folgt, wie der Ver-
r zeigt, dass für $m = \infty$

$$\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + m^p}{m^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

Glr. (O.).

HOMAE. Elementare Behandlung der hypergeometri-
hen Reihe. (Fortsetzung). Schlömilch Z. XXVII. 41-56.

Zwischen je drei Lösungen der im Früheren (Schlömilch Z. L, vgl. F. d. M. XIII. 1881. p. 196) aufgestellten dreigliedri- Recursionsformel mit linearen Coefficienten in n findet eine re homogene Relation mit periodischen Coefficienten statt, deren Bestimmung es sich zunächst handelt. Da der Re- onsformel durch hypergeometrische Reihen genügt wird, in nen das letzte Element x als Parameter auftritt, so hat die ng dieser Aufgabe zugleich Wichtigkeit für die Frage der etzung der durch die hypergeometrische Reihe definirten tion ihres letzten Elements über das Convergenzgebiet hin- Diese Frage wird hier dadurch erledigt, dass die Reihen, ösungen der Recursionsformel, zwischen denen der Zusammen- festgestellt wird, als Functionen von n überall, und als Func- n von x in verschiedenen Gebieten, die gemeinsame Teile n, convergiren. Die erhaltenen Resultate liefern dann das l, die hypergeometrische Reihe als Function ihres letzten ents vollständig zu definiren und ihren Verlauf in der en Ebene, insbesondere ihr Verhalten bei Umkreisungen der lären Punkte 0, 1, ∞ zu bestimmen. Hr.

IEPPEL and T. R. TERRY. Solutions of a question 978). Ed. Times XXXVII. 98-100.

Die von Herrn Sylvester gestellte Aufgabe war die, nach- isen, dass, wenn i und j zwei ganze positive Zahlen, und j grösser als i,

$$(x-1)(x-2)\dots(x-i+1) - \frac{j}{i-j+1}x(x-1)\dots(x-i+2)$$
$$+\frac{j(j-1)}{(i-j+1)(i-j+2)}(x+1)x\dots(x-i+3)$$
$$\frac{j(j-1)(j-2)}{(i-j+1)(i-j+2)(i-j+3)}(x+2)(x+1)\dots(x-i+4)+\cdots$$
$$=\frac{i-j}{i}\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-i)}{x+j-i}$$

ist. Diese merkwürdige Relation wird von Herrn Heppel dur den Schluss von j auf $j+1$ bewiesen. Herr Terry benutzt zu Beweise die bekannte Reihe

$$1-\frac{i}{1}\frac{p}{(i-p+1)}+\frac{i(i+1)}{1.2}\frac{p(p-1)}{(i-p+1)(i-p+2)}+\cdots=0$$

für positive ganze p. Am Schluss wird auf den Zusammenha der obigen Reihe mit der hypergeometrischen Reihe

$$F(i,\ -p,\ i-p+1,\ 1)$$

hingewiesen. M.

M. D'OCAGNE. Sommation d'une série remarquable. Nouv. Ann. (3) I. 171-173.

Für die von Stainville (Gergonne Ann. t. IX.) und dann vo Gergonne und Ampère (ib. t. IX. und XV.) behandelte veral gemeinerte Exponentialreihe

$$S = 1+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+\cdots$$
$$+a(a+k)\dots(a+[n-1]k)\frac{z^n}{1.2\dots n}+\cdots\left(z<\frac{1}{k}\right)$$

wird die Differentialgleichung $\frac{dS}{dz}=\frac{a}{1-kz}S$ hergeleitet un aus dieser ihre Summe $S=(1-kz)^{-\frac{a}{k}}$ erhalten.

T.

E. CATALAN. Sur un article des Nouvelles Annales (Mathématiques. Math. II. 101.

Die Reihe

$$+a\frac{z}{1}+a(a+k)\frac{z^2}{1.2}+a(a+k)(a+2k)\frac{z^3}{1.2.3}+\cdots$$

de Stainville, Gergonne, Ampère und M. d'Ocagne ist ein ialfall der Binomialreihe und hat zur Summe

$$(1-kz)^{-\frac{a}{k}}.$$

Mn. (O.).

D'OCAGNE. Sur le développement des logarithmes t des exponentielles. Nouv. Ann. (3) I. 241-245.

Um aus einer der folgenden Reihen

$$f(x)=A_0+A_1\varphi(x)+A_2\varphi(x)^2+\cdots+A_n\varphi(x)^n+\cdots,$$
$$\log f(x)=a_0+a_1\varphi(x)+a_2\varphi(x)^2+\cdots+a_n\varphi(x)^n+\cdots$$

Coefficienten der anderen zu bestimmen, wird die erste logamisch, die zweite gewöhnlich nach x differentiirt; durch gleichung der Coefficienten erhält man zwischen den a und A eine fortlaufende Reihe von Gleichungen folgender Art:

$$\imath A_n=na_nA_0+(n-1)a_{n-1}A_1+(n-2)a_{n-2}A_2+\cdots+a_1A_{n-1},$$
$$(a_0=\log A_0,\ A_0=e^{a_0}),$$

Hülfe deren sich sowohl die a durch die A, wie umgekehrt, ırrirend oder auch durch Determinanten darstellen lassen. Entwickelungen von $\log(1+x)$ und e^x nach Potenzen von x nen als Beispiele. T.

ıCFARLANE. Solution of a question (6859). Ed. Times XXXVI. 116-117.

Mit Hülfe der Formel

$$\log[a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\beta)]^{\frac{1}{2}}$$
$$=\log a+\frac{b}{a}\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\cos 2(\alpha-\beta)+\cdots,$$

a, b; α, β resp. Längen und Winkel zweier Vectoren in einer ıne sind, wird bewiesen, dass

$$\log\left(1-\frac{2\eta}{1+\eta^2}\cos x\right) = -\eta^2+\frac{1}{2}\eta^4-\frac{1}{3}\eta^6+\cdots$$
$$-2\eta\cos x-\frac{1}{2}\cdot 2\eta^2\cos 2x-\frac{1}{3}\cdot 2\eta^3\cos 3x-\cdots$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\eta^{2i}}{i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2\eta^i}{i}\cos ix.$$

M.

J. Cohn. Beweis einer Entwickelung einer Function der Länge und der Lage einer geraden Linie in eine gewisse unendliche Reihe. Warsch. J. 1881. (Polnisch).

Der Verfasser zeigt, wie eine von C. A. Bjerknes in der Schrift: „Sur le mouvement simultané des corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible" ohne Beweis gegebene Entwickelung einer gewissen Function erhalten werden kann. Dn.

Tanner, R. Harley. Solutions of a question (6919). Ed. Times XXXVII. 42-43.

Wenn
$$u_{x+1}-u_x^2+u_x-1=0,$$
so ist
$$\Sigma\frac{1}{u_x}=\frac{1}{u_0-1}-\frac{1}{u_{x+1}-1}.$$

O.

Weitere Lösungen von Aufgaben über specielle Reihen von W. J. C. Sharp, A. McMurchy, A. Cohen, K. Gale, T. R. Terry, S. Marks finden sich Ed. Times XXXVI. 35; XXXVII. 50, 112.

O.

Sechster Abschnitt.

Differential- und Integralrechnung.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

O. Schlömilch. Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II. Aufgaben aus der Integralrechnung. 3te Aufl. Leipzig. B. G. Teubner.

Die in dieser reichen Sammlung enthaltenen, teils die einfachen Fälle erschöpfenden, teils als besonders instructiv ausgewählten Aufgaben beziehen sich auf Integration entwickelter Functionen einer Variabeln, Quadratur, Rectification, Cubatur, Complanation, Berechnung bestimmter Integrale, Reihen, Doppel- und dreifache Integrale, Mittelwerte, Differentialgleichungen erster und höherer Ordnungen. Regeln sind überall beigegeben.

H.

M. Pasch. Einleitung in die Differential- und Integralrechnung. Leipzig. B. G. Teubner.

Der Verfasser findet, dass die Principien der Differential- und Integralrechnung, mit wenigen Ausnahmen in den Lehrbüchern nicht mit der gegenwärtig erreichbaren Strenge entwickelt sind.

Er lässt zu und rechtfertigt es, dass Vorlesungen für Anfän
nicht auf alle, im Grunde notwendigen Fragen eingehen, w
doch der Erfolg zweifelhaft sei; doch nur in sofern ein späte
Cursus die Strenge nachholen könne. Grade in Rücksicht
diesen Fall sei aber ein Buch nützlich, welches sich mit
schränkung auf die principiellen Lehren die Strenge mit grös
Ausführlichkeit zur Hauptaufgabe macht. Unter diesem Gesic
punkt ist das vorliegende Buch bearbeitet. Des Verfassers e
Sorge ist, den Begriff der Irrationalzahl klar zu machen. Es w
der Begriff einer „Zahlenstrecke" mit Beschränkung der Zahl
positive ganze und Quotienten solcher als eine Gruppe von Za
von folgenden drei Eigenschaften definirt: Die Gruppe umfasst n
alle Zahlen; wenn die Zahl x zur Gruppe gehört, so gehören
ihr auch alle kleineren Zahlen; es giebt keine grösste Zahl
der Gruppe. Dieser Begriff vermag den der rationalen
irrationalen Zahl vollkommen zu ersetzen. Da der Name
seiner Substitution frei wird, kann man statt Zahlenstrecke
sagen. Der Erklärung gehen Sätze über Potenzen voraus, we
für die Theorie der irrationalen Potenzwurzeln gebraucht wer
Es folgt ihr der Nachweis, dass der neue Zahlbegriff für
algebraischen Operationen tauglich ist.

Ueber das Vorstehende können wir ohne Kritik nicht
weggehen. Die im Vorwort ausgesprochenen Motive und
gemeinen Grundsätze bezüglich der Strenge lassen die U
scheidung zwischen Bündigkeit und Ausführlichkeit sehr verm
Letztere ist es, welche sich nachholen lässt, nicht erstere.
Verfasser macht die unbegründete Voraussetzung, dass St
und Einfachheit unvereinbar seien. Ihm ist also auch di
fahrung fremd, dass die allseitige Strenge den Weg zu
fachsten Methode eröffnet. Um das Ziel zu erreichen, dar
sich nicht mit der ersten bündigen Feststellung begnügen, v
hier geschieht.

Gehen wir auf die Ausführung ein, so ist der Begri
Zahlenstrecke, als deren Autor Dedekind genannt wird,
seiner Anwendung und seiner Substitution für den Zahlen
mit grosser Sorgfalt und Umsicht dargelegt. Was aber de

tlichen Erfolg betrifft, so sind ganz wesentliche Einwände gen zu erheben. Die Substitution des Begriffs der Zahlenke für den Zahlbegriff entzieht ersterem den Boden. Denn ihrer durchgehenden Anwendung ist die Zahlenstrecke eine ppe von Zahlenstrecken, die Erklärung also ein Cirkel. Es htet hiernach und zwar nicht erst hiernach, ein, dass wir den öhnlichen Zahlenbegriff nicht entbehren können; und dann s nicht gestattet, den Namen Zahl für die Zahlstrecke zu gechen. Es ist eine Täuschung, wenn der Verfasser meint, n umfassenderen Zahlbegriff gewonnen zu haben, da dere ohne Recurs an den ursprünglichen nie gedacht werden ı. Ist jedoch das Ziel auch nicht erreicht, so ist der Weg, dem der Begriff der Irrationalzahl gesucht wird, darum nicht rerwerfen, auch ist der Fehler, welcher am Mislingen schuld , leicht genug zu enthüllen. Beruht in der Tat, was zugeden sein mag, der Begriff der Irrationalzahl auf der Zahlencke, so folgt daraus nicht, dass beide identificirt werden sen. Dieses voreilige Zuwerkegehen, welches die Wurzel des riffs unmittelbar zum Begriff selbst stempelt (z. B. die Sinnesfindungen dem Körper begrifflich gleich setzt), hat schon oft Sackgassen geführt. Da in der Tat die Irrationalzahl der ızwert der Zahlenstrecke ist, so ist der bei Identificirung begene Fehler genau derselbe, wie überhaupt bei Identificirung Function und Grenzwert, derselbe also auch, welcher alle ieintlichen Schwierigkeiten im Begriff der unendlichen Grössen rsacht hat. Statuirt man zwei Begriffe, Zahlenstrecke und , die ungleich sind, deren erstere aber die Grösse der letzteren mmt, so sind der logische Mangel und die übrigen Inconenzen sofort beseitigt.

Im Anschluss an obige Theorie erklärt der Verfasser 0 und ∞ „Zahlen", deutet also damit an, dass sie in der Definition 'ahlenstrecken mit enthalten seien. Dies ist jedoch unrichtig; ∞ erfüllt die erste der drei Bedingungen nicht, und auf 0 sich die Definition nicht anwenden, weil es keine kleineren iven giebt. Der Verfasser will zwar auf das Nähere nicht hen; da jedoch die Zeichen 0 und ∞ nachher ohne Er-

klärung häufig vorkommen, so war es nötig, die erweckte Meinung, als sei der Begriff für das absolute Unendliche gefunden, zu widerlegen.

Die erschöpfende Gründlichkeit und Consequenz, mit welcher der Anfang bearbeitet war, ist jedoch auch mit diesem Anfang zu Ende. Was folgt, charakterisirt sich durch folgende Eigentümlichkeiten. Mit dem vorher erklärten neuen Zahlbegriff steht es in keiner sichtlichen Verbindung. Die ferneren Erklärungen gehen nicht direct auf ihr Ziel aus; sondern beginnen mit Beispielen, ohne hernach den allgemeinen Begriff davon sichtlich zu unterscheiden und zu kennzeichnen. In die Erklärungen von Grenzwert und Differentialquotient wird gleich von Anfang die Bemerkung eingemischt, dass es sich bei praktischer Verwendung immer nur um begrenzte Genauigkeit handeln kann. Die exacte Geltung dieser Begriffe so abzuleugnen, konnte der Verfasser in methodischen Schwierigkeiten keinen Grund finden; denn, was den exacten Begriff ausmacht, kommt reichlich an anderen Stellen vor; nur fehlt dann immer der Name Grenzwert. Ebenso wird, so oft unendlich kleine Grössen vorkommen, der Name immer durch umständliche Umschreibung umgangen. Eine Klärung der Begriffe, wenn sie überhaupt beabsichtigt war, ist durch ein solches Verfahren nicht zuwege gebracht. Die Gegenstände sind die gewöhnlichen; wenn ein brauchbarer methodischer Gedanke in der Behandlung enthalten sein sollte, so ist er in einem so unfertigen Werke schwer heraus zu finden. H.

C. Jordan. Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. T. I. Calcul différentiel. Paris. 1882. Darb. Bull. (2) VI. 262-264.

Kurze Angabe des Inhalts des genannten Werkes.

T.

P. Mansion. Cours d'analyse infinitésimal de l'École du génie civil. 2me année. 4°. Autographirt.

I. Theorie der Differentialgleichungen und der linearen Gleichungen mit partiellen Derivirten. II. Bestimmte Integrale. III. Differenzenrechnung. IV. Variationsrechnung. Das Buch enthält im 3ten und 4ten Teil einige Beweise des Verfassers, die strenger sind, als man sie gewöhnlich zu geben pflegt, nämlich 1) Aequivalenz der Grenze einer dreifachen Summe und eines dreifachen Integrals. 2) Derivation eines bestimmten Integrals nach einem beliebigen Parameter, wo die Grenze des Integrals und die integrirende Function Functionen dieses Parameters sind. 3) Fundamentaleigenschaften der Euler'schen Integrale. 4) Bedingung des Maximums und Minimums in der Variationsrechnung in Form einer Differentialgleichung. Mn. (O.).

H. A. Lorentz. Leerboek der differentiaal- en integraalrekening en van de eerste beginselen der analytische meetkunde met het oog op de toepassingen in de natuurwetenschap. Leiden. Brill.

Ein Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von ganz besonderem Charakter. Die mathematische Strenge, die ausführliche Entwickelung von Formeln und Theorien, welche noch keine Anwendung gefunden haben, sind in den Hintergrund geschoben, aber die Anwendungen auf Mechanik und Physik besonders hervorgehoben. Auf diese Weise wird das ganze Gebiet durchlaufen und jedesmal nur so viel von den Theorien mitgeteilt, als für die Anwendungen nötig ist.

Voran geht eine kurze Uebersicht der Functionenlehre und der analytischen Geometrie in der Ebene und im Raume. Dann folgt die Differentialrechnung. Hier werden die wichtigsten Regeln für das Differentiiren mitgeteilt, auch die Differentialquotienten höherer Ordnung neben den partiellen Differentialquotienten kurz behandelt. Alsdann wendet sich der Verfasser zu den Grundbegriffen und Grundformeln der Integralrechnung, wobei die doppelten und vielfachen Integrale betrachtet werden. Nun folgt der Taylor'sche Satz, die Behandlung einiger bestimmter Integrale, der Satz von Fourier und eine kurze Uebersicht der

Theorie der Differentialgleichungen. Jedem Abschnitt sind viele Anwendungen, hauptsächlich aus der theoretischen Physik, zugefügt, deren Auflösung am Schlusse des Werkes mitgeteilt wird.

G.

Capitel 2.

Differentialrechnung (Differentiale, Functionen von Differentialen. Maxima und Minima).

T. J. Stieltjes jr. Eenige bemerkingen omtrent de differentiaalquotienten van eene functie van eene veranderlijke. Nieuw Arch. IX. 106-111.

Einige Bemerkungen über die Differentialquotienten einer Function einer Veränderlichen. Besonders wird gezeigt, dass es für die Gültigkeit von

$$\lim \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(X)$$

notwendig ist, dass $f'(x)$ für $x = X$ stetig sei, wie an einigen Beispielen gezeigt wird. Weiter wird bewiesen, dass der Ausdruck

$$\sum_{p=1}^{p=n+1} \frac{f(x_p)}{r'(x_p)} = \frac{1}{1.2\ldots n} f^{(n)}(X),$$

wobei

$$r(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}), \quad x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1},$$

giltig bleibt, wenn bei der Convergenz x_1 und x_{n+1} immer X einschliessen und $f^{(n-1)}(x)$ für den besonderen Wert $x = X$ einen endlichen Differentialquotienten $f^{(n)}(X) = k$ hat. G.

W. W. Johnson. On certain symbolic relations. Mess. (2) XI. 191-192.

Es wird bewiesen, dass Operatoren von der Form

$$x^{n+r} \frac{d^n}{dx^n} x^r$$

ımutativ sind, wie z. B.

$$\frac{d^m}{dx^m} x^{m+p} \frac{d^p}{dx^p} = x^p \frac{d^{m+p}}{dx^{m+p}} x^m.$$

zu werden Anwendungen gegeben.

Glr. (O.).

L. P. DA SILVA. Derivadas de ordem qualquer de y em ordem a x quando è $f(x, y) = 0$. Teixeira J. IV. 109-118.

Herr Silva sucht den analytischen Ausdruck der Derivirten Ordnung von y nach x, wenn y durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

geben ist. Er bestimmt zuerst die Form dieses Ausdruckes t Hülfe auf einander folgender Differentiationen und bestimmt nn die Coefficienten durch Betrachtung des speciellen Falles:

$$y^{\frac{1}{p}}(x+x^2+\cdots+x^n)-1 = 0.$$

Tx. (O.).

. DARBOUX. Sur les différentielles successives des fonctions de plusieurs variables et sur une propriété des fonctions algébriques. C. R. XCIV. 575-577.

Der Verfasser knüpft nochmals an den Satz von Hermite an, on welchem er in den C. R. XCII. 1123. (s. F. d. M. XIII. 1881. 209) usgegangen war, indem er die allgemeine Bedingung der betreffenen Eigenschaft algebraischer Functionen suchte, um nun die igenschaft selbst zu verallgemeinern. Durch eine algebraische ileichung zwischen z, x_1, x_2, ..., x_μ wird z als Function der x estimmt. Die Gleichung sei vom Grade m sowol in Bezug auf z ls auf die Gesammtheit der Variabeln. Differentiirt man sie $m+1$)-mal, indem man alle dx als constant betrachtet, so lässt ich beweisen, dass kein Term ohne ein höheres Differential on z als Factor vorkommt, so dass man auf viele Arten die orm erhält:

$$(2) \qquad d^{m+1}z = A_1 d^m z + A_2 d^{m-1} z + \cdots + A_{m-1} d^2 z.$$

Dies ist die beabsichtigte Gleichung. Für $m = 2$ zeigt sich daraus, dass d^2z Factor von d^3z, folglich auch, wie bei immer neuer Differentiation hervorgeht, Factor von d^4z, d^5z, etc. ist, entsprechend dem ursprünglichen Satze. Eine fernere Betrachtung ergiebt folgende Sätze. Damit die in (2) enthaltenen Relationen durch Elimination der willkürlichen Coefficienten in den A zu partiellen Differentialgleichungen führen, denen die Function z zu genügen hat, muss die Anzahl der Coefficienten in den A kleiner sein als die Anzahl der Differentialquotienten $(m+1)^{ter}$ Ordnung von z. Zwischen der Function z und m seiner Derivirten oder zwischen $m+1$ Derivirten besteht immer eine homogene lineare Relation, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variabeln sind. Sind alle betrachteten Derivirten mindestens von der Ordnung m, so findet die Relation zwischen nur m Derivirten statt. H.

M. Falk. Om derivator och differentialen af en funktion af två obervende variabler. Zeuthen T. (4) VI. 164-182.

Die hier gegebene ausführliche Darstellung der Bedingungen für die Existenz von partiellen und vollständigen Differentialquotienten einer reellen Function von zwei reellen veränderlichen Grössen schliesst sich eng an die von Herrn J. Thomae in seinen beiden Werken „Abriss einer Theorie der complexen Functionen etc." (siehe F. d. M. V. 1873. 218) und „Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale" (siehe F. d. M. VII. 1875. 153) gemachten Untersuchungen. Der Verfasser bezweckt, teils die Aufmerksamkeit auf diese Fragen hinzuleiten, teils zu zeigen, dass es bei einer strengen und gründlichen Erörterung keineswegs sicher ist, dass eine Function ein vollständiges Differential besitzt, selbst dann, wenn die partielle Derivirte einen Sinn hat. Ferner wird der Zusammenhang der behandelten Frage mit gewissen Continuitätsfragen dargestellt. Die Abhandlung ist ein Auszug aus den Vorlesungen des Verfassers über bestimmte Integrale, gehalten an der Universität Upsala im Herbstsemester 1882.

Gm.

P. MANSION. Méthode dite de Fermat pour la recherche des maxima et des minima. Math. II. 193-202.

1) Geschichtliches. Die nach Fermat benannte Methode verdanken wir in Wirklichkeit Descartes oder vielmehr Huygens. Die in den „Varia opera" von Fermat aus einander gesetzte Methode ist in ihrem Princip mit der gewöhnlich in der Differentialrechnung aus einander gesetzten Methode gleich. 2) Die Methode von Huygens besteht in Folgendem: Wenn $F(b)$ ein Maximal- oder Minimalwert von $F(x)$ ist, so ist

$$F(a) = F(c), \quad a < b < c.$$

Daraus folgt unter der Voraussetzung, dass $F'(x)$ einen einzigen Wert für $x = b$ hat, leicht, dass

$$\lim \frac{F(c)-F(a)}{c-a} = F'(b) = 0,$$

wenn a und c gegen b convergiren. Daraus ergiebt sich die Regel: Wenn $F(b)$ ein Maximal- oder Minimalwert von $F(x)$ ist, so ist die Derivirte $F'(x)$ gleich 0 für $x = b$, oder hat nicht nur einen einzigen Wert. (Beispiel: $F(x) = x \,.\, Th \frac{1}{x}$ für $x = 0$). Der zweite Teil dieses letzten Schlusses wird häufig nicht beachtet. Die Theorie lässt sich übrigens völlig ohne Zuhülfenahme des Taylor'schen Satzes aus einander setzen. Mn. (O.).

W. WALTON. On the method of finding maxima and minima of functions of one variable and of two independent variables. Mess. (2) XII. 14-20.

Methode, um zwischen Maximum und Minimum ohne Benutzung der zweiten Derivation zu entscheiden. Glr. (O.).

W. WALTON. On the determination of the maxima and minima of a function of any number of independent variables. Mess. (2) XII. 42-43.

Ausdehnung der Resultate der obigen Arbeit auf n unabhängige Variabele. Glr. (O.).

A. Grünwald. Ueber die Entwickelung der begrenzten Derivationen nach positiven ganzen Potenzen des Index und die damit zusammenhängende Logialrechnung. Prag. Abh. (3) XI. 1-63.

Siehe F. d. M. XIII. 1881. p. 211. H.

A. V. Letnikoff. Neue Untersuchungen über trigonometrische Functionen. Mosk. S. X. Lief. 3. (Russisch).

Der Verfasser dieser grossen Abhandlung (von 84 Seiten hat schon früher in seiner Dissertation „Ueber Integrale vom Typus:

$$\int_a^x (x-u)^{p-1} f(u)\, du^{u},$$

die im Bd. VII. der Mosk. S. erschien, eine ausführliche u strenge Theorie der von Liouville gegebenen Methode des Diff rentiirens mit beliebigem Ordnungsindex nebst einigen Anwendu gen veröffentlicht. Unter den Resultaten dieser Arbeit ist d Integration der Gleichung:

$$(x-a)(x-b)\frac{d^2z}{dx^2}+(c+hx)\frac{dz}{dx}+kz=0$$

hervorzuheben. In der vorliegenden Abhandlung wird diesel Methode auf die Gleichung:

$$(x^2-1)\frac{d^2z}{dx^2}+x\frac{dz}{dx}-m^2z=0$$

angewendet, der die Function

$$z=c_1 \sin(m \arccos x)+c_2 \sin(m \arccos x)$$

genügt. Durch diese Methode erhält der Verfasser neb vielen bekannten Formeln auch mehrere neue von der Art, w sie von Jacobi und Hermite gegeben sind. Zusammen mit d beiden Functionen sin $m\theta$ und cos $m\theta$ wird auch die Functio

$$\xi=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^m}$$

betrachtet, die den beiden ersten so gegenüber steht, wie d

ction $Q^n(x)$ der Function $P^n(x)$ in der Theorie der Kugel-
tionen oder $O^n(x)$ zu $J^n(x)$ in der der Bessel'schen.

Ty.

BUCHHEIM. Some applications of symbolic methods.
Mess. (2) XI. 143-145.

Die Arbeit enthält Beweise mittels symbolischer Methoden: der Formel für die n^{ten} Differentialcoefficienten der Function er Function, 2) von Euler's Satz über homogene Functionen, von Staudt's Satz über Bernoulli'sche Zahlen.

Glr. (O.).

. S. MEYER, MATZ. Solutions of a question (6889).
Ed. Times XXXVII. 45.

$$D^r x^r F(x) = 1.2\dots r\Big[F(x) + xF'(x) + \frac{1}{2!}Dx^2F'(x) + \frac{1}{3!}D^2x^3F'(x) + \cdots\Big] \qquad (r+1)\text{Glieder.}$$

eweis mittels des Schlusses von n auf $n+1$. O.

. BUSK, MATZ. Solutions of a question (6796).
Ed. Times XXXVII. 26.

Beweis, dass

$$e^{hxD}e^{hx} = \frac{1}{1-h}C^{\frac{hx}{1-h}}.$$

O.

. J. WALKER. Solution of a question (6738). Ed. Times XXXVI. 63.

Beweis, dass

$$D^n f(xD)X = f(xD+n)D^nX.$$

O.

Capitel 3.

Integralrechnung.

P. du Bois-Reymond. Ein allgemeiner Satz über die Integrirbarkeit von Functionen integrirbarer Functionen. Klein Ann. XX. 122-124.

Der im Bd. XVI. der Clebsch Ann. p. 112 ohne Beweis veröffentlichte, in diesem Jahrb. Bd. XII. 1880. p. 211 wiedergegebene allgemeine Satz über die Integrirbarkeit einer Function von integrirbaren Functionen wird bewiesen. Ausgegangen wird hierbei von folgendem Satze: Teilt man das Intervall (a, b) in n gleiche Teile, und bezeichnet $\delta^{(n,\varepsilon)}$ einen jeden dieser Teile, in welchem die Schwankung einer Function $\varphi(x)$ eine beliebig zu wählende Grösse ε nicht übersteigt, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrirbarkeit von $\varphi(x)$ im Intervalle (a, b), dass für jeden noch so kleinen Wert ε die Summe $\Sigma\delta^{(n,\varepsilon)}$ den Grenzwert $b-a$ habe. Ist nun $f(x) = F(\varphi(x))$, sind α und β die untere und obere Grenze der Werte $\varphi(x)$ im Intervalle (a, b), in welchem $\varphi(x)$ integrirbar sei, und ist $F(\varphi)$ im Intervall (α, β) von φ stetig, so erhellt mit Hülfe des erwähnten Satzes durch eine einfache Betrachtung, dass auch $f(x)$ im Intervalle (a, b) integrirbar ist. Weiter wird dann gezeigt, dass, wenn $f(x) = F[\varphi(n), \psi(x)]$, auch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ im Intervalle (a, b) integrirbar sind, und in diesem Intervalle $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ resp. zwischen den Grenzen (α, β) und (α_1, β_1) liegen, $f(x)$ wiederum im Intervalle (a, b) integrirbar ist, falls $F(\varphi, \psi)$ eine im Gebiet

$$\alpha \leqq \varphi \leqq \beta, \ \alpha_1 \leqq \psi \leqq \beta_1$$

stetige Function von φ und ψ ist. Die Ausdehnung dieses Beweises auf eine stetige Function einer beliebigen Anzahl integrirbarer Functionen ist hierdurch unmittelbar gegeben. Hr.

Ed. Weyr. Ueber Integration von rationalen Differentialausdrücken. Cas. XI. 125. (Böhmisch).

e Hermite in seinem „Cours d'Analyse de l'École poly-
ıe" gezeigt hat, kann man beim Integral

$$\int \varphi(x) dx,$$

) eine rationale Function bedeutet, den diesbezüglichen
ischen Teilwert bestimmen, ohne die Wurzelwerte des in
ırkommenden Nenners zu kennen.

r Verfasser entwickelt nun in der I. Abt. die Methode von
: und wendet sie ausser den bekannten Fällen auch auf

$$\int \frac{dx}{(x^5+5px^4+q)^2}$$

zeigt in einer II. Abt., wie man durch fortschreitende
on das allgemeine Integral bestimmen kann, falls die
ı Factoren des Nenners bekannt sind, wobei er mit der
lung von

$$\int \frac{F(z)dz}{(z+a_1)^{\lambda_1}(z+a_2)^{\lambda_2}\dots(z+a_n)^{\lambda_n}}$$

;emeinen und Speciellen schliesst. Std.

ıPTEYN. Over den vorm van zekere differentialen,
: integralen zuiver algebraische functien zijn
over hunne integralen. Amst., Versl. en Meded. XVII.
!8.

e Arbeit beschäftigt sich mit der Form gewisser Diffe-
:, deren Integrale rein algebraische Functionen sind, und
ntegrale. Zunächst wird

$$\int \sqrt[q]{F(x)}\, dx,$$

$F(x)$ eine rationale Function von x und q eine ganze
e Zahl bedeutet, besprochen und die allgemeinste Form
ben, welche $F(x)$ besitzen kann, wenn das genannte Inte-
n rein algebraisches sein soll. Weiter werden die Fälle
ıcht, in denen $F(x)$ auf die Form gebracht ist:

$$(x-\alpha)^m(\beta+\gamma r+\dots+\lambda x^n)^p,$$

wo

$$\alpha, \beta, \ldots, \lambda, m, n, p$$

Constante sind, welche gewissen Bedingungen genügen. Besondere Fälle sind: $x^m(a+bx^n)^p$ und $x^m(a+bx+cx^{2n})^p$. Die betreffenden Integrale werden bestimmt. Darauf wird gezeigt, in welchen Fällen

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

rein logarithmisch ist, und welches die allgemeinen Reductionsformeln dieses Integrals sind. Hinsichtlich der letztgenannten Form kommt der Verfasser zu dem Schluss: Wenn in

$$x^m(a+bx+cx^{2n})^p dx$$

die Exponenten den Bedingungen

$$p = -\frac{2k+1}{2} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$m = k_1 n - 1 \qquad (k_1 = 1, 2, \ldots, 2k)$$

genügen, so ist das Integral rein algebraisch, und zwar gleich

$$\frac{C}{C^{1+p}}(a+bx^n+cx^{2n})^{1+p}(X^{rn}+A_n X^{(r-1)n}+\cdots+A_{rn}),$$

worin sich die Unbekannten

$$\frac{C}{C^{1+p}},\ A_n,\ A_{2n}, \ldots A_{rn}$$

aus $r+1$ bekannten linearen Gleichungen ergeben und

$$r = 2k-1$$

ist. G.

H. B. D. Solution d'une question (1415). Nouv. Ann. (3) I. 526-527.

Es handelt sich um das Integral

$$\int \frac{\alpha x+(n-1)\beta}{x} \cdot \frac{(\alpha x+\beta)^{\frac{n}{2}-1} dx}{\sqrt{x^{n+1}\pm(\alpha x+\beta)^n}} = \frac{2}{\sqrt{\pm 1}} \operatorname{arctang}\left(\frac{z}{\sqrt{\pm 1}}\right)+k,$$

wo

$$z = \sqrt{\frac{x^{n+1}\pm(\alpha x+\beta)^n}{(\alpha x+\beta)^n}}$$

ist. O.

ORLETTI. Solution d'une question (1377). Nouv. Ann. I. 376-377.

Es handelt sich um specielle Fälle des Integrals

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \frac{dx}{\sqrt{\varphi^m(x)-1}} = \frac{2}{m} \text{arc tang} \sqrt{\varphi^m(x)-1} + C.$$

O.

ÉALIS. Sur quelques intégrales indéfinies. Nouv. Ann. I. 343-351.

Eine grosse Anzahl von Integralen, welche die Form ellip-
er Integrale dritter Gattung haben, wird durch irrationale
titution aus der Arcustangensformel hergeleitet; sie sind teils
teils schon von Euler und Anderen behandelt.

H.

I. PHILBRICK. Integration of some general classes trigonometric functions. Anal. IX. 177-180.

Reductionsformeln für

$$\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^n}$$

ähnliche Formen, in denen $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ an
von $\sin x$ stehen. Jn. (O.).

. P. DA SILVA. Sobre alguns integraes indefinidos. ixeira J. IV. 87-90.

Herr Silva zeigt, dass man durch Vereinigung der Methode
eilweisen Integration mit der Substitution zu folgenden Inte-
n gelangen kann:

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = \frac{u}{v}, \quad \int \frac{x^2 dx}{v^2} = -\frac{u}{v},$$

wo

$$u = x\sin x + \cos x, \quad v = \sin x - x\cos x;$$

Resultat, das sich übrigens auch in Hermite's Cours d'analyse
t. Tx. (O.).

A. Steen. Om Anvendelsen af delvis Integration. Zeuthen T. (4) VI. 51-55.

Die partielle Integrationsmethode wird hier auf einige Beispiele angewendet, die verschiedenen Verfassern entnommen sind, namentlich auf solche, wo dieselbe als nicht durchführbar erschienen ist. Besonders bemerkenswert sind die vier Beispiele, welche von Hermite (Cours d'analyse de l'École polyt. 1873 p. 260,) angeführt sind. Die folgenden Andeutungen, bei denen die Hermite'schen Bezeichnungen beibehalten sind, werden den Vorgang hinreichend erläutern.

$$\int \frac{x^2 dx}{u^2} = -\int \frac{x}{\cos x} \cdot d\frac{1}{u},$$

$$\int \frac{bx^2 dx}{(au+bv)^2} = -\int \frac{bx}{a\cos x + b\sin x} \cdot d\,\frac{1}{au+bv},$$

$$\int \frac{a dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tg} x]^2} = \int \frac{a\cos x}{ax+b} \cdot \frac{(ax+b)\cos x\, dx}{(a\cos x + (ax+b)\sin x)^2}.$$

Gm.

J. Griffiths, Hadamard. Solutions of a question (6789). Ed. Times XXXVII. 26-27.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - \mu x^3 - \left(\frac{t^2}{e^2} + 1 - \frac{\mu^2}{4}\right)x^2 + \mu x + \frac{t^2}{e^4} - \frac{\mu^2}{4} = 0,$$

wo t variabel, μ und e constant sind, so ist

$$\int \left(\frac{1-e^2x^2}{1-x_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx_1 + \int \left(\frac{1-e^2x^2}{1-x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx_2 + \cdots = 2t + c.$$

O.

R. Hoppe. Zwei reciproke Relationen einer Integralfunction, nebst Anwendung. Hoppe Arch. LXVII. 412-424.

Es werden die zwei Relationen hergeleitet:

$$\int_{u=0} \operatorname{arctg} \frac{v\sqrt{u^2+\sin^2\beta}}{u\cos\beta}\, d\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{u^2+\sin^2\beta}}{\cos\beta}$$

$$+\int_{v=0} \operatorname{arctg} \frac{u\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}{v\sin\beta}\, d\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}{\sin\beta} = \operatorname{arctg} u \operatorname{arctg} v$$

d

$$\int_{=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{v \sin\beta}{u\sqrt{v^2+\cos^2\beta}}\, d \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}} -$$

$$\int_{=0} \operatorname{arc\,tg} \frac{v_1 \sin\beta_1}{u_1\sqrt{v_1^2+\cos^2\beta_1}}\, d \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta_1}{\sqrt{v_1^2+\cos^2\beta_1}} =$$

$$\mathrm{l}(\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} u_1 - R) - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta}{\sqrt{v^2+\cos^2\beta}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin\beta_1}{\sqrt{v_1^2+\cos^2\beta_1}},$$

welcher letzteren

$$\sin\beta = u \operatorname{tg}\beta_1;\ \sin\beta_1 = u_1 \operatorname{tg}\beta$$

. Reducirt man beständig abwechselnd mit beiden Relationen ıen beliebigen Wert der Function

$$W(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\int_{\delta}^{\beta} \psi d\varphi,$$

)

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\beta}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{tg}\psi}{\operatorname{tg}\alpha \sin\beta}\right)^2 = 1;\ \sin\delta = \sin\beta\cos\gamma$$

, auf einen neuen, so gelangt man nach sechs Reductionen wieder f den ursprünglichen Functionswert. Der so gebildete Cyklus n sechs Functionswerten, entsprechend sechs Wertsystemen der β, γ, die in bestimmten einfachen trigonometrischen Beziehun- n stehen, ist verbunden durch die sechs Beziehungen:

$$2(W + W_1) = R(\alpha + \alpha_1 - R) - \gamma_3\gamma_1,$$
$$2(W_1 + W_2) = R(\alpha + \alpha_3 - R) - \gamma_1\gamma_2,$$
$$2(W_2 + W_3) = R(\alpha_2 + \alpha_3 - R) - \gamma_5\gamma,$$
$$2(W_3 + W_4) = R(\alpha_2 + \alpha_5 - R) - \gamma_3\gamma_4,$$
$$2(W_4 + W_5) = R(\alpha_4 + \alpha_5 - R) - \gamma_1\gamma_2,$$
$$2(W_5 + W) = R(\alpha_4 + \alpha_1 - R) - \gamma_5\gamma.$$

ie Function $W(\alpha, \beta, \gamma)$ drückt die Grösse des Winkels von vier imensionen aus, dessen vier Kanten die Grenzpunkte der Strecken ner orthogonalen gebrochenen Linie mit dem Ende derselben ɜrbinden, und zwar bezeichnen α, β, γ die spitzen Winkel, welche e successiven Strecken, von der 2ten an, mit der Geraden zwischen rem Endpunkt und dem nächstvorhergehenden Grenzpunkt bilden. in solcher Winkel wird ein Elementartetratop genannt. Aus ɜn Relationen ergeben sich viele Specialwerte der Function,

namentlich die der inneren Winkel aller regelmässigen Figuren von vier Dimensionen. H.

H. Resal. Note sur l'application d'un théorème de Poncelet au calcul approximatif des arcs de courbes planes. C. R. XCIV. 1375-1377.

Der Satz von Poncelet lautet: Variirt man u und v so, dass $\frac{u}{v}$ beständig zwischen den Grenzen $\operatorname{tg}\vartheta_1$ und $\operatorname{tg}\vartheta_2 > \operatorname{tg}\vartheta_1$ bleibt, und setzt man

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\vartheta_2 - \vartheta_1);\ \beta = \frac{\cos(\vartheta_1 + \varepsilon)}{\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon};\ \alpha = \frac{\sin(\vartheta_1 + \varepsilon)}{\cos^2\frac{1}{2}\varepsilon},$$

so differirt $\sqrt{u^2+v^2}$ von $\beta u + \alpha v$ höchstens um $\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varepsilon$. Dieser Satz auf das Bogenelement $ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ angewandt, giebt:

$$s = \beta(x''-x') + \alpha(y''-y') + \cdots,$$

wo der Rest bekannte Grenzen hat. Zur annähernden Berechnung eines Curvenbogens ist dann dieser in Stücke zu teilen, innerhalb deren die Neigung der Tangente höchstens soviel variirt, als dem vorgeschriebenen Fehlermaximum $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon$ entspricht. Hierzu folgt eine numerische Tabelle der β und α für $\varepsilon = 4'$ und für die Reihe der ϑ_1 durch alle 8°. Anlass zur Aufstellung der Methode war die Berechnung der Länge gelegter Kabel.

H.

G. Pfeiffer. Formeln für den Inhalt der Kegelfläche. Pr. Berlin. Sep. Weidmann.

Ausgehend von der unbestimmt begrenzten beliebig konischen Fläche, welche ein einfaches Integral ergiebt, wird zum Kegel 2ten Grades mit Begrenzung durch eine Ebene übergegangen und der Fall eines symmetrischen Kegelmantels, wo das Integral elliptisch ist, ausführlich discutirt. H.

ɔRLOW. Sur une intégrale double. Nouv. Ann. (3) I. 1-318.

Didon hat in den Ann. de l'Éc. Norm. VII. 89. (s. F. d. M. II. . 302) das Doppelintegral

$$\iint (1-x^2-y^2)^{\frac{\mu}{2}-1}(1-2ax+a^2)^{-\frac{\mu}{2}}(1-2by+b^2)^{-\frac{b}{2}}dx\,dy,$$

c, y innerhalb $x^2+y^2\leqq 1$ variiren, für positive ganze μ entelt dargestellt, und es hat sich dabei gezeigt, dass es allein ːtion von ab ist. Letzteres Resultat gilt jedoch für jedes reelle ive μ. Der Beweis dafür ist der Inhalt des Gegenwärtigen. ɜi ergiebt sich ferner, dass zwei Formeln, welche Didon ɜndet, als Specialfälle in einer allgemeineren enthalten sind.

H.

Capitel 4.

Bestimmte Integrale.

IVANOFF. Sur les intégrales définies uniformément ɔnvergentes. S. M. F. Bull. X. 147-157.

Der Verfasser sucht die Bedingung, unter der die Derivirte ɜ bestimmten Integrals für die Grenze unendlich durch Differation unter dem Integralzeichen gefunden wird, und wendet, da ɜ Betrachtung nicht zum Ziele führt, die Methode von Weierɜs an, die, bezüglich auf unendliche Reihen, den Begriff der ːhmässigen Convergenz (convergence uniforme) einführt. In ɪg auf Integrale lautet die Definition: Das Integral

$$\Phi(x)=\int_a^{\infty} f(x,z)dz$$

ɪt gleichmässig convergent, wenn man für alle Werte von x ɾhalb eines Bezirks eine Zahl p so bestimmen kann, dass

für $m \gtreqless p$

$$\text{mod.} \int_m^\infty f(x, z)dz < k$$

wird, wo k eine beliebig klein gegebene Grösse bezeichnet. Er leitet dann den Satz her: „Wenn das Integral gleichmässig convergirt, so ist es eine für alle Werte des Parameters innerhalb des Bezirks der gleichmässigen Convergenz stetige Function, und man kann dieselbe durch Differentiation unter dem Integralzeichen differentiiren.“ Hierzu folgen einige Beispiele. H.

A. Dawidoff. Sur une formule générale des intégrales définies. Résal J. (3) VIII. 389-412.

Ein reducirter rationaler echter Bruch $f(x):F(x)$, wo die Wurzeln $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ von

$$F(x) = 0$$

alle ungleich sind, wird in Partialbrüche zerlegt und dann die Entwickelung mit $F(x)$ multiplicirt. Es sei ferner $\varphi(x)$ eine beliebige in die Taylor'sche Reihe entwickelbare Function, deren Discontinuitätsmodul grösser als alle α, $f(x)$ die Summe der n ersten Terme, ε^x der Rest. Dann ergiebt sich nach Substitution von $\varphi(x) - \varepsilon_x$ für $f(x)$

$$\varphi(x) = \Sigma \frac{\varphi(x)}{F'(x)} \frac{F(x)}{x-\alpha} + e,$$

wo e für $n = \infty$ verschwindet. Diese Gleichung und das Integral derselben:

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \Sigma \frac{\varphi(\alpha)}{F'(\alpha)} \int_a^b \frac{F(x)dx}{x-\alpha} + e_1$$

sind die beabsichtigten Resultate. Der Verfasser behauptet, dass sich daraus fast alle bekannten Sätze über bestimmte Integrale herleiten lassen, und giebt einige Beispiele der Anwendung. Es ist dabei zu bemerken, dass nicht nur $F(x)$, sondern auch alle α sich mit n verändern müssen, da $F(x)$ als vom n^{ten} Grade vorausgesetzt ist. Hiermit sind in der Tat die Beispiele in Ueberein-

ıng, nicht aber mit der Voraussetzung, dass $F(x)$ ein ›men sei; denn es wird u. a. $F(x) = \sin mx$ gesetzt, d. h. renzwert eines Polynomens als Polynomen betrachtet.

H.

ILLNER. Sur les intégrales définies des fonctions ne variable complexe. Stockh. Handl. XVIII. No. 6.

›er Verfasser beabsichtigt in der ersten Abteilung dieser ıdlung, eine allgemeine Integrationsformel zu geben, die nur für rationale, sondern auch für doppelt-periodische und se andere Functionen gilt. Diese Formel wird in folgender hergestellt:

$$M_\nu \int_\nu^x \frac{\psi(x)dx}{(x-a)^s F_1(x)} = \frac{1}{(s-1)!} \frac{d^{s-1}}{da^{s-1}} \left[\frac{\psi(a)}{F'(a)} \log \frac{\Pi(a)}{\Pi_1(a)}\right]$$

$$+ \frac{\psi(a_1)}{F(a_1)} \log \frac{\Pi(a_1)}{\Pi_1(a_1)} + \cdots + \frac{\psi(a_k)}{F(a_k)} \log \frac{\Pi(a_k)}{\Pi_1(a_k)},$$

$F_1(x)$ und $\psi(x)$ rationale ganze Functionen von x sind;

$$F(x) = (x-a)^s F_1(x),$$
$$F_1(x) = (x-a_1)\dots(x-a_k),$$
$$\Pi(x) = (x-x_1)^{M_1}\dots(x-x_\mu)_{M_\mu},$$
$$\Pi_1(x) = (x-h_1)^{M_1}\dots(x-h_\mu)_{M_\mu},$$

noch die Bedingungen kommen, dass $F(x)$ von höherem ist als $\psi(x)$, sowie dass $F(x)$ und $\psi(x)$ nicht gemeinsame ıln haben. In der zweiten Abteilung untersucht der Ver-. unter welchen Bedingungen seine Integrationsmethode in heorie der Quaternionen angewandt werden kann.

E.

ERRE. Sur quelques équations transcendantes. R. XCIV. 160-163.

ERRE. Sur la détermination du genre d'une fonc- n transcendante entière. C. R. XCIV. 635-638.

Laguerre. Sur les fonctions du genre zéro et du genre un. C. R. XCV. 828-831.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 57.

W. Gosiewski. Ueber stetige Functionen, für welche die Existenz des allgemeinen Integrales nicht festgestellt werden kann. Im Buche „Ognisko“. (Polnisch).

Herr Cohen Stuart hat in einer im XI. Bande der „Archives Néerlandaises“ erschienenen Arbeit die Bemerkung gemacht, dass die Grundformel der Integralrechnung

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

nicht immer richtig zu sein braucht, wenn auch die Function $F(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen endlich und stetig bleibt, und hat als Beispiel dazu die für $x = 0$ discontuirliche Function

$$F(x) = e^{-e^{\frac{1}{x}}}$$

gewählt. Integrirt man nämlich die Function

$$F'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x} - e^{\frac{1}{x}}}}{x^2},$$

so erhält man nach Cohen Stuart das allgemeine Integral

$$e^{-e^{\frac{1}{x}}} + C,$$

welches für $x = 0$ keinen Sinn hat.

Dieses Resultat, welches die Richtigkeit der obigen Bemerkung beweisen sollte, ist aber nach Herrn Gosiewski's Meinung unrichtig. Das richtige Resultat ist die Function

$$e^{-e^{\frac{1}{x}}} E\left(\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{\pi}\right) + C,$$

wo das bekannte Zeichen E den ganzen Teil der in den Klam-

rn stehenden Zahl bedeutet; diese letzte Function ist aber llich und stetig von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

Herr Gosiewski zeigt an einem anderen Beispiele die Richtig- t der Cohen Stuart'schen Bemerkung. Für die endliche und tige Function

$$F'(x) = -\frac{\pi}{4}\,\frac{\sin(\pi\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x\sqrt{(E\operatorname{tg} x)^6 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} x\right)}}$$

det der Verfasser

$$\int_{+0}^{a} F'(x)dx = \sqrt{(E(\operatorname{tg} x))^6 + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg} x\right)} - 1$$
$$- \sum_{n=1}^{n=E(\operatorname{tg} x)} \left[\sqrt{n^6 + \cos^2 n\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(n-1)^6 + \cos^2 n\cdot\frac{\pi}{2}}\right].$$

r $x < \frac{\pi}{2}$ ist $\int_0^x f'(x)dx$ endlich und stetig; für $x = \frac{\pi}{2} - 0$ rd das Integral unbestimmt $(\infty - \infty)$ und bleibt unbestimmt : alle Werte von x, die grösser sind als $\frac{\pi}{2}$ u. s. f. So lange so für diese Werte die Summe

$$\sum_{n=1}^{n=E(\operatorname{tg} x)} \sqrt{n^6 + \cos^2 n\frac{\pi}{2}} - \sqrt{(n-1)^6 + \cos^2 n\frac{\pi}{2}}$$

cht in eine neue Form, in welcher die Unbestimmtheit ver- hwindet, verwandelt werden kann, so lange können wir auch cht behaupten, dass die Function $F(x)$ das allgemeine Integral :r Function $F'(x)$ darstellt. Dn.

. Hoppe. Infinitärer Hauptwert und approximative Entwickelung. Hoppe Arch. LXVIII. 37-52.

Im Anschlusse an einen Aufsatz von Schröder und Schlö- ilch (vgl. d. Jahrbuch XII. 1880. p. 225) giebt der Herr Verfasser ne Entwickelung des bestimmten Integrals

$$C_n = \int_0^1 (u)_n du$$

für grosse Werte von n. Darnach kann die approximative Formel $(-1)^{n-1} C_n \log^2 n = 1$, welche, obwol bei $\lim n = +\infty$ richtig, doch selbst bei hohen Werten von n als sehr ungenau sich herausgestellt hat, verbessert werden. Vorher geht eine infinitäre Darstellung der Facultät n^{ten} Grades und des Binomialcoefficienten $(u)_n$. St.

W. H. L. Russell. On certain definite integrals. No. 10. Edinb. Proc. XXXIII. 258-262.

W. Spottiswoode. Note on Mr. Russell's paper: „On certain definite integrals." Edinb. Proc. XXXIII. 341-343.

Herr Russell hatte zur Bestimmung gewisser bestimmter Integrale die Transformation

$$(a, b, \dots)(x, 1)^4 = (\alpha, \beta, \gamma)(\lambda x^2 - 2\mu x + \nu, 1)^2$$

angewandt. Herr Spottiswoode beschäftigt sich mit ihr hinsichtlich ihrer Existenz und der allgemeinen Frage ähnlicher Transformationen einer gegebenen Function von grader Ordnung.

Cly. (O.).

J. W. L. Glaisher. Expression for arg sn a and (arg sn a)² as definite integrals. Quart. J. XIX. 71-74.

Die genannten Functionen werden dargestellt in der Form

$$\arg \operatorname{sn} a = \frac{1}{\pi} \int_0^{K'} \log \frac{1 + \operatorname{dn}(u, k')}{1 - \operatorname{dn}(u, k')}\, du,$$

$$(\arg \operatorname{sn} a)^2 = \frac{2}{\pi} \left[K' \int_0^K \log(1 - a^2 k^2 \operatorname{sn}^2 u)\, du - K \int_0^K \log(1 - a^2 \operatorname{dn}^2 u)\, du \right]$$

Die zwei Formeln sind zuerst gefunden durch Entwickelung der Logarithmen nach Potenzen von dn u, sn u. Die erste erhält man noch leichter durch Integration von

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2 \operatorname{cn} \alpha \operatorname{dn} \alpha\, d\varphi}{\operatorname{dn}^2 \alpha - k'^2 \operatorname{sn}^2 \alpha \sin^2 \varphi} \qquad (\operatorname{sn} \alpha = $$

ch a. Für $a = 1$ ergeben sich bemerkenswerte Formeln. Die 'eite Formel wird noch transformirt: die zwei Integrale lassen h in imaginärer Form auf eins reduciren, dann auch durch ı Doppelintegral ausdrücken. Aehnlich werden dargestellt:

$$\arg \operatorname{cn} a = K - \frac{2}{\pi} \int_0^{K+iK'} \operatorname{arctg} \left(\frac{ak \operatorname{cn} u}{k'} \right) du,$$

$$\arg \operatorname{dn} a = K + iK' + \frac{1}{\pi} \int_{K'}^{K'+iK} \log \frac{1 - a \operatorname{sn}(u, k')}{1 + a \operatorname{sn}(u, k')} du;$$

ersterer Formel ist $a \gtrless 1$ und $\gtreqless \frac{k'}{k}$, in letzterer $a \gtreqless k'$.

H.

. **Steen.** Om et bestemt Integral som diskontinuert Funktion. Zeuthen T. (4) VI. 65-68.

Das Integral (m eine ganze Zahl)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^m ax}{x^m} dx = \pm \frac{\pi a^{m-1}}{2.4 \ldots 2(m-1)} \left\{ m^{m-1} - \frac{m}{1} (m-2)^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} (m-4)^{m-1} - \ldots \right\}$$

igt für $a = 0$ eine besondere Discontinuität, welche in der aphischen Darstellung nur sichtbar für $m = 1$ oder $m = 2$ hertritt, während sie für grössere m sich nur in den $(m-1)^{\text{ten}}$ ıd höheren Differentialquotienten erkennen lässt.

Gm.

'olstenholme, C. B. S. Cavallin. Solutions of a question (6507). Ed. Times XXXVI. 86-87.

Sind $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ lauter positive Grössen, so ist

$$\int^{\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \ldots \sin a_n x \cos b_1 x \cos b_2 x \ldots \cos b_m x \sin \lambda x}{x^{n+1}} dx$$

leich $\frac{\pi}{2} a_1 a_2 \ldots a_n$, wenn λ einen Wert hat, der nicht kleiner ls $\Sigma(a) + \Sigma(b)$ ist.

O.

T. R. Terry, Matz. Solutions of a question (6655). Ed. Times XXXVI. 52.

Je nachdem q eine ganze Zahl, grösser oder kleiner als ist, ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}\theta \cos^2 q\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2^{2p+2}} \cdot \frac{(2p)!}{(p!)^2}$$

oder

$$= \frac{\pi}{2^{2p+2}} \left\{ \frac{(2p)!}{(p!)^2} + \frac{(2p)!}{(p+q)!\,(p-q)!} \right.$$

O.

Wolstenholme. Two notes: 1) A definite integr 2) Equation of the director-circle of a conic. L. M. S. Proc. XIII. 185-188.

1) Ist $\frac{x^n}{n!} X$ der Rest der Maclaurin'schen Reihe für f so wird gefunden:

$$\int_0^x \frac{X}{x^r} dx = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(r)}{\Gamma(n+r)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(x)dx}{x^r},$$

wo r eine Constante < 1. Zur Herleitung sind jedoch diverg Integrale verwandt worden.

2) Die Gleichung des Director-Kreises, in Cartesischen C dinaten ausgedrückt:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}^{-\frac{1}{2}} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}^{-\frac{1}{2}} = 2 \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}^{-\frac{1}{2}} \cos\omega,$$

wo $u = 0$ die Gleichung eines Kegelschnitts, ω den Wi zwischen den Axen der x und y bezeichnet, wird in homoge und in trilinearen Coordinaten dargestellt. Ferner werden Gleichungen der Brennpunkte

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 u}{\delta y^2}^{-\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 u}{\delta x \delta y}^{-\frac{1}{2}} \sec\omega$$

in die für Arealcoordinaten transformirt. H.

. **Berger.** Sur quelques applications de la fonction Gamma à la théorie des nombres. Upsala. E. Berling. 4°.

Siehe Abschn. III. Cap. 1. p. 128.

. J. Thomson. Note on $\int_0^\infty \frac{\cos sx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}}dx$. Quart. J. XVIII. 377-381.

Das Integral ist ein Specialfall dessen, welches Glaisher in inem Aufsatz „On Riccati's equation" Phil. Trans. 1881 (siehe . d. M. XIII. 1881. p. 273.) behandelt hat, nämlich der einzige, ıf den dessen Ausdruck nicht anwendbar ist. Es lässt sich zu- ichst leicht auf den Wert für $p = 0$ reduciren, was hier in der orm geschieht:

$$v_p = s^{-p}\int_0^\infty \frac{\cos sx\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}} = \frac{\left(-\frac{2s}{a^2}\right)^p}{1.3\ldots(2p-1)}\frac{d^p v_0}{(d\,.\,s^2)^p},$$

ıd genügt der Gleichung

$$\frac{d^2v_p}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dv_p}{ds}-\left(\frac{p^2}{s^2}+a^2\right)v_p = 0,$$

oraus zunächst:

$$\frac{d^2v_0}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dv_0}{ds}-a^2v_0 = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist nach Stokes Cambr. Phil. Trans. 1880):

$$v_0 = \left(E+\frac{1}{2}D\log\frac{1}{a^2s^2}\right)\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{(as)^{2k}}{2^{2k}k!^2}+D\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(as)^{2k}}{2^{2k}k!^2}\sum_{h=1}^{h=k}\frac{1}{h}.$$

Für den vorliegenden Fall muss v_0 für $r = \infty$ verschwinden. Unter dieser Bedingung fand Stokes:

$$\frac{E^{*)}}{D} = k = \log 8+\pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}11593.$$

*) Im Text verdruckt.

Aus der Bedingung für $s = 0$, dass $sv_1 = a^{-2}$ werden muss giebt sich $D = 1$, also $E = k$. Nachdem hiermit v_0 besti ist, folgt der Wert von v_p. Da für grosse as die Reihen sehr spät zu convergiren anfangen, so entwickelt der Verf v_0 noch in folgender Form:

$$v_p = \frac{e^{-as}}{\sqrt{s}}\left(A_0 + \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \cdots\right)$$

und findet:

$$A_k = \frac{A_0}{(2a)^k} \prod_{h=0}^{h=k} \left[p^2 - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$A_0 = \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{a^{-p}}{1.3\ldots(2p-1)}.$$

H.

A. Winckler. Ueber die Entwickelung einiger von Euler'schen Integrale zweiter Gattung abhäng Ausdrücke in Reihen. Wien. Ber. LXXXV. 1039-1067.

Durch Zerlegung des Intervalls in die Vielfachen von ϱ gefunden:

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^{k=\infty} (a-1)(a-2)\ldots(a-k)\,\varphi(n)\psi(a-n-$$

$$\varphi(n) = 1 - \left(1 + \frac{\varrho}{1!} + \cdots \frac{\varrho^n}{n!}\right) e^{-\varrho};\; \psi(a) = \sum_{k=1}^{k=\infty} (k\varrho)^a e^{-k\varrho},$$

das ist mit einer Umformung von $\varphi(n)$ ein Resultat von Hen Demnächst wird die Entwickelung

$$[\Gamma(a+p+1)]^r = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n a^n \quad (p \text{ positive ganze Z}$$

in Angriff genommen, welche Bourguet für zwei Special untersucht hatte. Voraus bekannt ist

$$K_0 = (p!)^r;$$

dadurch sind die übrigen Coefficienten recurrirend bestimmt der Relation

$$K_n = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k s_k K_{n-k},$$

$$-s_1 = \Gamma'(1) + \sum_{h=1}^{h=p} \frac{1}{h}; \quad s_k = \sum_{h=p+1}^{h=\infty} h^{-k}.$$

wird weiter gezeigt, welche Mittel zur Berechnung zu Gebote hen, namentlich für die von Bourguet behandelten Fälle $r = 1$ d $r = -1$. H.

Tannery. Sur les intégrales eulériennes. C. R. XCIV. 1698-1701.

Tannery. Rectification à une communication antérieure sur les intégrales eulériennes. C. R. XCV. 75.

Das Gegenwärtige knüpft an Prym's Zerlegung

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(x+k)} + Q(x)$$

, wo $Q(x)$ nach Potenzen von x entwickelt und die Coefficienten durch bestimmte Integrale dargestellt sind. Der Versser stellt dafür folgenden Ausdruck auf:

$$eQ(x) = \cfrac{1}{2-x-\cfrac{1(1-x)}{4-x-\cfrac{2(2-x)}{6-x-\cfrac{3(3-x)}{8-x-\cdots}}}},$$

ewiesen nur für reelle x. Der Beweis stützt sich auf folgenden atz. „Sind $U = \Sigma u_n x^n$ und $V = \Sigma v_n x^n$ zwei Reihen, die für $< x < a$ convergiren, für $x = a$ divergiren, sind u_n und v_n positiv nd ist, für $n = \infty$, $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lambda$, so ist auch $\lim \frac{U}{V} = \lambda$." Dabei ird bemerkt, dass ein specieller Fall dieses Satzes von Appell n den C. R. LXXXVII. 690, s. F. d. M. X. 1878. 184 publicirt st. In dem späteren Artikel wird hinzugefügt, dass Appell in Grunert Arch. 1879 (LXIV.) 387, siehe F. d. M. XII. 1880. 185 len Satz selbst gegeben hat. Der Appell'sche Satz ist nicht auf lie Voraussetzung einer gemeinsamen Grenze der Convergenz und auf diese Grenze beschränkt, sondern behauptet schlechthin lie Gleichheit des Grenzwerts des Quotienten der divergenten

Reihensummen mit dem der allgemeinen Glieder, wofern letztere existirt. Die Herleitung des obigen Ausdrucks für Q beruht auf der Zerlegung des unbestimmten Integrals in den Quotienten der zwei Grössen

$$z = e^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^p, \quad u = e^{\frac{1}{1-x}}(1-x)^p \int_0^x \frac{dx}{(1-x)^{p+1} e^{\frac{1}{1-x}}}$$

und Entwickelung derselben nach Potenzen von x. Dann nämlich ist

$$Q(p) = \lim \frac{u}{z} \quad (x = 1).$$

Für u und z werden Differentialgleichungen gefunden, daraus Relationen für die Coefficienten hergeleitet und diese durch den obigen Kettenbruch gelöst. Zum Schlusse wird Q in folgende Reihe entwickelt:

$$eQ(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{n!\,(x-1)\,(x-2)\ldots(x-n)}{q_n\, q_{n+1}},$$

$$q_n = \sum_{h=0}^{h=n} \frac{n(n-1)\ldots(n-h+1)\,(n-x)\,(n-1-x)\ldots(n-h+1-x)}{h!}.$$

H.

A. Berger. En generalisation af några formler i Gamma-funktionens teori. Stockh. Öfv. 1881. 13-30.

Zu einer, die Γ-Function speciell enthaltenden gleichen und analogen Relationen unterworfenen allgemeineren Function gelangt der Verfasser auf folgende Weise. Die Function $f(x)$ sei endlich und stetig für $x > 0$, ferner verschwinden alle ihre Derivationen für $x = \infty$. Dann ist die in Rede stehende Function, als Verallgemeinerung von $\log \Gamma(x+1)$:

$$F(x+1) = xf(1) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \{f(k) - f(k+x) + x\,[f(k+1) - f(k)]\}.$$

Namentlich ergiebt sich:

$$F(x+1) - F(x) = f(x); \quad F(1) = 0;$$

$$F(x) + F(1-x) = -f(x) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \{-f(k-x) + 2f(k) - f(k+x)\}$$

nebst speciellen Folgerungen. Besonders eingehend wird der

st der Bernoulli'schen Reihenentwickelung untersucht. Schliess- wird speciell $f(x) = \log x$ gesetzt, wodurch $F(x)$ in $\log\Gamma(x)$ rgeht, und eine Reihe bekannter Relationen der Γ-Function Resultate zusammengestellt. Unter diesen finden sich jedoch ht der Ausdruck von $\Sigma \log\Gamma\left(x+\frac{k}{n}\right)$ und der Gauss'sche sdruck von $\Gamma'\left(\frac{k}{n}\right):\Gamma\left(\frac{k}{n}\right)$, denen entsprechend also kein alogon für $\Sigma F\left(x+\frac{k}{n}\right)$ und $F'\left(\frac{k}{n}\right)$ gefunden ist.

H.

W. L. Glaisher. On certain definite integrals involving the exponential-integral. Quart. J. XVIII. 370-377.

Das Exponentialintegral wird definirt für positive und nega- e x durch

$$\operatorname{Ei} x = \gamma + \frac{1}{4}\log(x^4) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k\,.\,k!}, \text{ wo } \gamma = -\Gamma'(1).$$

iese Function wird nach Multiplication mit Exponentialfunctionen tegrirt, und folgende Formeln werden gefunden:

$$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax^n)dx = -\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)a^{-\frac{1}{n}}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Si} bx\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{Ci} bx\,dx = -\frac{1}{2a}\log\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax)e^{-bx}dx = -\frac{1}{b}\log\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax)\sin bx\,dx = -\frac{1}{2b}\log\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax)\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$$

$$\int_0^\infty \operatorname{Ei}(-ax)\operatorname{Si} bx\,dx = -\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{1}{2b}\log\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\mathrm{Ci}\,bx\,dx = \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \frac{1}{2a}\log\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$$

$$\int_0^\infty \mathrm{Ei}(-ax)\,\mathrm{Ei}(-bx)dx = \log\left\{\frac{(a+b)^{a+b}}{a^a b^b}\right\}^{\frac{1}{ab}},$$

wo

$$\mathrm{Si}\,x = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\,du;\quad \mathrm{Ci}\,x = \int_\infty^x \frac{\cos u}{u}\,du.$$

H.

R. Lipschitz. Sur l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)x\,dx$ Darb. Bull. (2) V. 387-388. 1881.

Durch Einführung der imaginären Exponentialfunctionen i das Integral

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\cos x)^{a+b}\cos(a-b)\,x.dx$$

und Integration der beiden einzelnen Glieder ergiebt sich d von Cauchy gefundene Formel

$$J = \frac{\pi}{2}\frac{\Gamma(1+a+b)}{\Gamma(1+a)\,\Gamma(1+b)}.$$

M.

C. B. S. Cavallin. Ett sätt att härleda och generalise Legendre's formel $\int_0^{2\pi} p\,d\omega = L$. Zeuthen T. (4) VI. 1-2.

Beweis der genannten Formel zur Berechnung der Län einer geschlossenen convexen Curve, nebst der folgenden Erw terung. Bezeichnet ψ für einen Punkt P der Curve das Gewi der Längeneinheit, ϱ den Krümmungsradius des Punktes, u ω wie in der obigen Formel den Winkel, welchen die Se

ite vom Pole O auf die Tangente in P mit einer festen bildet, so wird das Gewicht der Curve durch die Formel $^{2\pi}$ $\varrho\psi d\omega$ ausgedrückt sein. Gm.

W. L. Glaisher. Formulae for the rth integral of a Legendrian coefficient and of the logarithm-integral. Mess. (2) XII 120-128.

I. Legendre'sche Coefficienten. Es wird eine Formel ge- en für

$$\left\{\int_1^x dx\right\}^r P_n$$

gedrückt durch $P_{n+r}, P_{n+r-2}, \dots P_{n-r}$. Für $r=3$ heisst die mel z. B.

$$\int_1^x\int_1^x\int_1^x P_n dx dx dx = \frac{P_{n+3}}{(m+4)(m+2)m} - \frac{3P_{n+1}}{(m+4)m(m-2)}$$
$$+\frac{3P_{n-1}}{(m+2)m(m-4)} - \frac{P_{n-3}}{m(m-2)(m-4)},$$

$m = 2n+1$.

II. Logarithmische Integrale. Die Formel, die Verallgemei- ung einer Bessel'schen Formel, lautet:

$$\left\{\int_0^x dx\right\}^r x^m \operatorname{li} x^n = \frac{x^{m+r}}{(m+1)(m+2)\dots(m+r)} \operatorname{li} x^n$$
$$-\frac{1}{m+1}\frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\operatorname{li} x^{m+n+1} + \frac{1}{m+2}\frac{x^{r-2}}{(r-2)!\,1!}\operatorname{li} x^{m+n+2}$$
$$\frac{1}{m+3}\frac{x^{r-3}}{(r-3)!\,2!}\operatorname{li} x^{m+n+3} + \dots + (-1)^r\frac{1}{m+r}\frac{1}{(r-1)!}\operatorname{li} x^{m+n+r}.$$

Formel wird auch in symbolischer Form aufgestellt.

Glr. (O.).

Buchheim and Evans. Solutions of a question (6257). Ed. Times XXXVI. 75.

iebt, u. s. w. Zuletzt wird daraus die Gauss'sche Methode zur genäherten Berechnung der bestimmten Integrale entwickelt.

Ty.

Mansion. Sur les cubatures approchées. Brux. S. sc. VI. B 228-232.

Man denke sich eine convexe Fläche, horizontal auf ein rallelogramm *abcd* mit dem Mittelpunkt *e* und der Fläche *B* ojicirt. Es mögen sein *f*, *g*, *i*, *h* die Mitten von *ab*, *bc*, *cd*, *da*; ner h_1, h_2, h_3, h_4, H, h_{12}, h_{23}, h_{34}, h_{41} die Höhen der Punkte *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *J* über der horizontalen Ebene, endlich

$$4h = h_1+h_2+h_3+h_4;\ 4\eta = h_{12}+h_{23}+h_{34}+h_{41};$$

das Volumen *abcdABCD*. Dann hat man:

$$V = \frac{1}{3}B(2h+H),\ \text{Fehler}\ \varepsilon < \frac{1}{3}B(H-h)$$

$$V = B\eta,\ V = \frac{1}{3}B(2\eta+H).$$

er Verfasser bestimmt auch den Fehler für die zweite und itte Formel. Die zweite Formel ist neu, die beiden anderen id schon von Wooley gegeben worden, aber ohne Bestimmung s Maximalfehlers.

Mn. (O.).

Mansion. Sur les quadratures et les cubatures approchées. C. R. XCV. 384-386.

Durch Figurbetrachtung wird gefunden: Das ebene Flächenück zwischen einer Curve, welche der Abscissenaxe die concave ite zugekehrt, dieser Axe und zwei Ordinaten ist ein Mittel vischen dem Sehnenpolygon für gleiche Sehnenprojectionen und mselben nach Substitution der zweiten und vorletzten Ordinate r die erste und letzte. Bei derselben Construction ist der hler der Simpson'schen Inhaltsformel kleiner als

$$\frac{1}{3}h(y_1+y_{n-1}-y_1-y_n),$$

wo $h(n-1)$ die Projection der Curve ist. Der Fehler der Wooley'schen Formel für den Projectionsraum einer krummen Fläche, concav gegen die Projectionsebene, ist kleiner als die halbe Differenz der ein- und umbeschriebenen Prismensumme mit schrägen Endflächen. H.

Ch. Frenzel. Die arithmetische Integration der Dämme und Einschnitte. Wien. Bloch u. Hasbach.

Es handelt sich um Berechnung des Volumens der zur Herstellung einer gleichmässig breiten horizontalen oder in gegebenem Verhältnis auf- oder absteigenden Bahn auf- oder abzutragenden Erde, wenn die Böschungen constante gegebene Neigungen haben. Hierzu kommen die Inhalte und statische Momente der verticalen Längsschnitte des Erdkörpers in Anwendung. H.

H. de Lisleferme. Note d'analyse géométrique d'après Rossin. Brux. S. sc. VI. B. VI. 242-246.

P. Mansion. Rapport sur cette note. Brux. S. sc. VI. A. 49-51.

Graphische Integration nach einer Methode, die der von Soli (F. d. M. IV. 1872. p. 129) analog ist. Mn. (O.).

B. Abdank-Abakanowicz. Sur l'intégration mécanique. C. R. XCIV. 783-785.

In den C. R. XCII. 402. ist ein Integrationsapparat beschrieben, worüber F. d. M. XIII. 1881. p. 227 berichtet worden ist. Im Gegenwärtigen werden Modificationen desselben besprochen. An die Stelle des Lineales, welches durch Friction einen axial geschobenen Cylinder drehte, kommt jetzt ein Rädchen, dessen Ebene gegen die Cylinderaxe eine Neigung $= y$ erhält, während die Drehung des Cylinders die Grösse $\int y dx$ angiebt. Anwendu

Vernon-Boys gemacht, indem er die Bewegungen durch zwei Solenoide reguliren lässt. H.

Abdank-Abakanowicz. Sur un nouvel intégromètre. C. R. XCIV. 1047-1049, (auch polnisch Ogniska).

Der vorgelegte, hier abgebildete und beschriebene Integrationsapparat ist wesentlich identisch mit dem vorgenannten. Es wird hervorgehoben, dass nirgends Gleitung stattfindet.

H.

Weitere Auswertungen bestimmter Integrale von D. Edwardes, U. J. Knisley, T. R. Terry, W. H. Blythe, B. Easton, Nash, Ch. Ladd finden sich Ed. Times XXXVII. 29, 49, 57-58, 100.

O.

Capitel 5.

Gewöhnliche Differentialgleichungen.

Nowotny. Ueber die Lösungen der Differentialgleichungen. Pr. Jasto. (Galizien). (Polnisch).

Dn.

E. West. Exposé des méthodes en mathématiques, d'après Wronski. Résal J. (3) VIII. 19-54, 125-166.

Das Vorliegende handelt von der Integration der Differentialgleichungen und Differenzengleichungen, insbesondere für eine unabhängige Variable. Der Verfasser reducirt eine beliebige algebraische Gleichung zwischen x, y und den Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung auf eine approximative, indem er für alle Factoren jedes Terms ausser einem Differentialquotienten

Mittelwerte setzt, die dann als constant betrachtet werden. Es wird vorher allgemein die Transformationsfunction der gegebenen Gleichung mit Einführung eines unbestimmten approximativen Wertes von y dargestellt, welche der Convergenz der successiven Approximation entspricht. H.

S. Lie. Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. Lie Arch. VII 443-444.

Im Jahre 1874 lenkte der Verfasser die Aufmerksamkeit auf die allgemeine Theorie aller Differentialgleichungen

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

die eine bekannte oder unbekannte continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten. Teile der Theorie wurden successive in verschiedenen Abhandlungen, die jedoch noch allgemeinere Probleme behandelten, entwickelt. Die vorliegende Note giebt ein schematisches Resumé aller Fälle, die eintreten können, und giebt für jeden Fall die erforderlichen Hülfsgleichungen an, die häufig linear sind. Es möge hier ausdrücklich hervorgehoben sein, dass hiermit die grösstmögliche Reduction der betreffenden Probleme erreicht ist. L.

L. Königsberger. Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig. Teubner.

Der Verfasser hat in den letzten Jahren in einer Reihe von Abhandlungen einige Sätze und Methoden zur Theorie der allgemeinen Differentialgleichungen veröffentlicht. Im vorliegenden Werke wird eine zusammenhängende Theorie der hierauf bezüglichen Untersuchungen entwickelt, wobei die einzelnen dort enthaltenen Sätze eine beträchtliche Erweiterung und Verallgemeinerung erfahren. In dieser Gestalt wird ersichtlich, welche weit ausgedehnten Gebiete durch die neuen Prinzipien der Forschung erschlossen sind, und wie befruchtend die daraus fliessenden Methoden zurückwirken auf die Behandlung und Lösung der im

iete der Abel'schen Integrale auftretenden Probleme, die in neuen verallgemeinerten Fassung an Tiefe und Durchsichit zugleich gewinnen.

Zur Einleitung dient die Feststellung des Begriffs der Irreibilität einer beliebigen algebraischen Differentialgleichung. betreffende Definition, sowie die Irreductibilitätsuntersuchung linearen Differentialgleichungen (siehe das folgende Referat) en den Inhalt des ersten Capitels. Die letztere Untersuchung für die einfachsten linearen nicht homogenen Differentialhungen 2ter Ordnung mit der Auffindung der Bedingungen mmen, unter denen das Integral einer durch ein Abel'sches gral definirten Transcendenten durch eben diese Transcene algebraisch ausdrückbar ist. Das 2te Capitel enthält die stellung und Begründung des vom Verfasser bereits im Jahre ; (Borchardt J. LXXXIV. p. 284, vgl. F. d. M. X. 1878. 243) ffentlichten und in späteren Arbeiten erweiterten Fundamentzes, der die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen gralen von Differentialgleichungen und deren Ableitungen be- ; und die Basis bildet für die Ausdehnung des Abel'schen orems, sowie der Abel'schen Untersuchungen über die Reion von Integralen algebraischer Functionen auf Integrale rer Differentialgleichungen. Es trifft hierbei der eigentüm- : Umstand ein, dass der gedachte Satz selbst zugleich das el bietet, die Form jener unveränderlichen Relation zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und ihren itungen festzustellen. Auf die einfachste Form des Systems

$$\frac{dz}{dx} = y_k \qquad (k = 1, \dots \lambda)$$

ewandt, ergiebt der Satz das Resultat, dass die einzig mög- : Form einer algebraischen Beziehung zwischen Abel'schen gralen die lineare mit constanten Coefficienten ist, während von den Integralen freie Teil eine algebraische Function x dargestellt; hierbei gelten die Logarithmen algebraischer ctionen als Abel'sche Integrale. Besonders bemerkenswert für Zusammenhang der Abel'schen Integrale mit anderen Transdenten ist die weitere Feststellung, dass in eine algebraische

Beziehung zwischen Abel'schen Integralen solche analytisch
Functionen, die ein Additionstheorem besitzen, also z. B. E
ponentialfunctionen, nicht eintreten können. Im Verlaufe
Untersuchung tritt die wichtige Frage auf, für welche Classe
Differentialgleichungen das allgemeine Integral eine algebrais
Function particulärer Integrale und willkürlicher Constanten
eine Frage, welche identisch ist mit der nach der Zahl der sel
ständigen Transcendenten, die durch eine gegebene Differen
gleichung definirt werden. Die Behandlung dieses Probl
kehrt im Folgenden häufig wieder; an dieser Stelle wird
Gestalt der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordn
ermittelt, für welche das allgemeine Integral eine algebrai
Function eines particulären Integrals und einer willkürli
Constanten ist, und gefunden, dass solche Transcendenten ü
haupt (die ein Additionstheorem besitzenden analytischen F
tionen bilden davon einen besonderen Fall) nicht mit Abel's
Integralen in algebraischer Beziehung stehen können. Das d
Capitel bringt die Erweiterung des Abel'schen Theorems auf
tegrale von Differentialgleichungen. Die Aufgabe besteht d
nicht blos eine additive, sondern irgend eine algebraische
ziehung zwischen den Werten eines und desselben particul
Integrals einer beliebigen Differentialgleichung für algebra
von einander abhängige Werte der unabhängigen Variabeln
zustellen. Die Zahl p der angenommenen Relationen zwisc
den unabhängigen Variabeln bezeichnet das Geschlecht, dem
Abel'sche Theorem angehört. Hier liefert der Beweis der Exis
eines erweiterten Abel'schen Theorems zugleich die Form
selben. Diese wird für die Integrale linearer homogener D
rentialgleichungen beliebiger Ordnung angegeben. Hierbei b
sich der Anlass, weitere Sätze über den erwähnten Zusammenh
des allgemeinen Integrals einer Differentialgleichung mit
particulären aufzustellen. So wird z. B. gezeigt, dass irreduc
Differentialgleichungen, denen ein dem Geschlechte 1 zugehö
Abel'sches Theorem zukommt, von der ersten Ordnung un
beschaffen sein müssen, dass das allgemeine Integral algebr
von einem particulären, einer Constanten und der unabhäng

ariablen abhängt, und es werden sodann derartige Differential-eichungen aufgestellt, für welche die genannte Beziehung das articuläre Integral in rationaler (ganzer oder gebrochener) Form it in x algebraischen Coefficienten enthält. In ähnlicher Weise ommt das Abel'sche Theorem vom Geschlecht 2 ausschliesslich en irreductiblen Differentialgleichungen zweiter oder erster Ordung zu, für welche das allgemeine Integral eine algebraische unction zweier particulärer Integrale und zweier oder einer illkürlichen Constanten ist, und die notwendige Form der Diffeentialgleichungen erster Ordnung von dieser Beschaffenheit wird estgestellt. Ein grosser Teil der hier berührten Sätze findet sich ereits in den Abhandlungen des Verfassers über den Zusammenang zwischen den allgemeinen und particulären Integralen von ifferentialgleichungen (Gött. Nach. 1880. p. 625ff. u. Borchardt J. CI. p. 265ff. vgl. F. d. M. XII. 1880. 238. XIII. 1881. 233). Das ierte und letzte Capitel handelt von der Form der durch Quadratuen darstellbaren Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Dem Umfange nach fast die Hälfte des Buches einnehmend, bietet es eine Fülle des Neuen und Interessanten sowohl in den mannigfaltigen Ergebnissen, die zum Teil auf eine merkwürdige Verknüpfung analytischer und zahlentheoretischer Verhältnisse hinweisen, als in den dazu führenden eigentümlichen Methoden. Die Untersuchungen dieses Abschnittes knüpfen an diejenigen Abel's über die Reduction von Integralen algebraischer Functionen an, und dehnen dieselben auf Integrale linearer Differentialgleichungen aus. So wird der bekannte Satz, dass, wenn

$$z = \int y dx,$$

wo y eine algebraische Function von x bedeutet, selbst algebraisch ist, z stets rational durch x und y ausdrückbar ist, in folgender Gestalt erweitert: Wenn eine lineare nicht homogene Differentialgleichung mit Coefficienten, die algebraische Functionen der unabhängigen Variabeln x sind, ein algebraisches Integral hat, so hat sie auch ein in den Coefficienten rationales Integral. Dieser und ein ähnlicher Satz bezüglich derjenigen Differentialgleichungen, die algebraisch-logarithmische Integrale besitzen,

dienen zur Vorbereitung für den Beweis des folgenden dur seine Allgemeinheit merkwürdigen Theorems: Wenn eine linea Differentialgleichung der vorgedachten Beschaffenheit ein Integr von der Form

$$z = u + A_1 \log v_1 + \cdots + A_k \log v_k + \int^{\xi_1} y_1\, ds + \cdots + \int^{\xi_\lambda} y_\lambda\, ds$$

besitzt, in welchem $u, v_1, \ldots, v_k, \xi_1, \ldots, \xi_\lambda$ algebraische Function der unabhängigen Variablen, $y_1, \ldots, y_\lambda$ eben solche von s bezü lich von den Geschlechtern $p_1, \ldots, p_\lambda$ und $A_1, \ldots, A_k$ Constant bedeuten, so genügt dieser Differentialgleichung stets auch Integral von der Form

$$z = U + B_1 \log V_1 + \cdots + B_\mu \log V_\mu + \frac{1}{\delta} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p_1} \int^{\eta_1^{(\varrho)}} y_1\, ds$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\delta} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p_\lambda} \int^{\eta_\lambda^{(\varrho)}} y_\lambda\, ds,$$

worin $U, V_1, \ldots, V_\mu$ rationale Functionen der Coefficienten d Differentialgleichung, δ eine ganze Zahl und $\eta_\alpha^{(\varrho)}$ die Lösung einer Gleichung p_α^{ten} Grades bedeuten, deren Coefficienten rati nale Functionen derer der Differentialgleichung sind; zuglei sind die Werte der y für $s = \eta^{(\varrho)}$ rational durch $\eta^{(\varrho)}$ und Coefficienten der Differentialgleichung ausdrückbar. Eine höc wichtige Eigenschaft der Integrale

$$\int^{\eta_\alpha^{(\varrho)}} y_\alpha\, ds$$

ist ferner, dass die Summe eines jeden Systems von p_α Irrationalität y_α zugehöriger Integrale erster Gattung gleich ein Integrale erster Gattung von der Form

$$\int^x Y dx$$

wird, worin Y eine rationale Function von x und den Coefficien der Differentialgleichungen ist. Wie folgenreich der Satz ist, z eine reiche Fülle von Anwendungen, die wir auch nur and tungsweise wiederzugeben uns versagen müssen. Sie betreffen Frage der rationalen Reduction, d. h. einer solchen, worin Coefficienten der Gleichung für die Grenzen nur rational au zusammengesetzt sind. Für den einfachsten Fall einer linea

·entialgleichung $\frac{dz}{dx} = y$ ergiebt sich hieraus die Zurück-
ng der algebraischen Reduction der Abel'schen Integrale auf
ıre Integralgattungen (wo eine solche vorhanden ist, auf die
nale Reduction) wobei bemerkenswert ist, dass Abel, der
Zurückführung für die Reduction elliptischer und hyper-
ischer Integrale auf elliptische Integrale bewirkt hatte, schon
Ausdehnung dieses Verfahrens für den nächsten Fall der
ıction eines Abel'schen Integrals auf elliptische mit Schwierig-
ın verknüpft fand, die er nicht meinte überwinden zu können.
wird das Reductionsproblem sogar für Integrale linearer
ırentialgleichungen auf das rationale zurückgeführt. Mit
iellerem Eingehen wird die Frage der Reduction hyperellip-
er Integrale auf elliptische und hyperelliptische niederer Ord-
; beantwortet und an Beispielen erläutert. Zur vollständigen
digung des Problems gehört ausser dem erwähnten Satze
eine Untersuchung der Irrationalitäten solcher Abel'scher
grale, die linearen Differentialgleichungen genügen. Diesem
enstand ist der letzte Abschnitt dieses inhaltreichen Capitels
dmet, der besonders lehrreich ist wegen des merkwürdigen
.mmenhangs dieser Frage mit der Theorie der complexen
iplication einerseits und der Kreisteilungslehre andererseits.
die darin vorkommenden Entwickelungen zu charakterisiren,
n wir folgenden Satz heraus: „Die Differentialgleichung habe
Gestalt

$$\frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_{m-1} \frac{dz}{dx} = y,$$

y gehe bei einem geschlossenen Umlaufe von x, für welchen
ılgebraischen Coefficienten Y unverändert bleiben, in εy über,
: wegen der Irreductiblität der algebraischen Function y eine
eitswurzel sein muss. Unter der Voraussetzung, dass die
eirte Gleichung überhaupt kein Abel'sches Integral hat, kann
omplete Differentialgleichung nur dann durch ein elliptisches
;ral erster Gattung befriedigt werden, wenn der Integralmodul
elliptischen Integrals ein Modul der complexen Multiplication
vofern ε nicht $= -1$ ist." Mit Hülfe dieses Satzes kann man

u. A. die einzigen Formen der elliptischen Integrale angeben, auf welche ein Abel'sches Integral

$$\int y dx,$$

worin y eine algebraische Function der bezeichneten Art bedeutet, reducirbar ist. Die transformirten Variablen sind rationale Func- tionen von y. Auch in dem allgemeineren Fall, dass zwischen mehreren Werten der Function y auf der rechten Seite der com- plexen Differentialgleichung eine lineare Relation stattfindet, wer- den die Bedingungen für die Existenz eines elliptischen Integrals festgestellt. Hierbei kommen Sätze von Zerlegung der Kreis- teilungsgleichung zur Anwendung. Hr.

L. Königsberger. Ueber die Irreductibilität von Diffe- rentialgleichungen. Kronecker J. XCII. 291-301.

In der Arbeit „Allgemeine Bemerkungen zum Abel'sche Theorem" (Borch. J. X. C. 109ff. vgl. F. d. M. XII. 1880. p. 320) hat der Verfasser eine Definition der Irreductibilität einer belie bigen algebraischen Differentialgleichung gegeben, die im Vor liegenden vereinfacht wird. Eine algebraische Differentialgleichun heisst hiernach irreductibel, wenn sie in Bezug auf den höchste Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist un kein algebraisches Integral irgend einer Ordnung besitzt. De entsprechend lassen sich auch die in späteren Arbeiten vom Ve fasser bewiesenen Sätze, die die Unveränderlichkeit von alg braischen Relationen zwischen Integralen verschiedener Differe tialgleichungen betreffen, in einer neuen Fassung angeben, b ziehentlich erweitern. Als Anwendung dieser Bemerkungen wi der Beweis des folgenden Satzes angefügt: „Wenn eine reductib lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung ein alg braisches Integral ϱ^{ter} Ordnung besitzt, und zwischen den m pa ticulären Integralen und deren $\varrho-1$ ersten Ableitungen kei algebraische Beziehung besteht, dann ist jenes algebraisc Integral eine lineare Differentialgleichung ϱ^{ter} Ordnung."

Hr.

Königsberger. Eigenschaften der algebraisch-loga-thmischen Integrale linearer nicht homogener Diffe-entialgleichungen. Gött. N. 1882. 686-689.

Der Verfasser ergänzt die am Schlusse seiner „allgemeinen ersuchungen“ (siehe das vorhergehende Referat) gegebenen e durch eine Reihe von Sätzen, von denen in dieser Note ge ohne Beweis veröffentlicht werden.

1. Ist die rechte Seite y einer linearen nicht homogenen Diffe-ialgleichung mit algebraischen Coefficienten eine solche alge-sche Function der unabhängigen Variablen x, dass y für eine kreisung von x, für welche die Coefficienten auf der linken e unverändert bleiben, in

$$\varepsilon y = e^{\frac{2\pi i}{\mu}} y$$

rgeht, so ist das algebraische Integral einer solchen Diffe-ialgleichung, wenn es existirt, abgesehen von etwaigen addi-n algebraischen Integralen der reducirten Differentialgleichung tiplicirt mit Constanten, stets von der Form

$$y[\psi_1 + y^\mu \psi_{\mu+1} + \cdots + y^{(k-1)\mu}\, \psi_{(k-1)\mu+1}],$$

die ψ rationale Functionen von x und den Coefficienten der en Seite bedeuten, oder es geht bei einer Umkreisung von x lfalls in das ε-fache über. Unter derselben Voraussetzung für die te Seite der Differentialgleichung kann dieselbe, wenn die icirte Gleichung keine logarithmischen Integrale besitzt, nur n durch ein Integral $A \log v$, wo A eine Constante, v eine braische Function von x bedeutet, befriedigt werden, wenn 1 oder $= 2$ ist. Aehnliche Sätze gelten für die Existenz r Summe von mehreren Logarithmen.

2. Hat die rechte Seite y die Eigenschaft, dass für einen chen Cyclus (ϱ eine Primzahl) drei Zweige in einem homo-en linearen Zusammenhang stehen, so kann unter der näm-en Voraussetzung für die reducirte Gleichung wie oben die ständige Differentialgleichung kein logarithmisches Integral, tiplicirt mit einer Constanten, besitzen. Stehen vier Zweige in m linearen homogenen Zusammenhang, so kann dieselbe einen arithmus zum Integral haben, wenn $\varrho = 7$, und die Entwicke-

lung von y

$$y = \psi_1(x)(x-\alpha)^{\frac{1}{7}} + \psi_2(x)(x-\alpha)^{\frac{2}{7}} + \psi_4(x)(x-\alpha)^{\frac{4}{7}}$$

oder

$$y = \psi_3(x)(x-\alpha)^{\frac{3}{7}} + \psi_5(x)(x-\alpha)^{\frac{5}{7}} + \psi_6(x)(x-\alpha)^{\frac{6}{7}},$$

ist, wo die ψ nach ganzen Potenzen von $x-\alpha$ fortschreiten, und die Zähler der Exponenten entweder die quadratischen Reste oder Nichtreste von 7 sind.

Aehnliche Sätze gelten unter der Annahme von Integralen von der Form

$$u \log v + u_1 \log v_1 + \cdots,$$

worin die u und v algebraische Functionen bedeuten.

Hr.

L. Fuchs. Ueber lineare homogene Differentialgleichungen, zwischen deren Integralen homogene Relationen höheren als ersten Grades bestehen. Berl. Ber. 1882. 703-710.

Es werden in dieser Note die hauptsächlichen Resultate einer demnächst erscheinenden ausführlicheren Arbeit angegeben, welche die Ergründung der Natur der Integrale von Differentialgleichungen der im Titel charakterisirten Beschaffenheit zum Gegenstand hat, und es wird das Problem für den Fall der Differentialgleichungen dritter Ordnung erledigt. Es sei

$$(1) \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

eine Differentialgleichung 3ter Ordnung mit in z rationalen Coefficienten, deren Integrale in der Umgebung aller singulären Punkte regulär sind, wobei die Wurzeln sämmtlicher determinirender Gleichungen rationale Zahlen sind. Es bestehe ferner zwischen drei Fundamentalintegralen eine irreductible Gleichung n^{ten} Grades

$$(2) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

wo f eine ganze homogene Function mit constanten Coefficienten ist; dann gelten folgende Sätze:

,Ist $n = 2$, dann ist jedes Integral ein Quadrat eines Inte- einer Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rationalen Coeffi- :n. Ist $n > 2$, dann sind die Integrale algebraische Func- ı von z.“ Hierbei ergeben sich drei Fälle.

l) Die Klasse p der Gleichung (2) ist grösser als 1; dann e Anzahl der reducirten Wurzeln derjenigen algebraischen hung, der das allgemeine Integral von (1) genügt, $\leqq 4$.

!) $p = 1$, dann ist diese Anzahl 2, 3, 4 oder 6.

3) $p = 0$, dann ist das allgemeine Integral von (1), abge- ı von der Wurzel einer rationalen Function als Factor, ı eine ganze homogene Function n^{ten} Grades des Fundamen- stems von Integralen einer algebraisch integrirbaren linearen genen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit rationalen Coeffi- :n in z ausdrückbar.

Da es an sich einleuchtend ist, dass jede algebraisch inte- are Gleichung (1) die Eigenschaft hat, dass zwischen drei lamentalintegralen eine Gleichung (2) besteht, so sind im tehenden alle Fälle erschöpft, in welchen eine lineare homö- Differentialgleichung 3ter Ordnung mit rationalen Coefficien- ıur algebraische Integrale besitzt. Hr.

SAUVAGE. Sur les propriétés des fonctions définies ır un système d'équations différentielles linéaires et ›mogènes à une ou plusieurs variables indépendantes. ıD. de l'Éc. Norm. (2) XI. 33-78.

Die Abhandlung des Herrn Fuchs über die linearen und ›genen Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung (1866) .lt die fundamentalen Principien der Theorie dieser Glei- ;en. Der Zweck der vorliegenden Abhandlung ist, diese rie auf Systeme von Differentialgleichungen mit einer oder eren unabhängigen Variabeln auszudehnen. Die beiden ı Capitel enthalten die Haupteigenschaften der Lösungen Systems totaler Differentialgleichungen von der Form:

$$= (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n)dx_1 + \cdots + (l_{i1}y_1 + l_{i2} + \cdots + l_{in}y_n)\,dx_p,$$

e Factoren von z die zu bestimmenden Coefficienten sind, sonach rational durch z, die Coefficienten der Differenung und die Ableitungen aller dieser Functionen auslassen. An diesen Satz knüpft der Verfasser einige ngen. Da die Grössen $z, z' \dots$ in den Ausdrücken für ficienten nur in den Verbindungen $\frac{z'}{z}, \frac{z''}{z}, \dots$ vorkomd da $\frac{z^{(k)}}{z}$ sich rational durch $\frac{z'}{z}$ und dessen Ableiusdrücken lässt, so gilt dasselbe auch für die Coefficienin Rede stehenden algebraischen Gleichung. Ferner n, wie aus dem Vorhergehenden leicht erhellt, die Coeffiiner linearen homogenen Differentialgleichung μ^{ter} Ordren μ Lösungen zu ihren logarithmischen Ableitungen μ Ausdrücke von der Form

$$\varphi_1\left(x, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}\right), \dots, \varphi_\mu\left(x, \frac{y'_1}{y_1}, \dots, \frac{y'_m}{y_m}\right)$$

llen, falls

$$y_1, y_2, \dots, y_m = z$$

ist, in x und den Wurzeln der algebraischen Gleichung n, deren Coefficienten rationale Functionen von $\frac{z'}{z}$, den en der gegebenen Differentialgleichungen und den Ableiieser Grössen sind. Hr.

GENS. Das Integral $\int_a^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ und die linearen erentialgleichungen. Klein Ann. XIX. 435-461.

r vorliegenden Untersuchung dient folgender Satz zum gspunkt: „Wenn y der Differentialgleichung mit rationalen enten

$$\varphi(z)y + \varphi_1(z)\frac{dy}{dz} + \dots + \varphi_n(z)\frac{d^n y}{dz^n} = 0$$

und man setzt in dem Ausdruck

$$D(\eta) = \varphi(x)\eta + \varphi_1(x)\frac{d\eta}{dx} + \cdots + \varphi_n(x)\frac{d^n\eta}{dx^n}$$

für η das Integral

$$\sigma = \int_\alpha^\beta \frac{y dz}{x-z}$$

ein, so ist das Substitutionsresultat eine rationale Function von x. Hierfür werden zwei Beweise geliefert, einmal mit Hülfe von Reihenentwickelungen, dann durch Zusammenstellung von $D(\eta)$ mit seinem adjungirten Differentialausdruck. (§§ 1, 2). Die nächste Aufgabe ist, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen der mit $G(x)$ bezeichnete ganze Teil der rationalen Function wegfällt. Die allgemeinste Differentialgleichung, bei der $G(x)$, unabhängig von der Wahl des particulären Integrals y und der Integrationsgrenzen α und β, verschwindet, enthält, wie die Discussion ergiebt, $n(n+1)$ willkürliche Constanten. Gehört die zu Grunde liegende Differentialgleichung nicht in diese Classe, so hat man, um $G(x)$ zum Verschwinden zu bringen, entweder das particuläre Integral geeignet zu wählen oder statt der einen Grösse σ ein lineares homogenes Aggregat solcher Grössen einzuführen. (§ 3). Was den mit $P(x)$ bezeichneten gebrochenen Teil betrifft, der die Form $[P(x, z)]_\beta^\alpha$ hat, so sind hier lediglich die Grenzen $z = \alpha$ und $z = \beta$ in Betracht zu ziehen. Ist α ein nicht singulärer Punkt der Differentialgleichung, also $\varphi_n(\alpha)$ von Null verschieden, so reducirt sich $P(x, z)$ für dasjenige partikuläre Integral y, welches nebst seinen $n-2$ ersten Ableitungen für $z = \alpha$ Null wird, an der Grenze $z = \alpha$ auf das eine Glied $\frac{A}{x-\alpha}$, wo

$$A = \left[\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}\varphi_n(z)\right]_{z=\alpha}$$

ist. In dem Falle, dass α ein singulärer Punkt ist, werden unter der Annahme, dass die Differentialgleichung zu der von Herrn Fuchs (Borchardt Journal Bd. 66) charakterisirten Classe gehört, durch Betrachtung der Wurzeln der zugehörigen determinirenden Gleichung die Bedingungen festgestellt, unter denen $P(x, z)$, sei es für alle oder einige, particuläre Integrale an der Grenze $z = \alpha$

rschwindet. Unter den Ergebnissen dieser Discussion heben ir hier das eine hervor, dass, falls $\varphi_n(\alpha)$ von der n^{ten} Ordnung ull wird, $P(x, z)$ für $z = \alpha$ bei beliebiger Wahl von y verschwindet, wenn der reelle Teil jeder Wurzel der determinirenden leichung grösser als -1 ist. Schliesslich wird noch der Fall $= \infty$ betrachtet. (§§ 4, 5). Giebt es zwei singuläre Stellen z, ir welche $P(x, z)$ bei einem particulären Integral y verschwindet, nd wählt man dieselben zu Grenzen, so fällt P für dieses Integral weg. Fehlt nun auch G für dasselbe Integral, dann besitzt ie Differentialgleichung $D(y) = 0$ ausser y noch ein zweites Integral in $\sigma = \int_\alpha^\beta \frac{y dz}{x-z}$. Dies trifft bei der Differentialgleichung ür die Kugelfunctionen ein, welche die beiden Integrale

$$P_n(x) \text{ und } Q_n(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(z)dz}{x-z}$$

at. Die entwickelten Sätze liefern ferner ein bequemes Mittel, ie vollständige Differentialgleichung $D(y) = \text{Rat. } F(x)$ zu inteiren, insbesondere, wenn für die reducirte Gleichung $G(x)$ fehlt, d mindestens eine singuläre Stelle z_1 vorhanden ist, für welche $x, z)$ bei beliebiger Wahl von y verschwindet. Wählt man z. B. sjenige Integral $y = f(x)$ von $D(y) = 0$, welches für $x = a$ bst seinen $n-2$ ersten Ableitungen verschwindet, während die $-1)^{\text{te}}$ den Wert $\frac{1}{\varphi_n(a)}$ annimmt, so hat die Gleichung

$$D(y) = \frac{1}{x-a},$$

e aus dem Obigen folgt, das Integral $\sigma = \int_a^{z_1} \frac{f(z)dz}{x-z}$. Den schluss bildet die Ausführung der Rechnung an einem Beiel (§§ 6. 7). Hr.

Boussinesq. Sur les intégrales asymptotes des équations différentielles. C. R. XCIV. 208-210.

Ist $\varphi(x, y) = c$ das allgemeine Integral der Gleichung

$y' = f(x, y)$, so werden die Integrale, die der Verfasser „as ptotes“ nennt, definirt durch die Gleichung $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \infty$. Eb müssen im Falle eines Systems simultaner Differentialgleichun falls $\varphi(y_1, y_2, \dots, x) = c$ ein Integral desselben ist, für die as ptotischen Integrale die Bedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = \dots = \infty$$

erfüllt sein. Hr.

F. HOČEVAR. Zur Integration der Jacobi'schen D rentialgleichung $Ldx + Mdy + N(xdy - ydx) = 0$. Wien. Ber. LXXXV. 848-864.

Die Gleichung

$$\frac{dx}{a_1x+b_1y+c_1-x(a_3x+b_3y+c_3)} = \frac{dy}{a_2x+b_2y+c_2-y(a_3x+b_3y}$$

wird in der Form integrirt:

$$\xi_1^{\lambda_2-\lambda_3}\,\xi_2^{\lambda_3-\lambda_1}\,\xi_3^{\lambda_1-\lambda_2} = \text{const.},$$

wo zur Abkürzung

$$\xi_1 = \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1,$$
$$\xi_2 = \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2,$$
$$\xi_3 = \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3$$

gesetzt ist, und die drei Systeme der α, β, γ, λ durc Gleichungen

$$a_1\alpha+a_2\beta+a_3\gamma = \lambda\alpha,$$
$$b_1\alpha+b_2\beta+b_3\gamma = \lambda\beta,$$
$$c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma = \lambda\gamma$$

bestimmt werden. Es werden dann die Fälle betrachtet, w Wurzeln λ conjungirt complex, und wo sie einander gleic Das Integral ist algebraisch, wenn zwei Wurzeln conjungir die reellen Teile aller einander gleich sind. Sind alle einander gleich, so ergiebt sich als Integral:

$$\frac{\xi'_1}{\xi} - \frac{\xi'^2}{\xi^2} = \text{const.},$$

wo $\xi' = \frac{d\xi}{d\lambda}$. Es folgt der Nachweis, dass die in den

teten Integralen auftretenden Constanten stets in endlicher orm berechenbar sind, mit Anwendung des Satzes, dass, wenn ne Determinante Null ist, die Adjuncten zweier beliebiger eilen einander proportionirt sind, woraus als neuer Satz hergeitet wird: „Die Determinante, welche aus einer Determinante ervorgeht, indem man die Elemente der i^{ten} Colonne durch die djunction der k^{ten} Zeile ersetzt, ist mit jener gleichzeitig Null.“

H.

. W. L. GLAISHER. Examples illustrative of Cayley's theory of singular solutions. Mess. (2) XII. 1-14.

Im Messenger (2) II. 6—12 (siehe F. d. M. IV. 1872. p. 148.) at Cayley die Theorie der singulären Lösungen der Differentialleichung $\varphi(x, y, p) = 0$ betrachtet, wo φ eine rationale ganze unction n^{ten} Grades von p und einwertig in Bezug auf x und y t. Im Messenger (2) VI. 23—27 (s. F. d. M. VIII. 1876. p. 185) hat r dann den speciellen Fall $n = 2$ betrachtet. Herr Glaisher ecapitulirt die allgemeine Theorie, aus der folgt, dass, wenn $p^2+2Mp+N = 0$ die Differentialgleichung ist, und die Inteгalgleichung $Pc^2+2Qc+R = 0$ ein System von algebraischen urven darstellt, die singuläre Lösung $LN-M^2 = 0$ die Cusp. nd den Tac.-locus giebt und die singuläre Lösung $PR-Q^2 = 0$ en Cusp.- und den Node-locus giebt. Diese Theorie wird an l Beispielen erläutert.

Glr. (O.).

. P. WORKMAN. On tac-loci. Mess. (2) XII. 21-25.

Dieser Aufsatz bezieht sich auf die vorstehende Arbeit. Der erfasser giebt eine Relation zwischen dem Tac-locus und der ntegralgleichung, mit deren Hülfe gewisse von Cayley ohne eweis mitgeteilte Resultate bewiesen werden. Es wird auch ewiesen, dass wenn r der Grad der Gleichung in c ist, der ac-locus $r(r-1)$ Mal vorkommt.

Glr. (O.).

H. M. Perry. Note on singular solutions. J. Hopkins C
1882. 212.

Eine Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Gra
für die $u = 0$ eine singuläre Lösung ist, kann immer geschrie
werden: $y' = \varphi_1 + y'_u$, wo y'_u der Wert von y' ist, den man
$u = 0$ durch Differentiation erhält, und φ_1 eine Function vo
und u ist, welche mit $u = 0$ verschwindet. Die Differential
chung der 2ten Ordnung wird dann für $u = 0$:

$$y'' = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \varphi_1 + y''_u = \varphi_2 + y''_u$$

und, wenn φ_2 mit u verschwindet, die der 3ten Ordnung

$$y''' \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \varphi_1 + y'''_u = \varphi_3 + y'''_u,$$

u. s. f. Hieraus zieht man folgende Ergebnisse: Wenn i
Entwickelung von φ_1 nach steigenden Potenzen von u de
ponent der niedrigsten Potenz n ist, dann ist $u = 0$ eine s
läre Lösung für alle Differentialgleichungen, deren Ordnung k
als $\frac{1}{1-n}$ ist. Liegt $\frac{1}{1-n}$ zwischen zwei ganzen Zahlen
$r+1$, dann genügt $u = 0$ der r^{ten} Differentialgleichung und mac
$(r+1)^{\text{te}}$ und alle höheren Derivirten unendlich. Wenn
negativ ist, genügt $u = 0$ allen Differentialgleichungen
endlich $0 < n < \frac{1}{2}$, dann ist $u = 0$ die Gleichung einer
welche die Curven des vollständigen Integrals in deren S
berührt. H

W. Heymann. Ueber eine Transformation der Differe
gleichung

$$\varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0.$$

Schlömilch Z. XXVII. 374-380.

Durch die Substitution

$$y = \frac{\varphi_0}{\varphi_1} \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

t vorstehende Gleichung in die lineare Differentialgleichung Ordnung

$$\varphi_0^2 f_0 \frac{d^2 v}{dx^2} + \varphi_0 f_1 \frac{dv}{dx} + f_2 v = 0$$

r, worin die f ganze Functionen in x sind, falls die φ als he vorausgesetzt werden. Zweck der Note ist der Nachweis, ı die letzte Gleichung durch die Substitution

$$v = we^{\int \frac{G dx}{\varphi_0}}$$

n G eine passend zu bestimmende Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ›utet, falls φ_0 vom n^{ten} Grade ist, stets in eine solche Diffe- algleichung übergeführt werden kann, deren linke Seite den or $\varphi_0(x)$ ausscheiden lässt, wodurch der Grad der Coeffi- :en um den Grad von φ_0 erniedrigt wird. Diese Trans- ıation wird auf die Gleichung

$$\text{ı}+bx+cx^2)\frac{dy}{dx} + Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F = 0$$

›wandt, welche durch die ersterwähnte Substitution in die :hung 2ter Ordnung

$$(a+bx+cx^2)^2 \frac{d^2v}{dx^2} + (a+bx+cx^2)\ (a_1+b_1x)\frac{dv}{dx}$$
$$+(a_0+b_0+c_0x^2)v = 0$$

geht, und es wird gezeigt, dass ihre Integration, wie übrigens ·rweitig bekannt, von der Differentialgleichung der hyper- uetrischen Reihe abhängig ist. Hr.

HEYMANN. Zur Integration der Differentialgleichungen. chlömilch Z. XXVII. 1-41.

In einer früheren Arbeit (Schlömilch Z. XXIV. 252 ff.; siehe . M. XI. 1879. p. 225 f.) hatte der Verfasser zur Integration s·er Differentialgleichungen erster Ordnung $f(x, y, y') = 0$ die ;titution $x = \frac{dv}{du}$, $y = u\frac{dv}{du} - v$ mit Vorteil verwendet. Differentialgleichungen zweiter Ordnung ergiebt dasselbe

Prinzip: Führt man in einer solchen $F\left(u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2v}{du^2}\right) =$ deren Integral $F_1(u, v, c_1, c_2) = 0$ man ermitteln kann, die obi Substitution aus, so erhält man das Integral der so entstehend neuen Differentialgleichung zweiter Ordnung, wenn man u und aus den Gleichungen

$$F_1 = 0, \; \frac{\partial F_1}{\partial u} + x\frac{\partial F_1}{\partial v} = 0, \; v - ux + y = 0$$

eliminirt. Dies Verfahren wird auf die linearen homoge Differentialgleichungen und speciell auf die Liouville'sche (Jour de l'éc. polyt. t. 13)

$$(a_2 + b_2 u + c_2 u^2)\frac{d^2v}{du^2} + (a_1 + b_1 u)\frac{dv}{du} + a_0 v = 0$$

angewendet. Da die behandelte Transformation im Grunde einer Vertauschung von Punkt- mit Liniencoordinaten ident ist, so wird im zweiten Abschnitt der Arbeit ganz allgemein eine solche Vertauschung in homogenen Coordinaten eingegan Die in den x einerseits und in den u andererseits homo Gleichung $f(x_1, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$ liefert zwei verschie Differentialgleichungen, je nachdem man die x durch die D minante (u, du) oder die u durch die (x, dx) ersetzt; ist dieser Gleichungen integrirt, so ist dann auch das Integral anderen auf algebraischem Wege zu ermitteln (cf. Clebsch metrie; Art. Connexe). Dies wird durch einige specielle illustrirt, bei welcher Gelegenheit die Zweckmässigkeit der führung von gewissen überflüssigen willkürlichen Constanten tont wird.

Der dritte, umfangreichste Abschnitt liefert Beiträge zur gration der Differentialgleichung $Mdy + Ndx = 0$, wo M un ganze Functionen zweiten Grades von x, y sind. Zunächst der Fall einer ausführlichen Untersuchung unterworfen, da von y unabhängig ist, und derselbe auf die Bernoulli'sche chung reducirt. Liouville hat bei der Integration der nach benannten Differentialgleichung Differentialquotienten mit a meiner Ordnungszahl benutzt; dasselbe Verfahren lässt sich, ferner gezeigt wird, auch auf gewisse Fälle der vorliege

ferentialgleichung anwenden. Sodann wird untersucht, in chen Fällen die Differentialgleichung $Mdy+Ndx = 0$ auf den andelten Fall, dass M von y unabhängig ist, reducirt werden in. Damit die Substitution $x = \alpha y+u$ dies leiste, sind zwei lingungen von den Coefficienten von M und N zu erfüllen, und ır dieselben, die erforderlich sind, damit zwei parallele Gerade Differentialgleichung particulär genügen. Führt man homo- e Coordinaten ein, so besitzt die Gleichung in dem betrach- n speciellen Falle drei in einem Punkte sich schneidende ade als particuläre Integrale. Diese Eigenschaft ist umgekehrt die Specialität charakteristisch. Hieran wird die Frage ge- pft, ob die Integration auch dann geleistet werden kann, ın sich die drei particulären Geraden nicht in einem Punkte ıeiden; jedoch bereits in einem ganz speciellen Falle ist man ötigt, zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zusteigen.

Schliesslich werden einige Fälle, nämlich:

$$+(\alpha xy+\beta y+\gamma)\,dx = 0,\quad 2xy\,dy-(y^2+\alpha xy+2\beta x-\gamma y)\,dx = 0$$

der Fall, dass M in x, y linear ist, mittels quadratischer stitutionen erledigt. T.

G. Imschenetzky. Erweiterung der Euler'schen Methode, alle Fälle zu bestimmen, in welchen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung von gewisser Art sich integriren lässt, auf lineare Differentialgleichungen im Allgemeinen. St. Petersburg.

Hat man eine lineare Differentialgleichung

$$L = py+qy'+ry''+sy'''+\cdots+uy^{(n-1)}+vy^{(n)} = w,$$

p, q, r, $s,\ldots,u$. v die gegebenen Functionen von x sind, so ın man sie durch partielle Integration nach Multiplication derseits mit dx auf folgende Form bringen:

$$\int(p)y\,dx+(q)y+(r)y'+\cdots+(u)y^{(n-2)}+vy^{(n-1)} = \int w\,dx+\text{const.},$$

zur Abkürzung

$$(2)\quad \begin{cases} (p) = p - q' + r'' - s''' + \cdots \pm v^{(n)}, \\ (q) = q - r' + s'' - \cdots \mp v^{(n-1)}, \\ (r) = r - s' + \cdots \pm v^{(n-2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (u) = u - v' \end{cases}$$

gesetzt ist. Differentiirt man dieselbe wieder nach x, so ka[nn] man, indem man

$$(3)\quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{(p)} \\ \text{und} \\ y_1 = [(q)+(v)D+(s)D^2+\cdots+(u)D^{n-2}+vD^{n-1}]y \end{cases}$$

setzt, das Resultat auf die Form bringen

$$(4)\qquad y + \lambda y_1' = \lambda w.$$

Differentiirt man diese $(n-1)$-mal, und multiplicirt die so erhalte[nen] Gleichungen ((4) mitgerechnet) der Ordnung nach mit

$$\frac{(q)}{\lambda}, \frac{(r)}{\lambda}, \frac{(s)}{\lambda}, \ldots, \frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda},$$

so kommt man zur Gleichung:

$$(5)\qquad L_1 = p_1 y_1 + y_1' q_1' + r_1 y_1'' + s_1 y_1''' + \cdots + u_1 y_1^{(n-1)} + v y_1^{(n)} =$$

von derselben Art wie die gegebenen, deren Coefficienten d[urch] algebraische Operationen nebst wiederholter Differentiation [der] Coefficienten dieser erhalten werden. Dieses Verfahren k[ann] nun immer wiederholt werden, und so kommt man zu einer R[eihe] von Gleichungen:

$$(6)\qquad L = 0,\ L_1 = 0,\ L_2 = 0, \ldots, L_{i-1} = 0,\ L_i = 0 \ldots,$$

zwischen Lösungen, die so beschaffen sind, dass zwischen je [zwei] benachbarten derselbe Zusammenhang stattfindet, welcher d[urch] die Gleichung (3) und (4) für die beiden ersten ausgedrückt [ist]. Die Gleichung (4) lässt sich so schreiben:

$$y = \lambda(w - D\eta)$$

und giebt den Ausdruck der Lösung jeder Gleichung durch [die] nächstfolgende. Zur Erläuterung wird diese Methode auf [eine] Gleichung 2[ter] Ordnung angewendet, und hier wird die Be[mer]kung gemacht, dass dieser Process auch rückwärts geführt [wer]den kann, indem man eine Gleichung $L_1 = 0$ sucht, von wel[cher]

bene $L = 0$ durch denselben Process entstehen konnte, er für die 2te Ordnung die Integration einer linearen ialgleichung 1ter Ordnung verlangt, wodurch dieser Rückniger vorteilhaft wird, als der directe Gang. Wird nun eine von dieser Reihe von Gleichungen integrabel, so es auch die anderen.

erstes Beispiel für die Methode wird die Euler'sche g:

$$aX''y+bX'y'+Xy'' = 0,$$

$$X = \alpha x^2+\beta x+\gamma$$

mmen.

r wird die Bemerkung gemacht, dass die Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.1.2.3\ldots n} D^n(x^2-1),$$

nan dem Rodrigues und Ivory zuzuschreiben pflegt, schon particuläres Integral in der Euler'schen Formel:

$$P_n(x) = c'D^n(x^2-1)$$

i ist. Vergleicht man die Euler'sche Methode mit der von (Methode der Integration durch Differentiiren mit belie- rdnungsindex), so findet man, dass, obschon sie für die r betrachteten Gleichungen in der von Liouville enthalten scheint, ihr doch, da sie auch auf lineare Differentialgen überhaupt ausdehnbar ist, eine selbständige Bedeuzuschreiben ist. Nach dem erwähnten Beispiele folgen r andere. Ty.

NCARÉ. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCIV. 6, 1038-1040, 1166-1167.

erste Note enthält die Angabe einer neuen Methode, ebene Fuchs'sche Function durch Theta-Fuchs'sche Reihen cken. Dieselbe wird an der besondern Function ausgesetzt, die sich ergiebt, wenn man x als Function des en zweier Integrale der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\,\frac{\varphi(x)}{(x-a_1)^2\ldots(x-a_n)^2}$$

betrachtet, wo $\varphi(x)$ ein Polynom vom Grade $2n-2$ bedeu
und die Integrale die Beschaffenheit haben, dass sie in der U
gebung der singulären Punkte $a_1, \ldots, a_n, \infty$ regulär sind.

In der 2ten Note teilt der Verfasser im Zusammenhange
seinen früheren darauf bezüglichen Untersuchungen, über di
diesem Jahrbuch berichtet ist, (vgl. F. d. M. XIII. 1881. p. 24
einige neue Resultate mit betreffs der Darstellung der Integ
einer beliebigen linearen Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{d^nv}{dx^n} + P_{n-2}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}} + \cdots + P_1\frac{dv}{dx} + P_0 v = 0,$$

worin $P_0, P_1, \ldots, P_{n-2}$ rationale Functionen von x und y s
zwischen denen eine algebraische Beziehung $f(x, y) = 0$ best
Die singulären Punkte der Differentialgleichung werden in sol
erster und zweiter Kategorie geschieden, je nachdem die zu
hörige determinirende Gleichung lauter rationale Wurzeln
oder nicht. Es giebt im Allgemeinen zwei Fuchs'sche Functio
$F(z)$ und $F_1(z)$, die nur im Innern des Fundamentalkreises exist
und von der Beschaffenheit sind, dass $x = F(z)$, $y = F_1(z)$
genannten algebraischen Relation genügen, dass ferner der P
(x, y) durch keinen singulären Punkt der 2ten Kategorie geht
lange z innerhalb des Fundamentalkreises verbleibt, und
endlich, wenn (x, y) durch einen singulären Punkt der e
Kategorie geht, die $n-1$ ersten Ableitungen von $F(z)$ und
verschwinden. Die Integrale der Differentialgleichung sind
Fuchs'sche Functionen von z. Für den besonderen Fall,
die Differentialgleichung gar keine singulären Punkte hat
$f(x, y) = 0$ vom Geschlechte p ist, werden zwei Formen an
ben, auf welche das den erwähnten Fuchs'schen Functionen
sprechende Polynom zurückgeführt werden kann. In jeder d
Formen hat das Polygon Seiten, die Ecken bilden einen Cy
und die Summe der Winkel ist 2π. Ist $p = 1$, so reduciren
F und F_1 auf doppelt periodische Functionen. Lässt die Diff
tialgleichung algebraische Integrale zu, so reduciren sich
Zeta-Fuchs'schen Functionen, durch welche die Integrale v in

einen dargestellt werden, auf Fuchs'sche Functionen von der-
en Gruppe mit x, die daher nach einem bekannten Satze mit
irch algebraische Relationen verbunden sind. Mit Bezug-
ne auf eine am Schluss dieser Note gemachte Bemerkung,
man x und y auch durch Fuchs'sche Functionen, die in der
en z-Ebene existiren, ausdrücken könne, wird in der letzten
eine entsprechende discontinuirliche Gruppe von Substitu-
n durch ein Polygon von $2n+1$ Seiten in der z-Ebene be-
nt. $2n$ Seiten desselben bestehen aus Kreisbogen, deren
lpunkte auf der reellen Axe liegen, und eine Seite ist ein
nent dieser Axe selbst. Die $2n$ Kreisbogen sind einander
rt paarweise conjugirt, dass es eine lineare Substitution mit
en Coefficienten giebt, durch die der eine Bogen in den
ugirten übergeführt wird. Die Combination dieser n Substi-
nen ergiebt eine discontinuirliche Gruppe, welche zur Ent-
ung einer unendlichen Anzahl Fuchs'scher Functionen mit
nden Eigenschaften führt: 1) Sie sind sämmtlich rationale
tionen einer derselben, $F(z)$; 2) sie existiren in der ganzen
lehnung der z-Ebene, ihre wesentlich singulären Punkte sind
rt in unendlicher Anzahl und liegen alle auf der reellen Axe.
t man $x = F(z)$, $y = \sqrt{F(z)}$, dann ist $\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x)y$, wo $\varphi(x)$
nal in x mit reellen Coefficienten ist. Die singulären Punkte
Differentialgleichung sind an Zahl $2n$ und paarweise con-
t imaginär; in jedem derselben sind die Integrale regulär
die Differenz der Wurzeln der zugehörigen determinirenden
ratischen Gleichung ist ein aliquoter Teil der Einheit.

Hr.

APPELL. Sur une classe d'équations différentielles
néaires binômes à coefficients algébriques. C. R. XCIV.
2-205.

Kurze Inhaltsanzeige einer der Akademie überreichten Ab-
llung, deren Gegenstand lineare Differentialgleichungen der
Ordnung von der Form sind:

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \psi(x, y)\, z = 0,$$

wo ψ eine rationale Function bedeutet, und y mit x durch algebraische Gleichung vom Grade m und dem Geschlech verbunden ist. Es wird darin eine Methode angegeben, d welche man erkennen kann, ob eine solche Gleichung ei tegral von der Form $z = e^{\int \varphi(x, y)\, dx}$ hat, wo φ eine rati Function ist, und welche das Finden dieses Integrals mö macht, wenn es existirt. Ist $p = 0$ oder 1, dann kann ma Gleichung auf die Form $\frac{d^2z}{dt^2} = f(t)z$ zurückführen, wo $f($ ersten Falle eine rationale, im zweiten eine doppelt-period Function von t ist. Das Integral wird hier $e^{\int \omega(t)dt}$, wo $\omega($ $p = 0$ rational in t und für $p = 1$ eine doppelt-periodische F tion mit den nämlichen Perioden wie $f(t)$ ist, vorausgesetzt, die ursprüngliche Gleichung ein Integral der beschriebenen zulässt. Die befolgte Methode lässt sich auch auf die allg nere Gleichung

$$\frac{d^kz}{dx^k} = \psi(x, y)z$$

anwenden. Schliesslich bemerkt der Verfasser betreffs linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit algebrai Coefficienten, dass, wenn $p > 1$ ist, die Integration derselbe die eines Systems von p linearen simultanen partiellen Dif tialgleichungen zurückgeführt werden kann, deren Coeffici eindeutige Functionen von p unabhängigen Variabeln mi Gruppen von conjugirten Perioden sind. Hr

---

E. Goursat. Sur les intégrales algébriques des équa linéaires. Darb. Bull. (2) VI. 120-124.

Es ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn das allge Integral einer Differentialgleichung 2ter Ordnung mit ratio Coefficienten

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + by$$

aisch ist, zwischen zweien ihrer Integrale eine algebraische
ung mit constanten Coefficienten besteht. Im Vorliegenden
lie Umkehrung des Satzes bewiesen: Besteht zwischen zwei
unabhängigen Integralen von (1) eine algebraische Be-
g, so ist das allgemeine Integral eine algebraische Func-
on x. Eine Ausnahme tritt ein, wenn der Ausdruck

$$\frac{\left(2ab-\frac{db}{dx}\right)^2}{b^3}$$

unabhängig ist. In diesem Falle lässt sich die Integration
leichung auf Quadraturen zurückführen. Die angewandte
de zeigt übrigens, dass man jedes Mal, wenn eine Beziehung,
algebraisch oder nicht, zwischen zwei verschiedenen Inte-
der Gleichung bekannt ist, das allgemeine Integral durch
Differentiationen und Eliminationen erhalten kann.

Hr.

PEPIN. Méthode pour obtenir les intégrales algé-
ques des équations différentielles linéaires du second
re. Rom. Acc. P. d. N. L. XXXIV. 243-389.

ie Frage, unter welchen Bedingungen eine lineare homo-
Differentialgleichung zweiter Ordnung nur algebraische Inte-
abe, ist bekanntlich zuerst von Herrn Fuchs in der wichtigen
chardt's J. LXXXI. p. 97 (siehe F. d. M. VII. 1875. 172) er-
enen Arbeit zum Abschluss gebracht worden. Herr Pepin,
ieselbe Aufgabe früher in seiner in Tortolini's Ann. 1863
ntlichten Abhandlung gelöst zu haben glaubte, war darin,
err Fuchs gelegentlich einer von Herrn Pepin erhobenen
nation nachwies, zu falschen Resultaten gelangt, die dieser
in Brioschi's Ann. 1877 rectificirt hat (siehe F. d. M. VIII.
p. 188, X. 1878. 228). In der vorliegenden umfangreichen
dlung nimmt der Verfasser den inzwischen mehrfach be-
lten Gegenstand wieder auf, mit dem Bemerken, dass die
gen Methoden zur Lösung des Problems, die er übrigens

weder nach ihren Urhebern noch sonst näher bezeichnet, Vervollkommnung bedürfen, um praktisch zu sein.

Die Arbeit besteht aus drei Teilen. Der erste enthält nächst allgemeine Sätze über das Verhalten des als algebr vorausgesetzten Integrals der Differentialgleichung 2ter Ord von der Form

$$(1) \qquad y'' = Py$$

bei verschiedenen Umkreisungen der unabhängigen Variabel Dieser Abschnitt ist, abgesehen von der Vereinfachung im weisverfahren, eine Reproduction des Inhalts der erwähnten handlung von 1863, aus der wir folgende Sätze hervorheben

1. Ein Integral y von (1) gehe durch einen geschloss Umlauf von x in θy über, dieses durch denselben Umla $\theta^2 y$, u. s. f.; dann besteht zwischen den Gliedern dieser R die recurrente Gleichung $\theta^{m+2}y - \delta\theta^{m+1}y + \theta^m y = 0$, wo δ Constante ist. Genügen der Gleichung (1) die Wurzeln irreductiblen Gleichung vom Grade n, dann giebt es immer Umlauf von x, durch welchen die eine Wurzel y in die a θy übergeht. Die Anzahl der verschiedenen Glieder der $y, \theta y, \theta^2 y \ldots$ ist in diesem Falle stets endlich $= \mu$ und μ ein T von n. Obige Grösse δ hat den Wert $\varrho + \varrho^{-1}$, wo ϱ eine mitive μ^{te} Wurzel der Einheit ist. θy ist eine rationale Fu von x und y.

2. Steht θy mit y in keinem constanten Verhältnis, haben die beiden Integrale $\xi(y) = \theta y - \frac{1}{\varrho} y$, $\eta(y) = \theta y - \varrho$ Eigenschaft, dass durch denselben Umlauf von x, bei dem θy verändert wird, gleichzeitig ξ in $\varrho\xi$ und η in $\varrho^{-1}\eta$ überg Bezeichnet man ξ mit y, η mit $\psi(y)$, so folgt hieraus, dass jedes Integral in der Form $ay + b\psi(y)$ darstellen kann, wo y Gleichung der Form $F(y^\mu) = 0$ genügt, in der alle Expon von y Vielfache von μ sind, während $\psi(y)$ die Form $y^{\mu-1}$ hat. Aus weiteren Bemerkungen über das Verhalten von $\psi(y)$ bei Umkreisungen von x, die von der betrachteten ver den sind, ergiebt sich ferner der Satz:

3. Ist $\varphi(y)$ ein Integral von (1), das weder mit y noc

n constantes Verhältnis hat, und substituirt man für y urzeln der Gleichung $F(y^{\mu}) = 0$, so ist die Anzahl der on $\varphi(y)$, die unter einander in keiner constanten Beziehung stets ein Vielfaches von $\frac{\mu}{2}$ oder μ, je nachdem μ grade igrade ist.

Folgenden kommt der Verfasser zum eigentlichen Gegen- dieses Teils, der in der Ermittelung der oberen Grenze Grad der irreductiblen algebraischen Integralgleichung und der Aufstellung der reducirten Wurzelsysteme der n besteht, eine Aufgabe, für welche die frühere Methode fassers sich als unzulänglich erwiesen hatte. Die Lösung Problems wird im Wesentlichen nach den Principien und en, die Herr Fuchs in der erwähnten Arbeit, sowie in einer genden ergänzenden Abhandlung in Borchardt's Journal '. (F. d. M. X. 1878. p. 228) entwickelt hat, durchgeführt. rwähnung des Herrn Fuchs findet man dem ungeachtet n der Einleitung, noch bei den wichtigeren Resultaten, in der ganzen Arbeit nur einmal gelegentlich (p. 263), „die Bezeichnung" des reducirten Wurzelsystems auf Fuchs verwiesen wird. Aber ebenso verdankt ihm der er die Einführung des Products der reducirten Wurzeln, eine Wurzel einer rationalen Function von x ist, in der ner ganzen homogenen Function (von Fuchs „Primform" ge- derjenigen beiden Fundamentalintegrale, die oben mit y y) bezeichnet sind, desgl. die Anwendung der Hesse'schen nte H der Primform und der Hesse'schen Covariante von Bestimmung des niedersten Grades einer Primform. In he ist nur zu bedauern, dass der Verfasser die zweite che Abhandlung über diesen Gegenstand, welche die ung über die Gesammtheit der möglichen Primformen so h erleichtert, nicht ausgiebig genug benutzt hat. Er würde Resultaten, die die Bestimmung der einzig möglichen der irreductiblen algebraischen Integralgleichungen, sowie stellung der verschiedenen zweckdienlichen Typen be- auf bequemerem und kürzerem Wege gelangt sein.

Der zweite Teil enthält die Auseinandersetzung einer p
tischen Methode, die algebraischen Lösungen, wenn sie exis
wirklich aufzustellen. Er zeichnet sich durch eine eingeh
Behandlung des Gegenstandes aus, in der alle notwend
Rechnungen bis zu Ende geführt werden, um zunächst
zur Existenz algebraischer Lösungen notwendigen Bedi
gen für P zu erhalten, und, falls diese erfüllt sind, die C
cienten der algebraischen Gleichung zu bestimmen. In
Fällen dienen ausgeführte Beispiele dazu, die angewandt
thode zu erläutern. Dieselbe stimmt mit der von Herrn
in seiner zweiten Abhandlung gegebenen darin überein, das
Lösung der Aufgabe von der Bestimmung zweier rationalen
tionen von x abhängig gemacht wird, weicht aber in dem
hierzu gänzlich ab. Der Verfasser bildet nämlich zunächs
„resolvirende" Gleichung, der das Product $u = y \cdot \psi(y)$ g
Zu dem Ende werden zwei solche von einander verschi
aus Primformen zusammengesetzte binäre Formen, $f(y, \psi(y)$
und $F(y, \psi(y)) = q$, ausgewählt, die rationale Functionen
sind. Bedienen wir uns der Kürze wegen der Fuchs'sche
zeichnungen in der zweiten Abhandlung, so lauten diese F
in den drei allein in Betracht kommenden Fällen: $N = 4$, l
$N = 6$, $L = 8$; $N = 12$, $L = 10$ (N der niedrigste Grad
Primform, L der Index des zugehörigen Wurzelsystems) r

$$\varphi_6,\ f_4 \cdot H(f_4) - f_6^2,\ H(f_6) - f_{12},\ H(f_{12})$$

Aus den beiden Gleichungen $f(y, \psi(y)) = p$, $F(y, \psi(y)) =$
hält man dann in derselben Reihenfolge die nachstehende
chungen in u:

$$u^4 + pu - q = 0,\ u^6 - pu^2 + q = 0,\ u^{12} + 10qu^6 - pu^2 + 5q^2$$

Ist u bekannt, so erhält man y und $\psi(y)$ durch u, p, q
braisch, und zwar explicite in Wurzelgrössen ausgedrückt
Frage ist also auf die Bestimmung der rationalen Fun
p und q zurückgeführt. Hierzu gelangt man, indem man
aus (1) herleitbaren Differentialgleichung für u:

$$2\frac{d^2 \log u}{dx^2} + \left(\frac{d \log u}{dx}\right)^2 + \frac{c^2}{u} = 4P \quad (c \text{ co}$$

e Differentialquotienten von u vermöge der algebraischen ıungen ihre Ausdrücke durch u substituirt. Der Umstand, lie resultirende algebraische Gleichung für u die ursprüng- irreductible Gleichung als Factor enthalten muss, ergiebt Anzahl von Bedingungsgleichungen, die p, q und deren Ab- ʒen enthalten und durch passende Umformungen in allen auf die einzige Bedingung zurückgeführt werden, dass nicht linearen Differentialgleichung 3[ter] Ordnung durch eine ale Function genügt werde. Mit dieser Function stehen q in einfacher Verbindung.

on der entwickelten Methode wird im 3[ten] Teile eine inter- e Anwendung auf die Untersuchung der algebraischen onen gemacht, deren Entwickelung durch eine hypergeo- che Reihe gegeben ist. Die Resultate stimmen mit den von Schwarz (Borchardt's J. LXXV. 292, s. F. d. M. V. 1873. 249) nzlich verschiedenem Wege gefundenen überein. Hr.

CARD. Sur les formes des intégrales de certaines ıations différentielles linéaires. C. R. XCIV. 418-421.

ie betrachteten Differentialgleichungen sind von der Form:

$$(1) \qquad x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + xF(x,y)\frac{du}{dx} + F_1(x,y)u = 0,$$

$= x^\mu$ (μ eine beliebige Constante) und F und F_1 Func- von x und y bezeichnen, die in der Umgebung von $x = 0$ ır jeden Wert von y eindeutig und stetig sind. Es handelt m die Ermittelung der Form der Integrale von (1) in der ung von $x = 0$. Die angewandte Methode besteht darin, gewöhnliche Differentialgleichung (1) ein passendes System ler Differentialgleichungen zu substituiren. In der Voraus- ʒ, dass $\mu - 1$ nicht eine reelle negative Grösse ist, und dass nicht auf die Form $n+m(\mu-1)$ (n und m ganze positive) gebracht werden kann, lautet die gesuchte Form der ıle:

$$x^{\varrho_1}P_1(x, x^{\mu-1}), \; x^{\varrho_2}P_2(x, x^{\mu-1}),$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\varrho(\varrho-1)+\varrho F(0,0)+F_1(0,0)=0$$

sind, und $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ Functionen bedeuten, die in der U gebung von $x=0$ und für jeden Wert von y eindeutig stetig sind.

Hr.

G. Darboux. Sur une proposition relative aux équati linéaires. C. R. XCIV. 1456-1459.

Kann man die Gleichung

$$y''+Py'+(Q-mR)y=0$$

für einen beliebigen Wert des Parameters m integriren, ist Θ ein Integral der Gleichung

$$\Theta''+P\Theta'+Q\Theta=0,$$

so wird die Function

$$u=\frac{y'-\frac{\Theta'}{\Theta}y}{\sqrt{R}}$$

ein Integral der Gleichung

$$u''+Pu'$$
$$+u\left[-mR-\Theta\sqrt{R}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\Theta\sqrt{R}}\right)+\Theta\sqrt{R}\frac{d}{dx}\left(\frac{P}{\Theta\sqrt{R}}\right)\right]=($$

sein. Dass man durch diesen Satz zu einer unbegrenzten von Gleichungen gelangen kann, die den Parameter in der lichen Weise enthalten und für alle Werte des Parameter tegrirbar sind, ergiebt sich aus dem Beispiel $y''=my$. D die Anwendung von $\Theta=x$ als Lösung von $\Theta''=0$ erhält die Gleichung

$$y''=\left(\frac{1.2}{x^2}+m\right)y;$$

aus dieser wieder, indem man die Lösung $\Theta=x^2$ von $\Theta''=\frac{1}{x}$ wählt:

$$y''=\left(\frac{2.3}{x^2}+m\right)y. \text{ u. s. f.}$$

Hr.

BRIOSCHI. Sulla origine di talune equazioni differenziali lineari. Rom. Acc. L. (3) VI. 42-47.

Aus der linearen Differentialgleichung 2ter Ordnung

$$y'' + py' + qy = 0$$

en lineare Gleichungen höherer Ordnung abgeleitet, indem neue Variable z, deren Beziehung zu x durch eine Gleichung en ist, eingeführt wird. Setzt man nun

$$e^{\int p dx} z' = \varphi(z), \quad q : z'^2 = \psi(z),$$

entiirt diese Gleichungen mehrmals nach x und combinirt ssender Weise die Resultate, so gelangt man zu linearen entialgleichungen höherer Ordnung in z, von denen der sser folgende zwei aufstellt:

$$1)\quad z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + l_0 q) z' + l_1 (q' + 2pq) z = 0,$$

$$2)\quad \begin{cases} z^{IV} + 6pz''' + (4p' + 11p^2 + l_0 q) z'' \\ + [p'' + 7pp' + 6p^3 + l_0 pq + l_1 (q' + 2pq)] z' \\ + l_2[(q' + 2pq)' + 3p(q' + 2pq)] z + l_3 q^2 z = 0, \end{cases}$$

ien die l numerische Coefficienten bedeuten, unter der Ane, dass zwischen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ folgende Relationen be-n:

für (1) $\quad b(z) + l_0 \psi(z) + l_1 z \alpha(z) = 0,$

„ (2) $\quad c(z) + l_0 \psi(z) a(z) + l_1 \alpha(z) + l_2 \beta(z) z + l_3 \psi^2(z) z = 0,$

$$a(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}, \; b(z) = a'(z) + 2a^2(z),$$

$$c(z) = b'(z) + 3b(z)a(z), \quad \alpha(z) = \psi'(z) + 2\psi(z)a(z),$$

$$\beta(z) = \alpha'(z) + 3\alpha(z)a(z).$$

Für $l_0 = 4$, $l_1 = 2$ stellt 1) die Gleichung dar, der das Product r Fundamentalintegrale der ursprünglichen Gleichung genügt; $= 10$, $l_1 = 10$, $l_2 = 3$, $l_3 = 9$ wird 2) durch eine cubische der Fundamentalintegrale der ursprünglichen Gleichung digt. Die Resultate werden dazu angewandt, um die linearen entialgleichungen abzuleiten, denen bei den Transformationen

5ter und 7ter Ordnung in der Theorie der elliptischen Functionen die transformirten Moduln als Functionen der ursprünglichen genügen. Die zu Grunde gelegte Gleichung 2ter Ordnung ist in beiden Fällen eine hypergeometrische. Hr.

D. Besso. Di alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare, non omogenea del second' ordine. Rom., Acc. L. Mem XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom., Acc. L. (3) VI. 22[illegible]

Das Product von m particulären Lösungen einer linearen vollständigen Differentialgleichung 2ter Ordnung genügt einer linearen vollständigen Differentialgleichung von der Ordnung $\frac{m(m+3)}{2}$; die m Lösungen selbst sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung m^{ten} Grades, deren Coefficienten rationale Functionen derer der gegebenen Differentialgleichung, des Productes der m Lösungen und der Ableitungen aller vorbenannten Grössen sind. Ist $m = 2$, so ist jedes Integral der Differentialgleichung 5ter Ordnung für das Product zweier Lösungen der gegebenen Differentialgleichung eine ganze homogene Function 2ten Grades von drei particulären Lösungen der letzteren, mit constanten Coefficienten, deren Summe gleich 1 ist, und umgekehrt genügt jede so beschaffene quadratische Form von drei particulären Lösungen der Differentialgleichung 2ter Ordnung der Differentialgleichung 5ter Ordnung für das Product zweier Lösungen der ersteren. Hr.

D. Besso. Di alcune proprietà dell' equazione differenziale lineare omogenea del second' ordine e di alcune equazioni algebriche. Rom. Acc. L. Mem. XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom. Acc. L. (3) VI. 226.

Bedeutet z das Product von m particulären Lösungen $y_1, \dots, y_m$ der Differentialgleichung $y'' + py' + qy = 0$ und $S_{m,n}$ die Summe der Producte von $m-n$ der y mit den ersten Differentialquotienten

der übrigen n, so bestimmen sich die S successive durch die
rrente Formel

$$(n+1)\, S_{m,n+1} = S'_{m,n} + np\, S_{m,n} + (m-n+1) q S_{m,n-1}$$

Verbindung mit den Anfangsgleichungen $S_{m,0} = z$, $S_{m,1} = z'$.
raus erhellt, dass $S_{m,n}$ von der Form

$$S_{m,n} = a_0 z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} z' + a_n z$$

worin die a rationale Functionen von p, q und ihren Ablei-
gen bedeuten. z selbst genügt der Differentialgleichung
1[ter] Ordnung:

$$S'_{m,m} + pm S_{m,m} + q S_{m,m-1} = 0.$$

logarithmischen Ableitungen $\frac{y'_1}{y_1}, \cdots, \frac{y'_m}{y_m}$ sind Wurzeln der
chung m^{ten} Grades

$$(1) \qquad S_{m,0} t^m - S_{m,1} t^{m-1} + \cdots \pm S_{m,m-1} t \mp S_{m,m} = 0.$$

r den hiervon gemachten Anwendungen heben wir folgende
or. Es wird vorausgesetzt, dass $p = 0$, und die Summe der
Potenzen zweier particulärer Lösungen $y_1^m + y_2^m$ constant sei.
ann erhält man für y_1, y_2 die Werte

$$\left\{\sqrt{a} \pm \sqrt{a - \frac{4}{m-1}\, \xi^m}\right\}^{\frac{1}{m}},$$

n a eine willkürliche Constante und $q = \xi^{m-2}$ gesetzt ist.
ererseits kann man $y_1^m + y_2^m$ in der Form eines Products der
rticularlösungen

$$(y_1 - \varepsilon_1 y_2)\,(y_1 - \varepsilon_2 y_2) \ldots (y_1 - \varepsilon_m y_2) = z$$

tellen, worin die ε die m^{ten} Wurzeln von -1 sind. Die
zeln der algebraischen Gleichung (1) sind demnach

$$t_r = \frac{y'_1 - \varepsilon_r y'_2}{y_1 - \varepsilon_r y_2},$$

vermöge der bekannten Ausdrücke für y_1 und y_2 angebbar.
er ist in den betrachteten Fällen $S_{m,0} = 1$, $S_{m,1} = 0$.
anderen Coefficienten der Gleichung (1) lassen sich durch
, $S_{m,3}$ rational ausdrücken. Da die t_r sich durch eben
Grössen als Wurzelfunctionen darstellen lassen, so ist auf
Weise eine Klasse von algebraischen Gleichungen m^{ten} Grades

charakterisirt, in denen zwei Coefficienten willkürlich bleiben, welche durch Wurzelgrössen auflösbar sind. Der Umstand, dass jede binäre Form m^{ten} Grades in die Summe der m^{ten} Potenzen von n linearen binären Formen transformirt werden kann, wenn $2n \gtreqless m+1$, führt den Verfasser auch auf die Betrachtung der Eigenschaften solcher Summen, deren Wiedergabe wir uns hier versagen müssen. Hr.

D. Besso. Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un equazione differenziale lineare omogenea e specialmente dell' equazione differenziale del terz' ordine. Rom., Acc. L. Mem. XIV.

Casorati e Beltrami. Relazione. Rom., Acc. L. (3) VI. 226.

Mit Bezugnahme auf eine frühere Arbeit des Verfassers (Mem. R. Acc. L. X.) die sich auf das Product von m particulären Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung bezieht, werden ausser einigen allgemeinen Bemerkungen über die dort aufgestellten Sätze einige Eigenschaften der Differentialgleichung 3ter Ordnung

$$(1) \qquad y'''+py''+qy'+ry = 0$$

entwickelt, die das Product $y_1 y_2 = z$ zweier Particularlösungen betreffen. z genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung 6ter Ordnung. Die logarithmischen Ableitungen von y_1 und y_2 sind Wurzeln einer algebraischen Gleichung 2ten Grades, deren Coefficienten rational durch z, die Coefficienten der Differentialgleichung und ihre Derivirten sich ausdrücken lassen. Die Bedingung dafür, dass zwischen drei linear unabhängigen Integralen von (1) eine ganze homogene Function 2ten Grades mit constanten Coefficienten besteht, wird durch die Gleichung

$$4p^3+18pp'+9p''-27q'+54r = 0$$

gegeben. Jede Lösung von (1) ist dann das Product von zwei particulären Lösungen einer Differentialgleichung 2ter Ordnung mit Coefficienten, die rational aus p, q, r und ihren ersten Ableitungen zusammengesetzt sind. (Vergl. die p. 242 besprochene

beit des Herrn Fuchs). In dem speciellen Falle, dass $p = 0$, $= 0$ und über r so verfügt wird, dass das Product constant rd, lässt sich das allgemeine Integral durch Wurzelgrössen sdrücken. Hr.

. Besso. Sopra una classe d'equazioni del sesto grado resolubili per serie ipergeometriche. Rom. Acc. L. Mem. XIV.

asorati e Beltrami. Relazione. Rom. Acc. L. (3) VI. 226.

Die Resultate der im Vorhergehenden besprochenen Arbeit erden durch die Annahme $m = 6$ specialisirt. Ist

$$y'' + qy = 0$$

ne Differentialgleichung von der Eigenschaft, dass das Product n sechs ihrer particulären Integrale constant ist, dann lautet e Gleichung, welche die logarithmischen Ableitungen dieser ösungen zu Wurzeln hat:

$$t^6 + S_2 t^4 - S_3 t^3 - \frac{1}{5} S_2^2 t^2 + \frac{1}{25} S_2 S_3 - \left(\frac{1}{50} S_3^2 + \frac{1}{125} S_2^3\right) = 0.$$

ie Differentialgleichung kann in dem betrachteten Falle mitlst einfacher Substitutionen in eine hypergeometrische transrmirt werden, und die Wurzeln t_r werden durch die Formel geben:

$$t_r = \frac{12}{\sqrt[3]{5}} \sqrt[6]{a} \, . \, \xi^{\frac{2}{3}} (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \frac{c_r \varphi_1'(\xi) + \varphi_2'(\xi)}{c_r \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)},$$

orin die φ und ihre ersten Ableitungen mittelst hypergeomeischer Reihen sich ausdrücken:

$$\xi = \frac{64 S_2^3}{135 S_3^2 + 64 S_2^3}, \quad a = \frac{1}{135}(135 S_3^2 + 64 S_2^3),$$

$$c_r = -\frac{1 + \mu_r(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{4\mu_r \cos\frac{\pi}{24}},$$

d wo die μ_r die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^6 + 5\mu^4 + 5\mu^2 - 1 = 0$$

sind. Bemerkenswert hierbei ist die Methode der Bestimmung der Constanten c_r, zu der die Ermittelung der Grenzwerte der für $\xi = 0$ und $\xi = 1$ notwendig ist. Hr.

Beltrami e Razzaboni. Sopra la memoria del prof. D. Besso intitolata: Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari. Rom., Acc. L. (3) VI. 12.

J. C. Malet. On a class of invariants. Phil. Trans. CLXIII. 751-756.

Der Verfasser betrachtet zwei Klassen von Invarianten einer Differentialgleichung, nämlich $\frac{d^2y}{dx^2} + 2P_1\frac{dy}{dx} + P_2y = 0$. Man hat erstens, entsprechend einem Wechsel der abhängigen Variabeln y, eine Invariante $P_2 - P_1^2 - \frac{dP_1}{dx}$, d. h., schreibt man $z(x)$ für y, so ist die in z transformirte Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2Q_1\frac{dz}{dx} + Q_2z = 0,$$

wo die Functionen Q_1 und Q_2 so beschaffen sind, dass identisch

$$Q_2 - Q_1^2 - \frac{dQ_1}{dx} = P_2 - P_1^2 - \frac{dP_1}{dx}.$$

Zweitens hat man entsprechend dem Wechsel der unabhängigen Variabeln eine Invariante $P_2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dP_2}{dx} + 4P_1P_2\right)$, d. h., schreibt man $\varphi(t)$ für x, so ist die transformirte Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2Q_1\frac{dy}{dt} + Q_2y = 0.$$

Dann sind Q_1 und Q_2 solche Functionen, dass die identische Gleichung

$$Q_2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dQ_2}{dx} + 4Q_1Q_2\right) = P_2^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{dP_2}{dx} + 4P_1P_2\right)$$

gilt. Cly. (O.).

H. Curtis, R. Rawson. Solutions of a question (6780). Ed. Times XXXVI. 68-70.

Boole hat bewiesen, dass die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}+2Q\frac{du}{dx}+\left\{Q^2+\frac{dQ}{dx}\pm c^2-\frac{m(m+1)}{x^2}\right\}u=0$$

ole Diff. Equ. p. 459) in endlicher Form integrirt werden n, wo Q ein Function von x ist. Hier wird das erweitert auf:

$$\frac{d^2u}{x^2}+2Q\frac{du}{dx}+\left\{Q^2+\frac{dQ}{dx}+Ax^r+\frac{(m-r)(m+r+4)}{4(m+2)^2x^2}\right\}u=0,$$

A constant, $(2p+1)\,m=-4p$, p eine ganze Zahl ist.

O.

Pfannenstiel. Bidrag till de liniära differential-qvationernas teori. Goteborg Handl. 1882. 1-50.

Diese Abhandlung ist hauptsächlich einer Untersuchung der erentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\Sigma k_r x^r}{(x^2-a^2)^2}\,y$$

idmet, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass das Inte- von der Form

$$y\doteq Ae^{\varphi(x)}+Be^{-\varphi(x)}$$

Besonders werden die Specialfälle $\nu=2$ und $\nu=4$ be- delt. Der Verfasser referirt auch über die Methode, die Herr mgren angegeben hat, um die Differentialgleichung

$$(a_0+a_1x+a_2x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+(b_0+b_1x)\frac{dy}{dx}+c_0y=0$$

ntegriren (siehe: Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar d 5 und 7), und wendet diese Methode an, um die Glei- ngen zu transformiren. Schliesslich fügt der Verfasser noch ges hinzu über die Differentialgleichungen dritter Ordnung, ein Integral von der Form

$$y=Ae^{\varphi(x)}+Be^{-\varphi(x)}+C\psi(x)$$

ssen. Referent kann nicht umhin zu bemerken, dass ihm die

Methode des Verfassers wenig fruchtbar scheint, und dass Darstellung keine leicht übersichtliche ist, wozu noch kommt, die typographische Ausstattung, was die Formeln betrifft, schlecht ist.

E.

R. Rawson. Note on a transformation of Riccati's e tion. Mess. (2) XII. 34-36.

Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \left(ax^m + \frac{q(q+1)}{x^2}\right)z,$$

wo

$$m = \frac{\pm 2(2q+1)}{2p\pm 1} - 2.$$

Glr. (O.)

J. W. L. Glaisher. On Riccati's equation and its tr formation, and on some definite integrals which sa them. Phil. Trans. CLXXII. 759-828.

Die Arbeit bezieht sich hauptsächlich auf die verschied Formen der particulären Integrale der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - a^2u = \frac{p(p+1)}{x^2}u,$$

und auf die Auswertung gewisser bestimmter Integrale, welch ihr in Verbindung stehen. Die betreffenden Formen sind:

$$(2) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{2p}{x}\frac{dv}{dx} - a^2v = 0,$$

$$(3) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{n-1}{x}\frac{dv}{dx} - a^2v = 0,$$

$$(4) \qquad \frac{d^2v}{dz^2} - a^2z^{2q-2}v = 0,$$

welche letztere als die Normalform der Riccati'schen Gleic betrachtet werden kann. Die Gleichungen lassen eine Integr in endlicher Form zu, wenn p eine ganze Zahl, n eine un ganze Zahl und φ der reciproke Wert einer ungraden g

l. Die Arbeit zerfällt in acht Teile. Im ersten Abschnitt den sechs particuläre Integrale der Gleichung (1) hergeleitet die Beziehungen zwischen ihnen geprüft. Wenn p keine ganze l, so dehnt sich jedes derselben in's Unendliche aus, im an- ən Fall sind zwei der Reihen begrenzt. Es giebt dann aber i particuläre Integrale, deren jedes eine endliche Zahl von ·dern hat. Sie entstehen dadurch, dass die Zähler den Coef- ınten Null als Factor enthalten. Wenn die Reihe fortgesetzt l, treten Factoren Null in die Nenner, und die Reihe muss n als wieder beginnend und in's Unendliche sich erstreckend ·achtet werden. Jedenfalls aber genügt der endliche Teil der erentialgleichung. Es ist daher naturgemäss, sich mit der rachtung dieses Teiles zu begnügen.

Der zweite Teil enthält eine neue Form der Lösung in (1) den Fall, dass p eine ganze Zahl ist. Ist $p = i$ eine positive ze Zahl, so genügt der Gleichung der Coefficient von h^{i+1} in Entwickelung von $e^{a\sqrt{x^2+xh}}$ nach steigenden Potenzen von h. dritte Teil enthält die sechs particulären Integrale von und (4), die denen von (1) entsprechen. Der vierte Ab- ıitt bezieht sich auf die speciellen Fälle, in denen die Glei- ngen eine Integration in endlicher Form zulassen. Wenn eine erentialgleichung durch eine unendliche Reihe befriedigt wird, wenn die Reihe für gewisse Werte einer in ihr enthaltenen sse endet, dann kann das Integral in verschiedener Form gestellt werden, indem man die endliche Reihe am andern le anfängt, und die Glieder in umgekehrter Ordnung schreibt. fünfte Abschnitt enthält die Auswertung der bestimmten ·grale

$$\int_0^\infty e^{-x^m - a^2 x^{-m}}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^n}\,dx,$$

m eine reelle und n eine positive Grösse ist, und zwar wenn m der Form $\frac{2i\pm1}{-4i}$ und n eine positive ganze Zahl ist. Die allge- nen Formeln möchten wohl neu sein. Die Integrale genügen erentialgleichungen der Form (4) und (1), so dass ihre Werte mit

den in Abschnitt (1) und (3) erhaltenen Lösungen dieser Gleich in Verbindung stehen müssen. Der sechste und längste Absch der Abhandlung bezieht sich auf die zahlreichen symbolisc Lösungen der Gleichung (1) und ihrer Transformationen (3) un in den Fällen, in denen sie in endlicher Form integrabel Eine grosse Zahl der von Ellis, Boole, Lesbesgue, Hargr Williamson, Donkin, Gaskin u. A. gegebenen symbolischen Lösu wird erwähnt und mit einander verglichen. Der siebente schnitt betrifft den Zusammenhang der hier gegebenen Resu mit den Formeln der Bessel'schen Functionen, indem die Bessel' Gleichung

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)w = 0$$

sich durch einfache Substitutionen aus (1) ableiten lässt.

Der Schlussteil enthält eine Liste von Schriften, dere halt mit der Arbeit in Zusammenhang steht.

Cly. (O.).

A. E. Steinthal. On the solution of the equation

$$(1-x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + n(n+1)u = 0.$$

Quart. J. XVIII. 330-346.

Die Lösung der bekannten Gleichung für die Legendre's Functionen geschieht hier durch bestimmte Integrale. Wählt die Substitution

$$u = \int e^{xti}\frac{z}{\sqrt{t}}\,dt,$$

so geht bei gewissen Grenzen für dieses Integral die in Ueberschrift stehende Gleichung in die der Bessel'schen Funct

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} + \left\{1 - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{t^2}\right\}z = 0$$

über, für welche Hankel in Clebsch Ann. I. p. 467 ff. eine von Lösungen in Form von bestimmten Integralen gegeben Mit Benutzung derselben erhält man für u bestimmte D

grale, die sich sofort auf bestimmte einfache Integrale zurück-
en lassen. Dieselben haben die Formen

$$u = C\int \frac{(\xi^2-1)^n}{(x-\xi)^{n+1}}\,d\xi \quad \text{und} \quad u = c\int \frac{(x-\xi)^n}{(1-\xi^2)^{n+1}}\,d\xi,$$

teils über geschlossene, die singulären Punkte ± 1, x, ∞ um-
isende Linien, teils zwischen den Grenzen ± 1, $\pm\infty$, $\pm\infty i$
ommen werden. Die mannichfaltigen Lösungen werden für
iebige n discutirt, für den Fall eines ganzzahligen n ihr Zu-
mmenhang mit den bekannten Functionen $P_n(x)$ und $Q_n(x)$ dar-
an und die Eigenschaften dieser aus der Form des bestimm-
Integrals abgeleitet. Wir bemerken übrigens, dass Herr
läfli in seiner Schrift „Ueber die zwei Heine'schen Kugel-
ctionen mit beliebigem Parameter etc." Bern. 1881, diese
nctionen durch dieselben beiden Integralformen dargestellt hat.
;l. F. d. M. XIII. 1881. 395). Hr.

. Steen. Integration af en lineär Differentialligning
af anden Orden. Kjob. Skrift. (6) I. 333-345.

Die Integrale der beiden Differentialgleichungen

$$y''-(a\cot x-b\,\mathrm{tg}\,x)y'+cy = 0,$$
$$v''+(a\cot x-b\,\mathrm{tg}\,x)v'+cv = 0$$

hen nach den vom Verfasser in Darb. Bull. 1881. p. 30-36
;ebenen Entwickelungen zu einander in einer solchen Beziehung,
s

$$y = v'\sin^a x\cos^b x,$$
$$v = y'\sin^{-a} x\ \cos^{-b} x.$$

Gewisse Specialfälle der erwähnten Gleichungen sind leicht
grabel, andere lassen sich durch bestimmte Integrale integriren.
nentlich wird gezeigt, dass die Gleichung

$$y''-(a\cot x-b\,\mathrm{tg}\,x)y'-2p(a+b-2p)y = 0$$

$p>1$ und $b>2p-1$ das folgende Integral hat:

$$y = \int_{-1}^{\cos 2x} (\cos 2x-\alpha)^p\,(1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\,(1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)}\,d\alpha,$$

dagegen für $p>1$ und $a>2p-1$:

$$y=\int_{+1}^{\cos 2x}(\cos 2x-\alpha)^p\,(1+\alpha)^{\frac{1}{2}(b-2p-1)}\,(1-\alpha)^{\frac{1}{2}(a-2p-1)}\,d\alpha.$$

Wenn also nicht nur $p>1$ (p übrigens ganz willkürlich), sondern auch sowohl $b>2p-1$ als $a>2p-1$, so erhält man auf diese Weise das vollständige Integral der ersten Gleichung. Für die andern gelten ganz ähnliche Formen. Gm.

E. Mathieu. Sur l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ de Gauss. Résal J. (3) VIII. 357-383.

Es werden die Fälle untersucht, in welchen sich die allgemeine Lösung der Gauss'schen Differentialgleichung in endlicher Form darstellen lässt, ohne indess auf vorgängige Arbeiten aus diesem Gebiete, von denen wir nur die bekannte Abhandlung des Herrn Schwarz in Borchardt's J. LXXV. erwähnen, irgend Bezug zu nehmen. Der Gegenstand ist insofern nicht erschöpfend behandelt, als nur die Fälle in Betracht gezogen sind, in denen ein particuläres Integral P so beschaffen ist, dass ihre logarithmische Ableitung eine rationale Function ist. In einigen dieser Fälle sind zwei solche particulären Integrale vorhanden, die sich unmittelbar aus dem Kummer'schen Tableau von 24 Integralen entnehmen lassen. In den übrigen Fällen, wo nur ein solches existirt, folgt aus demselben nach einer bekannten Regel ein zweites particuläres Integral in der Form

$$P\int x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}\frac{1}{P^2}\,dx.$$

Vermöge der Reductionsformel

$$\frac{x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1}}{F(-n,\beta,\gamma,x)^2}$$
$$=\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{-\gamma+1}(1-x)^{\gamma+n-\beta}\chi(x)}{F(-n,\beta,\gamma,x)}\right]+Bx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma+n-\beta-1},$$

wo $\chi(x)$ ein Polynom vom Grade $n-1$ und B eine Constante bedeutet, lässt sich obiges Integral, in dem $P=F(-n,\beta,\gamma,$

setzen ist, durch Abzug eines endlichen Ausdrucks auf das :gral eines binomischen Differentials reduciren, welches unter vissen Voraussetzungen betreffs β und γ durch Logarithmen l Kreisfunctionen in endlicher Form dargestellt werden kann. ı Schluss bildet die Untersuchung, in welchen Fällen die ıction $F(\alpha, \beta, \gamma, \sin^2\varphi)$ in Beziehung auf φ die Periode 2π hat.

Hr.

Goursat. Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables. C. R. XCV. 717-719.

Der Verfasser betrachtet die von Herr Appell eingeführte der pergeometrischen Reihe analog gebildete Function zweier Verlerlicher (C. R. XC. 296, 731, 977, vgl. F. d. M. XII. 1880. 296):

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y) = \Sigma \frac{(\alpha, m+n)\ (\beta, m)\ (\beta', n)}{\gamma, (m+n)\ (1, m)\ (1, n)} x^m y^n,$$

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1),\ (\lambda, 0) = 1,$$

d bemerkt, dass die zwei simultanen partiellen Differential- :ichungen, denen sie genügt, im Allgemeinen 60 gemeinsame :egrale haben von der Form:

$$x^l(1-x)^m y^{l'}(1-y)^{m'}(x-y)^n F_1(\lambda, \mu, \mu', \nu, t, t'),$$

›rin λ, μ, μ', ν mit $\alpha, \beta, \beta', \gamma$ in einfacher Beziehung stehen und t' rationale Functionen des ersten Grades von x und y sind.

Der Beweis ist demjenigen von Jacobi für die hypergeomeschen Reihen einer Veränderlichen in Crelle's J. LVI. gegebenen ıchgebildet und nimmt das von Herrn Picard als Lösung für e partiellen Differentialgleichungen aufgestellte Integral

$$\int_g^h u^{\beta+\beta'-\gamma}(u-1)^{\gamma-\alpha-1}(u-x)^{-\beta}(u-y)^{-\beta'}du$$

. R. XC. 1119. Ann. de l'Éc. N. (2) X. vgl. F. d. M. XII. 1880. 328) zum Ausgangspunkt, worin g und h zwei der fünf Grössen 1, x, y, ∞ bezeichnen. Jedes dieser zehn Integrale wird auf

sechs verschiedene Arten mittelst hypergeometrischer Reihen zwei Veränderlichen ausgedrückt. Auf diese Weise ergeben sich die gedachten 60 gemeinsamen Lösungen. Hr.

G. Darboux. Sur une équation linéaire. C. R. XCI 1645-1648.

Der Verfasser betrachtet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \Big[\frac{\mu(\mu+1)}{sn^2x} + \frac{\mu'(\mu'+1)dn^2x}{cn^2x} + \frac{\mu''(\mu''+1)k^2cn^2x}{dn^2x} + n(n+1)k^2sn^2x+h\Big]y,$$

welche die Lamé'sche Gleichung als speciellen Fall enthält. W μ, μ', μ'', n ganzzahlig sind, dann ist das allgemeine Integral Gleichung überall eindeutig und kann daher nach dem Pica schen Theorem durch doppelt-periodische Functionen der zwe Art dargestellt werden. Um das Integral zu erhalten, wird nächst die Gleichung durch die Substitution

$$y = z sn^{-\mu}x cn^{-\mu'}x dn^{-\mu''}x = z\cdot H$$

in die Gleichung für z

$$z'' + \frac{2H'}{H}z' = z\Big[(n-\theta+1)\ (n+\theta)\ k^2sn^2x+h_1\Big]$$

transformirt, wo $\theta = \mu+\mu'+\mu''$, und h_1 eine von h verschie Constante bezeichnet, und nach der von Herrn Hermite Brioschi's Ann. (2) IX. 21. (s. F. d. M. X. 1878. p. 235) gegeb Methode die Gleichung dritter Ordnung betrachtet, der das duct u zweier Integrale genügt. Diese Gleichung muss als ticuläre Lösung eine ganze rationale Function von sn^2x zulas Ist dieselbe bestimmt, so vollzieht sich die in Rede steh Integration ohne Schwierigkeit. Hr.

F. Brioschi. Sur une application du théorème d'Ab C. R. XCIV. 686-691.

In einer früheren Note (C. R. XCII. 325. s. F. d. M. XIII. p. 257) hatte der Verfasser gezeigt, wie man das Abel'sche The

r Lösung der Lamé'schen Gleichung in ihrer ganzen Allgemein-it benutzen kann. In dieser Note werden für den Fall, dass der rameter n ungrade ist, aus den dort gegebenen Formeln einige onsequenzen gezogen, die für $n = 3$ zu den von Herrn Hermite den C. R. (s. Bericht in diesem Bande) veröffentlichten Resulten führen. Bemerkenswert ist, dass mittelst der im allgemeinen alle zwischen $sn^2\omega$ und h bestehenden Relation ein hyperellipsches Integral der $(n-1)^{\text{ten}}$ Klasse auf ein elliptisches Integral ster Gattung zurückgeführt wird. Hr.

. J. Hollman. Eenige toepassingen van de theorie der singuliere integralen bij differentiaal-vergelijkingen van de tweede orde. Nieuw Arch. VIII. 23-56.

Die Arbeit erstreckt sich auf einige Anwendungen der heorie der singulären Integrale bei Differentialgleichungen der weiten Ordnung. Eine Uebersicht dieser Theorie geht voraus. abei wird gezeigt, wie die singulären Integrale gefunden werden önnen, sowohl aus der Gleichung selbst, als aus dem allgemeinen ntegral.

Als Anwendungen werden folgende Aufgaben behandelt. 1. Eine bene Curve zu bestimmen, bei der der Inhalt der rechtwinkigen Dreiecke, welche durch die Coordinaten der Mittelpunkte ler Krümmungskreise bestimmt sind, gleich einer gegebenen Constanten ist. 2. Eine Curve von der Eigenschaft zu bestimmen, dass, wenn man aus den Mittelpunkten einiger Krümmungskreise Gerade nach zwei festen Punkten zieht, die Summe der Quadrate dieser Linien constant sei. 3. Eine ebene Curve zu bestimmen, deren Krümmungskreise so liegen, dass das Rechteck, welches durch die Coordinaten des Mittelpunktes eines Krümmungskreises bestimmt wird, gleich sei dem Quadrate des Radius dieses Kreises. 4. Eine Art von Curven zu bestimmen, bei denen die Länge der Krümmungskreise und die Lage der Mittelpunkte der Krümmungskreise in bestimmter Weise von einander abhängen. Weiter wird untersucht und durch Beispiele erläutert, auf welche Weise die Theorie der singulären Integrale zusammen-

hängt mit der Abwickelung der Curven, und schliesslich auch die umgekehrte Aufgabe gelöst, wie man nämlich eine Differentialgleichung der zweiten Ordnung aufstellen kann, welche eine gegebene Gleichung zum singulären Integral hat. G.

S. Spitzer. Neue Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. Zweite Fortsetzung. Wien Gerold's Sohn.

Diese Fortsetzung beginnt mit dem 11ten Abschnitt, in welchem zunächst die Gleichung

$$y''' = xy' + ny$$

betrachtet wird. Dieselbe lässt sich stets nach der Laplace'schen Methode durch ein bestimmtes Integral lösen. Für ein positives ganzzahliges n ist der integrirende Factor eine ganze Function von x. Mit Hülfe desselben erhält man durch Integration Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die für $n = 1, 2, \dots, 5$ aufgestellt werden und offenbar mit der obigen integrirbar sind. Auf gleiche Weise wird mit der allgemeineren Gleichung

$$y''' = x^m (xy' + ny)$$

vorgegangen. Im 12ten Abschnitt wird gezeigt, dass die Gleichung

$$(a_3 + b_3 x)y''' + (a_2 + b_2 x) y'' + (a_1 + b_1 x)y' + (a_0 + b_0 x)y = 0$$

unter einer gewissen Bedingung, die die Coefficienten a, b erfüllen müssen, einen integrirenden Factor von der Form $(n+x)$ zulasse. Die Integration ergiebt wiederum Differentialgleichungen 2ter Ordnung, deren Integration mit der der ursprünglichen gegeben ist. Der 13te (letzte) Abschnitt enthält verschiedene Bemerkungen, die in keinem Zusammenhang mit einander stehen. Die Zurückführung der Integration von Differentialgleichungen der Form

$$xy^{(n)} - \lambda(m+n-1)y^{(n-1)} = x^m y$$

auf die der Gleichung $y^{(n)} = x^{m-1}y$; die Angabe der Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung 3ter Ordnung mit ihrer Multiplicatorgleichung identisch ist, endlich die Construction

ntialgleichung 2ter Ordnung, deren Integrale die beiden
ln einer quadratischen Gleichung in y, resp. $y^{(n)}$ sind.

Hr.

Escherich. Ueber die Gemeinsamkeit particulärer
egrale bei zwei linearen Differentialgleichungen.
n. Denkschr. XLVI. 61-82.

nd

$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0;\quad f=b_0y^{(m)}+b_1y^{(m-1)}+\cdots+b_my=0$

homogene Differentialgleichungen n^{ter} und m^{ter} Ordnung
en x und y, so erhält man unmittelbar in dem Verschwinden
terminante R des nach $y, y', \dots, y^{(m+n-1)}$ linearen Systems
$+n$ Gleichungen

), $F'=0,\dots, F^{(m-1)}=0;\ f=0,\ f'=0,\dots, f^{(n-1)}=0$

twendige Bedingung, dass die beiden gegebenen Diffe-
gleichungen ein particuläres Integral gemeinsam haben.
iese Bedingung auch hinreichend ist, wird aus der Um-
g von R in

$$R=a_0^m e^{\int\frac{a_1}{a_0}dx}\Sigma\pm f(y_1)f'(y_2)\dots f^{(n-1)}(y_n)$$

t, wo $y_1,\dots,y_n$ ein Fundamentalsystem particulärer Inte-
von $F=0$ darstellen. Aus dem Verschwinden der Func-
eterminante folgt nämlich, dass die f von einander linear
ig sind, also die Gleichung besteht:

$c_1f(y_1)+c_2f(y_2)+\cdots+c_nf(y_n)=f(c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n)$.

tegral $y=c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ der Gleichung $F=0$ genügt
h auch der Gleichung $f=0$. Die Bedingung für das
densein von k, und nur k gemeinsamen Integralen wird
n durch das simultane Verschwinden der Grössen:

$$\frac{\partial^\mu R}{[\partial a_n^{(m-\mu)}]^i\,[\partial a_{n-1}^{(m-\mu)}]^{\mu-i}}\qquad \begin{matrix} i=0,\ 1,\dots,\mu \\ \mu=0,\ 1,\dots,k-1\end{matrix}$$

ohne dass eine dieser Grössen für $\mu=k$ verschwindet.
eren eingeklammerten Indices bedeuten Differentiations-
. Die Gleichung der gemeinsamen Integrale lautet dann

in symbolischer Bezeichnung

$$\left[\frac{\partial R}{\partial a_n^{(m-k)}} z - \frac{\partial R}{\partial a_{n-1}^{(m-k)}}\right]^k = 0.$$

Es wird noch bemerkt, dass im Falle der Differentialgleichung constanten Coefficienten R in die Resultante der zugehörigen braischen Gleichungen übergeht, die Kriterien für die Anzahl gemeinsamen particulären Integrale ferner in die über die A der gemeinsamen Wurzeln der algebraischen Gleichungen. den Anwendungen, die an die vorhergehenden Entwickel geknüpft werden, erscheint uns der Hinweis bemerkenswert man die Frage, ob eine vorgelegte lineare Differentialglei eine ganze rationale Function n^{ten} Grades als Integral besitz die andere zurückführen kann, ob es eine ganze positive giebt, für welche die gegebene Gleichung mit der Gleichung $y^{(\nu}$ ein gemeinsames Integral hat. Als Beispiele hierfür werd Differentialgleichungen der Kugelfunctionen $P^{(n)}(x)$ und der geometrischen Reihe behandelt. Zum Schluss wird die nach der Gemeinsamkeit eines Integrals bei zwei vollstä linearen Differentialgleichungen auf den Fall zweier hom linearer Differentialgleichungen zurückgeführt. H

H. Poincaré. Sur une classe d'invariants relatif équations linéaires. C. R. XCIV. 1402-1405.

Sind zwei lineare Differentialgleichungen

$$y^{(m)} + P_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + P_1 y' + P_0 y = 0,$$
$$y^{(m)} + P'_{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + P'_1 y' + P'_0 y = 0$$

gegeben, worin die Coefficienten P und P' rationale Func der Variablen x und z sind, während diese durch eine braische Relation $f(x, z) = 0$ verbunden sind, so nennt de fasser die beiden Gleichungen zu derselben Familie g wenn das allgemeine Integral der zweiten in der Form

$$\varDelta(Q_{m-1} y^{(m-1)} + Q_{m-2} y^{(m-2)} + \cdots + Q_1 y' + Q_0 y)$$

dargestellt werden kann, wo die Q rationale Functionen und z sind, $\varDelta$ eine beliebige Function dieser Variablen das allgemeine Integral der ersten Gleichung bezeichnet.

Voraussetzung, dass die Functionen P und P' von bestimmten Graden sind, giebt es gewisse Functionen ihrer Coefficienten, die für alle Gleichungen derselben Familie den nämlichen Wert haben. Diese werden „Invarianten der Familie" genannt. Wie man dieselben bestimmen kann, wird an dem einfachen Beispiele der Gleichung $y'''+\theta y = 0$, wo θ eine rationale Function von x bezeichnet, andeutungsweise gezeigt. Hr.

H. Lemonnier. Conditions pour que deux équations différentielles linéaires sans second membre aient p solutions communes. Équation qui donne ces solution. C. R. XCV. 476-479.

Sind $F=0$, $f=0$ zwei rationale homogene Differentialgleichungen resp. m^{ter} und n^{ter} Ordnung für y als Function von x, die p verschiedene gemeinsame Lösungen haben sollen, so betrachte man das System von $m+n-2p+2$ Gleichungen

(1) $f=0,\ f'=0,\dots,f^{(m-p)}=0,\ \ F=0,\ F'=0,\dots,F^{(n-p)}=0.$

Die Elimination der $m+n-2p+1$ Grössen $y^{(p)}, y^{(p+1)},\dots, y^{(m+n-p)}$ führt zu einer linearen Gleichung zwischen $y, y',\dots, y^{(p-1)}$, die als eine lineare Differentialgleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für p verschiedene Werte von y nur dann bestehen kann, wenn die Coefficienten von $y, y',\dots, y^{(p-1)}$ einzeln verschwinden, was die gesuchten p Bedingungsgleichungen ergiebt. Das System von $m+n-2p$ Gleichungen, das aus (1) hervorgeht, wenn man $f^{(m-p)}=0$ und $F^{(n-p)}=0$ weglässt, wird nach den Grössen $y^{(p)},\dots,y^{(m+n-p-1)}$ aufgelöst werden können, falls nicht die Determinante $\varDelta$ der Coefficienten dieser Grössen gleich Null ist. Man erhält so in dem Ausdrücke von $y^{(p)}$ als lineare homogene Function von $y, y',\dots, y^{(p-1)}$ die Differentialgleichung p^{ter} Ordnung, der die p gemeinsamen Lösungen genügen. Die obigen p Bedingungsgleichungen, vereint mit der Ungleichung $\varDelta \gtrless 0$, stellen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dar, dass p und nur p gemeinsame Lösungen existiren. Das hier eingeschlagene Verfahren hat vor demjenigen des Herrn von Escherich (siehe das Referat

p. 281) offenbar den Vorzug, dass für $p>1$ mit einem S
von weniger Gleichungen ($m+n-2p+2$ statt $m+n$) operirt
Hr

H. Poincaré. Sur les points singuliers des équa
différentielles. C. R. XCIV. 416-418.

In den simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

seien X, Y, Z ganze Polynome in x, y, z. Die Raumcurve
durch diese Gleichungen definirt werden, nennt der Ver
Charakteristiken. Im Allgemeinen geht durch jeden Punl
Raumes eine und nur eine Charakteristik. Eine Ausnahme
die gemeinschaftlichen Punkte der drei Flächen

$$(1) \qquad X=0,\; Y=0,\; Z=0.$$

Das Verhalten der Charakteristiken hinsichtlich des Durchg
durch diese singulären Punkte hängt von der Beschaffenh
Wurzeln der folgenden Gleichung in S ab:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}-S & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y}-S & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z}-S. \end{vmatrix}=0.$$

Die singulären Punkte werden nach der Realität und den
zeichen der Wurzeln in vier Arten unterschieden. In de
sondern Falle, dass die drei Flächen (1) eine Curve g
schaftlich haben, werden die Punkte dieser singulären
ebenfalls nach der Beschaffenheit der Wurzeln der ihnen
hörigen Gleichung in S in drei Arten gesondert. Die Bog
singulären Linie, welche Punkte derselben Art enthält, sin
den benachbarten Bogen durch Punkte getrennt, die Sin
täten höherer Ordnung besitzen. I

Poincaré. Sur l'intégration des équations différentielles par les séries. C. R. XCIV. 577-579.

Es handelt sich um die Möglichkeit, jedes System simultaner ·ebraischer Differentialgleichungen durch Reihen zu integriren, für alle reellen Werte der Variabeln convergiren. Man kann solches System auf die Form bringen:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n},$$

$X_1,\dots,X_n$ ganze Polynome in $x_1,\dots,x_n$ sind. Führt man eine ılfsvariable s ein, die durch die Differentialgleichung

$$\frac{dx_k}{X_k}=\frac{ds}{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2}$$

inirt ist, so lässt sich, wie der Verfasser ohne Beweis mitteilt, ts eine Zahl α der Art finden, dass $x_1,\dots,x_n$ in Reihen geInet nach Potenzen von $(e^{\alpha s}-1):(e^{\alpha s}+1)$ dargestellt werden nnen, die für alle reellen Werte von s convergiren. Die efficienten sind rationale Functionen der Zahl α, der Coeffinten der Polynome X und der Anfangswerte der Variablen, dass für reelle s auch die Werte für die x reell werden. Eine sondere Wichtigkeit hat der Satz in den Anwendungen auf die eichungen der Mechanik, da hiernach die Reihen für die ıriabeln des Systems für alle reellen Werte der Zeit converren würden. Hr.

J. Sylvester. On a certain integrable class of differential and finite difference equations. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Mitteilung des Verfassers über eine particuläre Lösung ner gewissen Klasse von Differenzen- und Differentialgleichun- ːn, worüber in dem vorigen Bande dieses Jahrbuches p. 287 ːrichtet ist. Hr.

J. Sylvester. Note on the theory of simultaneous linear differential or difference equations with constant coefficients. Sylv., Am. J. IV. 321-327.

Es stelle das System

$$(\varphi_1\delta_t)u_1+(\varphi_2\delta_t)u_2+\cdots+(\varphi_n\delta_t)u_n=0,$$
$$(\psi_1\delta_t)u_1+(\psi_2\delta_t)u_2+\cdots+(\psi_n\delta_t)u_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\omega_1\delta_t)u_1+(\omega_2\delta_t)u_2+\cdots+(\omega_n\delta_t)u_n=0$$

in symbolischer Gestalt ein System von n linearen Differentialgleichungen oder Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten für $u_1,\ldots,u_n$ als Functionen von t dar, worin jedes der $\varphi, \psi,\ldots,\omega$ eine ganze rationale Function von δ_t bezeichnet, und $\delta_t^k u$ im ersten Falle durch den Differentialquotienten $\frac{d^k u}{dt^k}$, im 2ten durch den Wert $(u)_{t+k}$ zu ersetzen ist. Dann lautet die algebraische Gleichung, von der die Integration des Systems abhängt:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(h), \varphi_2(h), \ldots, \varphi_n(h) \\ \psi_1(h), \psi_2(h), \ldots, \psi_n(h) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \omega_1(h), \omega_2(h), \ldots, \omega_n(h) \end{vmatrix} = 0.$$

Sind $h_1, h_2,\ldots,h_\sigma$ ihre Wurzeln, dann sind die u lineare Functionen von $e^{h_1 t},\ldots,e^{h_\sigma t}$, resp. von $h_1^t,\ldots,h_\sigma^t$. Hiervon wird Anwendung gemacht auf das Problem der iterativen Substitutionen. Um die Coefficienten der i^{ten} Potenz der Substitution

$$\begin{vmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{vmatrix}$$

zu finden, hat man die Differentialgleichungen

$$u_i = au_{i-1}+\alpha v_{i-1},$$
$$v_i = bu_{i-1}+\beta v_{i-1}$$

aufzulösen. u_i, v_i fallen, wenn $u_0=1$, $v_0=0$, mit a_i, b_i, wenn $u_0=0$, $v_0=1$, mit α_i, β_i zusammen, wo

$$\begin{vmatrix} a_i & \alpha_i \\ b_i & \beta_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}^i.$$

Die zugehörige algebraische Gleichung lautet hier:

$$\begin{vmatrix} -\varrho+a, & \alpha \\ b\quad, & -\varrho+\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Sind die Wurzeln reell, so nähert sich

$$\varphi^i(x) = \frac{a_i x+\alpha_i}{b_i x+\beta}$$

r $i = \infty$ einer festen Grenze. Sind sie imaginär und so, dass $= \varrho_2^i$, was erfordert, dass $(a+\beta)^2 = 4(a\beta - \alpha b)\cos\left(\frac{\lambda\pi}{i}\right)^2$ r einen ganzzahligen Wert von λ ist, dann ist $\varphi^i(x) = x$. In nlicher Weise lassen sich die analogen Fragen bei Substitunen höherer Ordnung behandeln, was aber nicht näher ausführt wird. Hr.

Capitel 6.
Partielle Differentialgleichungen.

B. Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Vorlesungen, herausgegeben von Karl Hattendorf. 3[te] Aufl. Braunschweig. Vieweg u. Sohn.

Diese neue Auflage ist ein einfacher, im Einzelnen durchgesehener Abdruck der zweiten Auflage des bekannten Werkes. T.

S. Lie. Untersuchungen über Differentialgleichungen. I. Christiania Forh. 1882. No. 21, 1-12.

Diese Note zerfällt in mehrere Teile. Zuerst werden alle Flächen bestimmt, deren Haupttangentencurven (des einen Systems oder beider Systeme) linearen Liniencomplexen angehören. Dieses interessante Problem deckt sich im Uebrigen mit der Bestimmung aller Flächen mit sphärischen Krümmungslinien. Es wird dann versucht nachzuweisen, dass alle Flächen, die aus einer vorgelegten Fläche constanter Krümmung durch successive Anwendung von Bianchi's Operation hervorgehen, dieselben unendlich entfernten Punkte besitzen. Da indess zwei unendlich entfernte Punkte eine unbestimmte Distanz (und also nicht wie in der

Note angenommen eine unendliche Distanz) haben, so ist der Nachweis nicht definitiv, wenngleich der betreffende Satz wahrscheinlicherweise richtig ist. Die von Schur gegebene Abbildung des linearen Complexes im Punktraum, bei der eine Fläche zweiten Grades als Fundamentalgebilde auftritt, giebt eine Berührungstransformation, bei der Haupttangentencurven in nicht-euklidische Krümmungslinien übergehen. Der Schluss der Note beschäftigt sich mit der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten. L.

S. Lie. Untersuchungen über Differentialgleichungen. II. Christiania Forh. No. 22.

Die lineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial z}+(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)\frac{\partial f}{\partial x_1}+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)\frac{\partial f}{dx_2}$$
$$+(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3)\frac{\partial f}{dx_3}$$

gestattet, wenn die a_k, b_k, c_k beliebige Functionen von z bezeichnen, eine bemerkenswerte geometrische Interpretation. Betrachtet man nämlich x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten eines Punktes in einer Ebene, welche einfach unendlich viele (parallele) Lagen $z=$ const. annimmt, so schneidet jede Integralfläche

$$\Omega\left(\frac{x_1}{x_3},\ \frac{x_2}{x_3},\ z\right)=0$$

die Ebenen $z=$ const. nach projectivischen Curven. Kennt man daher eine einzige Integralfläche, so findet man im Allgemeinen das vollständige Integral durch Differentiation. Dies gelingt immer, wenn die besprochenen Schnittcurven keine infinitesimale und lineare Transformation in sich gestatten. Tritt dieser Ausnahmefall ein, so ist eine Quadratur erforderlich und hinreichend, wenn die Schnittcurven keine Kegelschnitte sind. In diesem speciellen Falle ist die Integration einer Riccati'schen Gleichung 1[ter] Ordnung erforderlich.

Eine verwandte ebenfalls fruchtbare Interpretation erhält man, indem man x_1, x_2, x_3 als homogene Punktcoordinaten einer Ebene, z als die Zeit auffasst. Diese Interpretation, die sich a

nsionen erweitern lassen, spielen eine fundamentale Rolle Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine conhe Gruppe von Transformationen gestatten. L.

ERSEN. Partielle Differentialligninger. Zeuthen T. (4) -4.

nerkung über die Darstellung der Lösung der partiellen tialgleichung $Pp+Qq=R$. Gm.

IGSBERGER. Ueber eine Eigenschaft der partiellen rentialgleichungen. Klein Ann. XX. 587-594.

alog der fundamentalen Frage der Algebra nach den Been, unter welchen sämmtliche Wurzeln einer Gleichung weiten Gleichung genügen, vorausgesetzt, dass es eine tut, handelt es sich im vorliegenden Aufsatze darum, llen, wann sämmtliche particuläre Integrale einer par-Differentialgleichung erster Ordnung mit einer abhängigen ei unabhängigen Variablen

$$f\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

eine rationale Function der Argumente verstanden) einer ebensolchen

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$$

, falls diese beiden Gleichungen überhaupt ein particuegral gemein haben. Das Verfahren zur Aufsuchung des gemeinsamen Teilers ergiebt als hinreichende Bedingungen 1) f muss in Bezug auf die Differentialquotienten nach n Variablen in algebraischem Sinne irreductibel, und 2) gemeinsam vorausgesetzte Integral so beschaffen sein, nicht einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1ter Ordach der anderen unabhängigen Variablen genügt, in die erste unabhängige Variable algebraisch enthalten ist. sultat ist weiterer Ausdehnungen fähig. Hat man an

Stelle der zweiten Gleichung $F = 0$ eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, so tritt in der zweiten der obigen Bedingungen an Stelle der gewöhnlichen Differentialgleichung 1ter Ordnung eine solche m^{ter} Ordnung. Noch allgemeiner: Liegen zwei partielle Differentialgleichungen μ^{ter}, resp. ν^{ter} Ordnung vor, und haben dieselben ein Integral gemein, enthält ferner für $\nu \geqq \mu$ die erste derselben den Differentialquotienten μ^{ter} Ordnung nach der einen Variablen in der Weise, dass sie in Bezug auf diesen in algebraischem Sinne irreductibel ist, während das gemeinsame Integral der Bedingung unterliegt, nicht einer partiellen Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung zu genügen, in welcher die partiellen Differentialquotienten, nach jener einen Variablen genommen, die μ^{te} Ordnung nicht erreichen, so wird die Gleichung μ^{ter} Ordnung alle Integrale mit der Gleichung ν^{ter} Ordnung gemein haben.

Dieselbe Bedingung ist auch dafür hinreichend, dass, falls zwischen einem Integrale z_1 einer partiellen Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung und einem Integrale z_2 einer solchen ν^{ter} Ordnung $(\nu \geqq \mu)$ eine algebraische Beziehung besteht, (in welche auch die unabhängigen Variablen und die partiellen Ableitungen von z_1 und z_2 nach denselben eintreten dürfen), jene algebraische Relation auch erhalten bleibt, wenn man für z_1 ein willkürliches Integral der Gleichung μ^{ter} Ordnung setzt, vorausgesetzt, dass für z_2 ein passendes Integral der Gleichung ν^{ter} Ordnung substituirt werde.

T.

E. Picard. Sur l'intégration, par les fonctions abéliennes, de certaines équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. XCIV. 1036-1038.

Briot und Bouquet haben den Fall untersucht, wo die Differentialgleichung $f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$ doppelt-periodische Functionen zu Integralen hat. Analog kann man sich die Aufgabe stellen, unter f eine ganze Function der Argumente verstanden, die partielle Differentialgleichung $f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ unter der Bedingung zu behandeln, dass sie Abel'sche Functionen der beiden Variabeln

und *y* als Integrale besitze. Die vorliegende Note liefert einen itrag zur Lösung dieses schwierigen Problems, indem gezeigt rd, wie man unter der gemachten Voraussetzung aus der gebenen partiellen Differentialgleichung ein System von zwei alen Differentialgleichungen herleiten kann, welche die gehten Lösungen liefern. T.

Picard. Sur une classe de fonctions uniformes de deux variables indépendantes. C. R. XCV. 594-597.

Die vorliegende Note giebt Andeutungen über Verallgemeinungen der wichtigen Untersuchungen des Herrn Poincaré über wisse eindeutige Functionen (C. R. 1881 und Klein Ann. XIX. 3 ff., cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 247 ff.) auf den Fall zweier riabeln. Poincaré hat gezeigt, dass jede Fuchs'sche Function rch Umkehrung des Quotienten zweier Integrale von gewissen earen gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung it algebraischen Coefficienten erhalten werden kann. Geht an in analoger Weise von zwei linearen partiellen Differentialeichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln und *y* aus, und besitzen dieselben drei gemeinschaftliche lear unabhängige Lösungen ω_1, ω_2, ω_3, so führt der Fall, wo e Gleichungen $\frac{\omega_2}{\omega_1} = u$, $\frac{\omega_3}{\omega_1} = v$ für x und y eindeutige Funcionen von u und v liefern, auf Functionen zweier Variabeln, e den Fuchs'schen Functionen entsprechen. Dies wird an einem eispiel erläutert. Nachdem auf diese Weise die Existenz von ndeutigen Functionen von zwei Variabeln nachgewiesen ist, elche für eine Gruppe von linearen Substitutionen ungeändert eiben, kann man umgekehrt und dem Gange der Poincaré'schen rbeiten entsprechend von der Untersuchung jener linearen Subitutionen ausgehen. Hier stellt sich ein wesentlicher Unterhied zwischen dem Falle einer und dem zweier Variabeln heris; während zu jeder „discontinuirlichen“ Gruppe im Falle ner Veränderlichen eine Fuchs'sche Function gehört, giebt es in m Falle zweier Variabeln nicht immer eindeutige Functionen,

welche durch die Substitutionen der Gruppe ungeändert gelass werden. Indem sich der Verfasser vorbehält, auf diesen Pun noch zurückzukommen, beschränkt er sich in der vorliegend Note auf die Betrachtung einer speciellen Gruppe (cf. C. R. Mä 1882., s. diesen Bd. Abschn. VII. Cap. 1), die auf derartige Function führt; zwischen dreien dieser Functionen besteht eine algebrais Relation, und es lässt sich zeigen, dass es stets zwei linea partielle Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficient giebt, welche drei gemeinsame Integrale besitzen und durch U kehrung der Quotienten dieser Integrale irgend zwei jener Fu tionen liefern.

T.

M. Hamburger. Zur Theorie der Integration eines Syste von n nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhä gigen Veränderlichen. Kronecker J. XCIII. 188-215.

In einem früheren Aufsatze (Borchardt J. LXXXI. p. 243 cf. F. d. M. VIII. 1876 p. 203ff.) hat der Herr Verfasser die I gration eines Systems von n linearen partiellen Differentialg chungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhän gen Veränderlichen und im Anschluss daran die Integration ei speciellen Klasse nicht linearer partieller Differentialgleichun unter gewissen Bedingungen auf die von Systemen totaler Di rentialgleichungen zurückgeführt. In der vorliegenden Arbeit sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, auch die Integration ei allgemeinen Systems von n nicht linearen partiellen Differen gleichungen erster Ordnung mit den unabhängigen Varia x, y und den n abhängigen $z_1, \dots, z_n$

$$(1) \qquad f_i(x, y, z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = 0$$

$$\left(i = 1, \dots, n, \quad p_k = \frac{\partial z_k}{\partial x}, \quad q_k = \frac{\partial z_k}{\partial y}\right)$$

zurückzuführen auf die Integration von unvollständigen Systen totaler Differentialgleichungen. Da dies Problem darauf hina kommt, folgendes System von $3n$ linearen partiellen Differen gleichungen zwischen den Veränderlichen x, y und den als Fu

n derselben zu betrachtenden Variabeln $z_1,\dots,z_n,\ p_1,\dots,p_n,$ $.., q_n$:

$$\begin{cases} \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial x}+\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial y}\right) = -\frac{\partial f_i}{\partial x}-\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k}p_k, \\ \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial q_k}{\partial x}+\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial y}\right) = -\frac{\partial f_i}{\partial y}-\sum_k \frac{\partial f_i}{\partial z_k}q_k, \\ \sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial p_k}\frac{\partial z_k}{\partial x}+\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_k}{\partial y}\right) = \sum_k \left(p_k\frac{\partial f_i}{\partial p_k}+q_k\frac{\partial f_i}{\partial q_k}\right), \end{cases}$$
$$(i,\ k=1,\dots,n)$$

itegriren, so ist die l. c. entwickelte Integrationsmethode so- anwendbar, und zwar führt dieselbe in dem vorliegenden , statt wie im Allgemeinen bei einem System von $3n$ linearen ellen Differentialgleichungen auf $3n$ Systeme von je zwei, auf n Systeme von je $n+3$ totalen Differentialgleichungen hen $3n+2$ Veränderlichen. Ist μ eine Wurzel der Gleichung

$$\varphi(\mu) \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1}-\mu\frac{\partial f_1}{\partial p_1}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial q_1}-\mu\frac{\partial f_n}{\partial p_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial q_n}-\mu\frac{\partial f_1}{\partial p_n}, & \dots, & \frac{\partial f_n}{\partial q_n}-\mu\frac{\partial f_n}{\partial p_n} \end{vmatrix} = 0,$$

ind $l_1,\dots,l_n$ n Grössen, proportional den Unterdeterminanten llemente einer Horizontalreihe dieser Determinante, so lautet lieser Systeme:

$$\begin{cases} dy = \mu\,dx,\ dz_1 = (p_1+q_1\mu)dx,\dots,dz_n = (p_n+q_n\mu)\,dx, \\ \sum_{i,k} l_i\frac{\partial f_i}{\partial p_k}dp_k = -dx\sum_i l_i\frac{df_i}{dx}, \\ \sum_{i,k} l_i\frac{\partial f_i}{\partial p_k}dq_k = -dx\sum_i l_i\frac{df_i}{dy}, \end{cases}$$

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x}+\sum_k\frac{\partial f_i}{\partial z_k}p_k,\quad \frac{df_i}{dy} = \frac{\partial f_i}{\partial y}+\sum_k\frac{\partial f_i}{\partial z_k}q_k \text{ sein soll}\Big).$$

isgesetzt, dass die Wurzeln der Gleichung $\varphi(\mu)=0$ sämmtlich inander verschieden sind, und dass jedes der für diese Wur- sich ergebenden Systeme (3) je ein Integral $r_k = c_k$ zulässt, stimme man aus diesen n Integralgleichungen und den n ge-

gebenen Gleichungen $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ die $2n$ Grössen $p_1, \dots,$ $q_1, \dots, q_n$ als Functionen von $x, y, z_1, \dots, z_n$; dann bilden Gleichungen

$$dz_i = p_i dx + q_i dy \qquad (i = 1, \dots$$

ein integrables System, dessen Integration $z_1, \dots, z_n$ als Functionen von $x, y, c_1, \dots, c_n$ und n neuen Constanten liefert, und die Functionen stellen die vollständige Lösung des Systems (1) $2n$ Constanten dar. Ist $w_k =$ const. ein zweites von $v_k = c_k$ verschiedenes Integral des ein und derselben Wurzel μ_k entsprechenden Systems (3), und bedeutet $\psi_k(v_k, w_k)$ eine willkürliche Function von v_k und w_k, so ergeben in derselben Weise, wie oben Gleichungen $v_k = c_k$, $f_k = 0$, die $2n$ Gleichungen

$$\psi_k = 0, \; f_k = 0 \qquad (k = 1, \dots$$

die allgemeine Lösung des Systems (1) mit n willkürlichen Functionen.

Analog, wie das in der citirten Abhandlung gegebene Verfahren auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei abhängigen Variablen angewendet wird, wird in einem zweiten Abschnitte der vorliegenden Abhandlung nach einer ähnlichen Methode, wie der oben angegebenen, die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen einer abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln auf die Integration von Systemen totaler Differentialgleichungen zurückgeführt. Die Resultate stimmen für $n = 2$ mit denjenigen überein, Herr Darboux (Ann. de l'Ec. Norm. VII. 163—173) auf anderem Wege erhalten hat. T.

G. Darboux. Sur le problème de Pfaff. C. R. X 835-837; Darb. Bull. (2) VI. 14-36, 49-68.

Pfaff fand bekanntlich die Reduction des Differentialausdrucks

$$(1) \qquad \theta_d = X_1 dx_1 + \cdots + X_n dx_n$$

auf eine gewisse canonische Form und gab damit zugleich erste Methode für die Integration einer partiellen Differe

ichung erster Ordnung mit einer beliebigen Anzahl unabhän-
er Veränderlichen. Diese Methode erschien gegenüber den
tter von Cauchy und Jacobi veröffentlichten Methoden zur
sung desselben Problems dadurch im Nachteil, dass sie die
egration mehrerer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen
orderte, während die genannten Mathematiker nachwiesen, dass
Integration des ersten dieser sogenannten Pfaff'schen Systeme
r Lösung der partiellen Differentialgleichung ausreicht. Dies
t nach der Meinung des Verfassers die Folge gehabt, dass die
aff'sche Methode lange Zeit vernachlässigt worden ist. Da sie
less in anderer Beziehung wesentliche Vorteile bietet, so be-
sichtigt der Verfasser durch eine neue Darstellung der Theorie
Pfaff'schen Problems zu zeigen, dass die Pfaff'sche Methode,
ssend angewendet, ebenso einfach wie die anderen wird, und
s insbesondere der Differentialausdruck, der einer partiellen
ferentialgleichung erster Ordnung entspricht, vermittelst der
inigen Integration des ersten Pfaff'schen Systems auf die
onische Form reducirt werden kann. Es ist offenbar dem
fasser entgangen, dass bereits Herr Natani in seiner 1860 in
lle's Journal erschienenen Abhandlung: „Ueber totale und
tielle Differentialgleichungen" (siehe auch das Mathematische
rterbuch von Natani, besonders abgedruckt in dem Werke:
e höhere Analysis in vier Abhandlungen", Berlin, Wiegandt
l Hempel 1866) von der Pfaff'schen Darstellungsweise aus-
end, eine sehr einfache Darstellung der in Rede stehenden
eorie gegeben hat, in der dieselbe Auswahl eines besondern
stems unter den Integralen des ersten Pfaff'schen Systems
beim Verfasser, getroffen ist und für die partiellen Differen-
gleichungen insbesondere das erwähnte einfache Resultat sich
eleitet findet. Herr Natani nennt die betrachteten durch ge-
se Eigenschaften ausgezeichneten Integrale „Hauptintegrale"
l bezeichnet Jacobi als denjenigen, der sie zuerst charakterisirt
. Aus einer Bemerkung des Herrn Darboux ersehen wir bei-
ig, dass vorher schon Cauchy diese Integrale betrachtet hat.
Methode des Herrn Darboux ist im Uebrigen dadurch be-
kenswert, dass er unter alleiniger Benutzung der invarianten

Eigenschaft der Pfaff'schen Systeme fast ohne alle Rechnung d
notwendige Form der reducirten Ausdrücke des Differentialau
drucks (1) in allen Fällen ableitet und namentlich die Integr
bilität des ersten Pfaff'schen Systems auch in den Fällen,
die Zahl der von einander unabhängigen Gleichungen gering
als im allgemeinen Falle ist, nachzuweisen im Stande ist,
Punkt, den zuerst Herr Frobenius (Ueber das Pfaff'sche Proble
Borchardt J. Bd. LXXXII.) auf anderem Wege als besond
Fall eines allgemeinen Satzes in directer Weise erledigt ist.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Zunächst wird gezei
dass θ_d stets auf eine der beiden Typen

$$dy - z_1\,dy_1 - \cdots - z_p\,dy_p \text{ (unbestimmter Typus),}$$
$$z_1\,dy_1 + \cdots + z_p\,dy_p \text{ (bestimmter Typus)}$$

zurückgeführt werden kann. Gebraucht man mit dem Verfa
für die Aufstellung des ersten Pfaff'schen Systems die symbolis
Schreibweise

$$(2) \qquad \delta\theta_d - d\theta_\delta = \lambda\theta_\delta\,dt,$$

aus der ihre invariante Eigenschaft unmittelbar hervorgeht, so
der erste Fall ein, wenn die Bestimmung der Verhältnisse
dx_i aus (2) unmöglich ist, so lange λ von Null verschieden
Die Zahl $2p$ ist gleich der Anzahl der verschiedenen Gleichun
auf die sich (2) reducirt, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird, und die d
wie gezeigt wird, stets integrabel sind. Die Variablen y_i un
der reducirten Form sind ihre $2p$ Integrale. Können die
hältnisse der dx_i aus (2) bestimmt werden, wenn λ von
verschieden ist, dann tritt der zweite Fall ein. Die Zahl $2p$
wieder die der verschiedenen Gleichungen, auf die sich (2)
ducirt, und die ebenfalls in allen Fällen integrabel sind.
von t unabhängigen $2p-1$ Integrale sind $y_1, \ldots, y_p, \frac{z_2}{z_1}, \ldots,$
Den Schluss des ersten Teils bildet der Nachweis, dass die
schiedenen Pfaff'schen Systeme, deren Integration zur Herstell
der canonischen Form notwendig ist, durch Einführung der
wähnten Hauptintegrale sich unabhängig von einander aufste
lassen, und dass im Falle der partiellen Differentialgleich
bereits die Integration des ersten Systems die verlangte c

che Form liefert, aus der dann die Lösung der partiellen **ferentialgleichung** sich ergiebt. Der zweite Teil beschäftigt **h** mit den Relationen, die zwischen zwei reducirten Formen **n** (1) stattfinden, und enthält insbesondere den Beweis dreier **ze** des Herrn Lie, die seiner Gruppentheorie zur Basis dienen. **gl.** den Bericht über die betr. Arbeiten des Herrn Lie in diesem **hrbuche** Bd. V. p. 196ff.). Den Ausgangspunkt bildet hier für **n** Fall eines graden n die invariante Eigenschaft der beiden **usdrücke**

$$(\varphi) = \begin{vmatrix} a_{1}, \ldots, a_{n1}, X_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}, \ldots, a_{nn}, X_n \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, 0 \end{vmatrix} : \Delta \text{ und } (\varphi, \psi) = \begin{vmatrix} a_{11}, \ldots, a_{1n}, \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}, \ldots, a_{nn}, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, 0 \end{vmatrix} : \Delta,$$

$$a_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

Δ die Determinante der $a_{i,k}$ und φ, ψ beliebige Functionen r x bedeuten. Ist $n = 2m$ und sind

$$p_1 dx_1 + \cdots + p_m dx_m, \quad P_1 dX_1 + \cdots + P_m dX_m$$

ei reducirte Formen desselben Differentialausdrucks, dann rd

$$(\varphi) = \Sigma p_i \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} = \Sigma P_i \frac{\partial \varphi}{\partial P_i},$$

$$(\varphi, \psi) = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial P_i} \frac{\partial \psi}{\partial X_i} - \frac{\partial \psi}{\partial P_i} \frac{\partial \varphi}{\partial X_i};$$

d indem man diese allgemeinen Gleichungen auf die Funcnen X_i und P_k anwendet, erhält man unmittelbar die bekannten lationen

$$(P_i) = P_i, (X_i) = 0, (P_i X_i) = 1, (P_i X_k) = 0, (X_i X_k) = 0, (P_i P_k) = 0.$$

erauf folgt die Ableitung des Lie'schen Satzes, dass, wenn k abhängige Functionen $X_1, \ldots, X_k$ der unabhängigen Variablen

$x_1, \dots, x_m, p_1, \dots, p_m$ gegeben sind, die den Gleichungen

$$(X_i) = 0, \ (X_i, X_h) = 0$$

genügen, sich stets $2m-k$ andere Functionen $X_{k+1}, \dots, X_m, P_1, \dots$ angeben lassen derart, dass der Identität

$$P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m$$

genügt wird. Daran schliessen sich die Beweise zweier andern Lie'schen Sätze bezüglich der Identitäten

$$dZ - P_1 dX_1 - \dots - P_m dX_m = \varrho(dz - p_1 dx_1 - \dots - p_m dx_m)$$

und

$$P_1 dX_1 + \dots + P_m dX_m + d\Pi = p_1 dx_1 + \dots + p_m dx_m,$$

die dem Falle, dass n ungrade und $= 2m+1$ ist, entsprechen.

Hr.

H. Lemonnier. Intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes. S. M. F. Bull. X. 223-250.

T.

G. Teixeira. Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. Belg. Bul. (3) III. 486-498.

Der Verfasser sucht die drei Bedingungen dafür, dass die partielle Differentialgleichung $Ar + Bs + Ct + D = 0$ ein Integral habe von der Form

$$f(x, y, z, p, q) = \varphi(x, y),$$

wo φ eine willkürliche Function ist. Er reducirt die Integration auch für andere Fälle auf den Fall, wo zwei von einander unabhängige lineare partielle Differentialgleichungen vorhanden sind.

Mn. (O.).

W. L. Glaisher. On a partial differential equation. Brit. Ass. Rep. 1882.

In der Rep. of the Brit. Ass. von 1878 ist bewiesen worden, dass der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 u = \frac{h^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial h^2}$$

genügt wird durch $u = e^{a\sqrt{x^2+2xh}}$. Ihr wird auch genügt durch die Werte

$$u = \int_0^\infty \cos at . \varphi\left(\frac{hx}{x^2+t^2}\right) dt,$$

$$u = \int_0^\infty \frac{x \cos at}{x^2+t^2} \cdot \varphi\left\{h\left(x+\frac{t^2}{x}\right)\right\} dt,$$

$$u = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}a\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)} \cdot \varphi\left(\frac{hx}{t^2}\right) dt.$$

Cly. (O.).

G. Darboux. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. C. R XCV. 69-72.

Für die von Euler, Lagrange, Laplace, Poisson und Riemann behandelte, in der mathematischen Physik und in der Geometrie eine Rolle spielende lineare Differentialgleichnng

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2} z$$

werden die folgenden Eigenschaften angegeben:

1) Sie ändert sich nicht, wenn man x und y gleichzeitig derselben linearen Substitution unterwirft, so dass aus jedem particulären Integral $z = \varphi(x, y)$ ein Integral mit drei willkürlichen Constanten:

$$z = \varphi\left(\frac{mx+n}{px+q}, \frac{my+n}{py+q}\right)$$

folgt. Aus dem particulären Integral

$$z = \left(1-\frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right),$$

das man leicht findet, wenn man diejenigen Lösungen sucht, die nur von der Verbindung $y:x$ abhängen, leitet man daher die allgemeine Lösung

$$\left[\frac{(y-x)(x'-y')}{(y-x')(x-y')}\right]^m F\left(m, m, 1, \frac{(y-y')(x-x')}{(y-x')(x-y')}\right)$$

ab, welche Riemann (Werke p. 162) auf anderem Wege erhalten hat. Die vorliegende Gleichung ist übrigens die einzige unter den linearen, die sich der genannten Eigenschaft erfreut, aus der man ferner schliesst, dass neben $z = \varphi(x, y)$ auch

$$x^i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y^i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

Lösungen der vorliegenden Gleichung sind.

2) Ist z_m eine Lösung der obigen Diffentialgleichung, so ist

$$z_{m+1} = \frac{\partial z_m}{\partial x} - \frac{\partial z_m}{\partial y} - 2m \frac{z_m}{x-y}$$

stets eine Lösung derjenigen Gleichung, die aus jener entsteht, wenn m durch $m+1$ ersetzt wird. Diese zweite Eigenschaft führt auf das allgemeine Integral für den Fall eines ganzen m und reducirt im Falle eines nicht ganzzahligen m die Integration auf den Fall, dass der reelle Teil von m ein positiver echter Bruch ist. Das Integral, welches für diesen Fall angegeben wird, lässt sich, wie der Verfasser bemerkt, als allgemein nachweisen, wenn man ein solches im Falle einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen dadurch definirt, dass die in dem Integral auftretenden willkürlichen Functionen es gestatten sollen, dass die das Integral darstellende Fläche durch eine beliebig vorgegebene Curve gehe und längs derselben eine gegebene Fläche berühre. T.

P. Appell. Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. Darb. Bull. (2) VI. 314-318.

Setzt man in der von Herrn Darboux (cf. das vorhergehende Referat) behandelten Differentialgleichung $z = (x-y)^m . u$, so geht dieselbe in einem speciellen Fall ($\beta = \beta' = m$) in die folgende über:

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}-\beta'\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

auf welche der Verfasser schon früher gestossen ist (C. R. XC.; s. F. d. M. XII. 1880 p. 296). Es wird gezeigt, dass sich die von Darboux für jene angegebenen Eigenschaften auf diese allgemeinere Gleichung übertragen lassen.

Ist $\varphi(x, y)$ eine Lösung, so ist es auch

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b},\ \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

wo a, b, c, d beliebige Constanten sind. Als Lösungen, die nur von $\frac{x}{y}$ abhängig sind, ergeben sich specielle Fälle von

$$x^{-\beta}y^{\mu}F\left(\beta,\mu+\beta',\mu+\lambda,\frac{y}{x}\right)\text{ und }x^{\mu}y^{-\beta'}F\left(\beta',\mu+\beta,\mu+\lambda,\frac{x}{y}\right),$$

(wo λ eine willkürliche Grösse ist), die auch Lösungen sind. Die Methode der unbestimmten Coefficienten ergiebt als Lösung in Form einer Potenzreihe die folgende:

$$u=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\dots(\beta'+n-1)}{m!\,n!}\,\psi(m+n)x^m y^n,$$

wo ψ eine willkürliche Function bedeutet. Eine passende Wahl von ψ liefert die hypergeometrische Reihe mit zwei Variabeln $F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y)$. Ferner kann man ψ so wählen, dass man für u rationale, ganze Functionen in unendlicher Anzahl und von jedem beliebigen Grade erhält. Ist u eine beliebige Lösung der Differentialgleichung, so sind $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ Lösungen der Gleichungen, die man aus jener erhält, wenn β resp. β' um eine Einheit vermehrt wird. Diese Eigenschaft, ferner die Transformation $u=(x-y)^{1-\beta-\beta'}.\,t$ vermitteln die Herstellung des allgemeinen Integrals für ganz beliebige, reelle oder complexe Werte von β und β'. T.

J. Boussinesq. Définition naturelle des paramètres différentiels des fonctions, et notamment de celui du second ordre Δ_2. C. R. XCV. 479-482.

Diese Definition, welche die wichtige Bedeutung z. B. des Parameters $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ für die mathematische Physik hervortreten lassen soll, stützt sich auf den Begriff des (arithmetischen) Mittels. So lässt sich der genannte „Differentialparameter zweiter Ordnung Δ_2 einer Function in einem Punkte" definiren als das Dreifache des Mittels aller Werte des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2}{ds^2}$ der Function, wenn man ihn von jenem Punkte nach allen möglichen Richtungen des Raumes nimmt; oder auch: als das Product des mittleren Zuwachses der Function, wenn man sich von jenem Punkte in allen möglichen Richtungen um eine unendlich kleine Strecke entfernt, in das sechsfache umgekehrte Quadrat dieser Strecke. In ähnlicher Weise ist der Lamé'sche Differentialparameter erster Ordnung

$$\Delta_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2}$$

definirbar.

Umgekehrt lässt sich aber auch der Parameter Δ_2 zur Darstellung des Mittels nicht blos der zweiten, sondern auch der höheren Ableitungen benutzen; es ist nämlich

Mittel von $\frac{d^m f}{ds^m} = 0$ für ein ungrades m

$$\text{und} = \frac{1}{m+1} (\Delta_2)^{\frac{m}{2}} f \text{ für ein grades } m.$$

T.

J. Boussinesq. Sur l'intégration de l'équation
$$A \frac{\partial^n \varphi}{\partial t^n} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots\right)^n \varphi = 0.$$

C. R. XCIV. 514-517.

In einer früheren Note (C. R. t. 94. p. 32; cfr. Abschn. X. Cap. 4. B. dieses Bandes) war gezeigt worden, dass das Integral

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha$$

Eigenschaft hat, seine zweite Ableitung nach x zu liefern, n man f und φ resp. durch f' und φ' ersetzt. Allgemeiner ält man, wie in der vorliegenden Note gezeigt wird, in der-ben Weise aus dem Integral

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha \quad (r^2 = x^2+y^2+\cdots)$$

n Ausdruck

$$\varDelta_2\varphi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\cdots\right)\varphi,$$

ls $p = \frac{2}{2-m}$ ist, wo m die Anzahl der Veränderlichen $x, y, \ldots$ deutet. Auf Grund dessen ergiebt sich aus der citirten Note, s die Functionen

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{\alpha^p}{2}\right)\psi\left(\frac{r^2}{2\alpha^p}\right)d\alpha$$

nd

$$\varphi = \int_0^\infty f\left(t \pm \frac{r^2}{2\alpha^p}\right)\psi\left(\frac{\alpha^p}{2}\right)d\alpha$$

ie partielle Differentialgleichung

$$A\frac{\partial^n\varphi}{\partial t^n}+(\varDelta_2)^n\varphi = 0$$

efriedigen, wenn φ irgend eine der n verschiedenen Lösungen er Differentialgleichung $(\pm 1)^n\psi^{(n)}+A\psi = 0$ bedeutet. (Im Falle $m = 2$, also $p = \infty$, sind α^p durch e^β, $d\alpha$ durch $d\beta$ und die Grenzen urch $-\infty$ und $+\infty$ zu ersetzen). An dieses Ergebnis werden rörterungen über seine Anwendbarkeit geknüpft. T.

K. M. Peterson. Ueber Integration partieller Differentialgleichungen. III. Abhandlung. Mosk. S. X. Lief. 2. (Russisch).

Diese Abhandlung ist der Entwickelung von tiefsinnigen Betrachtungen des verstorbenen Verfassers über die Theorie der ntegration partieller Differentialgleichungen verschiedener Ordnunn mit einer beliebigen Anzahl unabhängiger Veränderlicher ge-

widmet. Die beiden früheren Abhandlungen (Bd. VIII. S. 291 u
Bd. IX. S. 137) beschäftigten sich mit derselben Frage im Fa
zweier unabhängiger Veränderlichen.

Hat man eine Differentialgleichung:

$$(1) \qquad E = d\omega + Xdx + Ydy + Zdz + \cdots = 0$$

zwischen den Veränderlichen $\omega, x, y, z, \ldots$, wo $X, Y, Z,$
irgend welche gegebene Functionen derselben Veränderlichen
zeichnen, und sieht man ω als Function der anderen an, so
man auch eine Gleichung:

$$(2) \qquad d\omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \cdots,$$

wo durch die griechischen Buchstaben die partiellen Derivir
bezeichnet sind. Lässt man nun die Veränderlichen so variir
dass zwischen denselben folgende Gleichungen stattfinden:

$$(3) \qquad A = dy - u\,dx = 0;\; B = dz - v\,dx = 0,\; C = 0, \ldots$$

(u, v beliebige Functionen derselben Veränderlichen), so wird
gegebene Gleichung (1) folgende Gestalt annehmen:

$$E = (\xi + u\eta + v\zeta + \cdots + k)\,dx = 0,$$

wo $k = X + uY + vZ + \cdots$ ist, und also wegen Willkürlichk
von dx in folgende partielle Differentialgleichung übergehen:

$$(4) \qquad F = \xi + u\eta + v\zeta + \cdots + k = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung drückt also dieselbe
hängigkeit zwischen $\omega, x, y, z \ldots$ aus, wie die Gleichung (1),
jetzt auch geschrieben werden kann:

$$(5) \qquad E = d\omega + kdx = 0$$

unter den Bedingungen, die durch die Gleichungen (3)
gedrückt sind. Darum unterscheidet der Verfasser drei A
von Gleichungen, mit denen man bei Integration partieller Di
rentialgleichungen zu thun hat: 1) unbedingte Gleichungen,
(2), die aus dem Begriff der Function mehrerer Veränderlic
folgen; 2) bedingte Gleichungen wie (5), die unter den Be
gungen (3) stattfinden, und 3) die Bedingungsgleichungen
selbst. Dieselben drei Arten von Gleichungen begegnen uns a
bei der Integration linearer partieller Gleichungen von höhe
Ordnungen. Diese Einteilung der Gleichungen in drei Arten

..rch ihr verschiedenes Verhalten zu einander bei der Integration .. Systems bedingt.

Vergleicht man die allgemeinste lineare Gleichung n^{ter} Ord-..ng $F=0$ mit m unabhängigen Veränderlichen mit derjenigen, welche die Differentialgleichung

(6) $$E = Pdp + Qdq + \cdots + Xdx + Ydy + Zdz + \cdots = 0,$$

.. $p, q, \ldots$ die Derivirten bis zur $(n-1)^{ten}$ Ordnung bezeichnen, ..ch der Elimination der $dp, dq, \ldots$ mit Hülfe der Gleichungen

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \cdots \text{ etc.}$$

..ter den Bedingungen (3) übergeht, so findet man, dass diese ..ste Gleichung jene allgemeinste Form $F=0$ haben kann, ..enn

$$N_{n-1}^m + m - 1 \geqq N_n^m$$

..wo $N_n^m = \dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2\ldots(m-1)}$ ist). Diese Ungleichung ..ird erfüllt: 1) wenn $n=1$, m beliebig; 2) wenn $m=2$, n be-..ebig. Dadurch zerfallen alle linearen partiellen Differential-..eichungen in 3 verschiedene Klassen: 1) Gleichungen 1ter Ord-..nng mit einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen; 2) Glei-..hungen beliebiger Ordnung mit zwei unabhängigen Veränder-..ichen; 3) alle andern Gleichungen.

Eine lineare Differentialgleichung I. und II. Klasse wird ..mmer in eine bedingte Gleichung $Fdx = 0$ übergehen, lineare Differentialgleichungen III. Klasse nur in einem besonderen Falle. Durch den Mechanismus der Integration werden diese 3 Klassen von Gleichungen scharf von einander unterschieden. In Klasse I. kommt nur eine willkürliche Function vom $m-1$ Argumenten vor, in Klasse II. hängen die vorkommenden Functionen von je einem Argumente ab; was nicht mehr in der III. Klasse der Fall ist.

Es würde schwer fallen, in einer kurzen Notiz über diese ziemlich grosse Abhandlung ihren ganzen Inhalt zu skizziren: wir wollten nur die Grundideen andeuten, um so mehr, als im Nachlass des Verfassers eine deutsche Abhandlung über denselben Gegenstand gefunden worden ist. Ty.

Capitel 7.

Variationsrechnung.

E. Fergola. Richiamo a proposito di una formola centemente pubblicata dal Sig. G. Erdmann. Nap. R XXI. 161.

Herr Fergola macht die Mitteilung, dass die Formel für höheren Differentialquotienten der Functionen von 2 ande Functionen, welche Herr Erdmann in seiner Abhandlung: „Ue die Variationen n^{ter} Ordnung" (Schlömilch Z. XXVI. p. 76; si F. d. M. XIII. (1881) p. 303) herleitet, nur ein specieller Fall jenigen ist, die er bereits im Jahre 1858 in einer Note: „So due formole di Calcolo differenziale" (Tortolini Ann. I) veröff licht hat. M.

A. Livenzoff. Ueber Maxima und Minima der e fachen bestimmten Integrale. Mosk. S. X. Lief. 1. (Russi

Es wird in dieser Note gezeigt, dass die Bedingungen, das Polynom

$$(1) \qquad y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{m-1} x^{m-1}$$

so bestimmen, dass das Integral

$$\int_a^b F(x, y, y', y'' \ldots) f(x)\, dx$$

zum Maximum oder Minimum wird, identisch sind mit den dingungen, dass der Ausdruck

$$(2) \qquad M(x) \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x-z} - \frac{d}{dx}\left\{N(x) \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x-z}\right\} + \frac{d^2}{dx^2}\left\{P(x) \int_a^b \frac{f(z)\, dz}{x-z}\right\} - \cdots,$$

wo $M(x)$, $N(x)$, $P(x)$, ... die Derivirten

$$\frac{\partial F}{\partial y}, \; \frac{\partial F}{\partial y'}, \; \frac{\partial F}{\partial y''}, \ldots$$

ch dem Einsetzen der rechten Seite von (1) für y bezeichnen, ner ganzen Function von x bis zu Gliedern von der Ordnung –m gleich wird. In dem Falle, dass F keine höheren Potenzen n y als die zweiten und nur die ersten Potenzen von $y', y'', \dots$ t Coefficienten, die nur von x abhängen, enthält, nimmt der sdruck (2) die Gestalt an:

$$M(x)y\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z} - \varphi(x),$$

d die Aufgabe kann dann nach der Methode von Tschebischeff rch Entwickelung der Function

$$\int_a^b \frac{M(z)f(z)dz}{x-z}$$

. einen Kettenbruch gelöst werden. Ty.

. J. Walker. Solution of a question (6571 und 6598). Ed. Times XXXVI. 40-42.

Der Inhalt der Note betrifft die Variation des Crofton'schen ntegrals

$$\iint (\vartheta - \sin\vartheta)dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi\Omega$$

Lond. Trans. 1868 p. 188; s. F. d. M. I. (1868) p. 75), unter der Voraussetzung, dass der Umfang der geschlossenen Linie L, welche die Fläche Ω begrenzt, in eine andere benachbarte übergeht, die dadurch erzeugt wird, dass jeder Krümmungsradius ϱ n Ω um ein Stück $\mu f(\varrho)$ verlängert wird, wo μ eine unendlich kleine constante Grösse ist. Es wird

$$\iint\left\{\frac{f(\varrho_1)}{t_1} + \frac{f(\varrho_2)}{t_2}\right\}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta\cdot dx\cdot dy = \frac{1}{2}L\int_0^{2\pi} f(\varrho)d\varphi,$$

wo t_1, t_2 die Längen der Tangenten sind, die von dem Punkte x, y an Ω gezogen werden, ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien der entsprechenden Berührungspunkte, ϱ der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte der Curve und φ die Neigung des Radius zu einer festen Linie in der Ebene. Die Integration erstreckt sich auf die ganze Ebene ausserhalb Ω.

Geht man von dem Crofton'schen Integral

$$\iint \vartheta \, dx \, dy = \pi\theta - \int_0^{2\pi} \Sigma \, d\omega$$

(ib. p. 190) aus und lässt nur die innere Begrenzung variir…
so erhält man

$$\iint \left\{ \frac{f(\varrho_1)}{t_1} + \frac{f(\varrho_2)}{t_2} \right\} dx \, dy = \int_0^{2\pi} c f(\varrho) \, d\omega,$$

wo ϑ der Winkel zwischen den beiden Tangenten ist, die w…
irgend einem Punkte an die innere und äussere Begrenzung g…
zogen werden. c ist eine Sehne, die von der äusseren Begre…
zung ein Segment Σ abschneidet und die innere berührt; ω i…
der Winkel, den c mit einer festen Linie bildet.

Lässt man allein die äussere Begrenzung variiren, so er…
hält man

$$\int_0^{2\pi} (\pi - \vartheta) \varrho f(\varrho) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\beta} \varrho f(\varrho) \, d\varphi \right\} d\omega,$$

worin ϱ jetzt der Krümmungsradius der äusseren Begrenzu…
an der Stelle ist, wo die Tangenten der inneren den Winkel …
bilden; β ist der Winkel zwischen den Normalen in den End…
punkten von c. Die Integration erstreckt sich auf den Ri…
zwischen beiden Begrenzungen. M.

Siebenter Abschnitt.

Functionentheorie.

Capitel 1.

Allgemeines.

. du Bois-Reymond. Die allgemeine Functionentheorie. I. Teil. Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Grösse, Grenze, Argument und Function. Tübingen. Laapp.

Die neueren Theorien der irrationalen Zahlen suchen den oden der Arithmetik festzuhalten, indem sie sich eines Verhrens der mathematischen Begriffsbildung bedienen, dem man chon im fünften Buche von Euclid begegnet. Gestützt auf die nnahmen der Alten über die gerade Linie kann man dann leicht eigen, dass jeder Strecke eine Zahl zugeordnet werden könne; während der umgekehrte Satz, dass auch jeder Zahl eine Strecke entspreche, als ein Axiom oder als gleichbedeutend mit der Annahme der Stetigkeit der Geraden anzusehen ist. Früher wurden die irrationalen Zahlen manchmal aus der Geometrie abgeleitet, jedoch die eigentliche Bedeutung dieses Vorgehens wurde nicht erkannt.

Herr du Bois-Reymond betrachtet die letztere Methode als onsequent. In der Tat ist die Arithmetik wie die Geometrie ine Naturwissenschaft, und zwar hervorgegangen aus dem lineaen Grössenbegriff, d. i. aus der Vorstellung von Grössen, welche

dieselben Eigenschaften besitzen wie die Strecken einer beg ten Geraden, so dass sie sich ihr Punkt für Punkt zuor lassen; so wird als Grundproblem der Analysis der Nach derjenigen Grösse auftreten, welche einem arithmetischen Gr übergange entspricht. Diese Aufgabe wird formulirt durch „allgemeine Convergenzprincip", d. i. den Satz: Wenn der U schied $f(x_1) - f(x)$, $x_1 > x$ gedacht, von einem hinreichend gr Wert von x an und für beliebige Werte des Unterschiedes unter einer beliebig kleinen Zahl bleibt, so hat die Function einen bestimmten Grenzwert Y, d. h. es existirt eine Grösse der Eigenschaft, dass der Unterschied $Y - f(x)$ von einem reichend grossen Werte von x an kleiner ist als eine beli kleine Zahl. Der Herr Verfasser stellt jedoch nicht dies gemeine Aufgabe an die Spitze, sondern das darunter enth Problem der Grenze eines endlosen nicht periodischen Dec bruches. Er zeigt, dass das Problem der Decimalbruchg nach zwei einander schroff gegenüberstehenden Anschauu der idealistischen und empiristischen, behandelt und gelöst den könne. Um ihren unversöhnlichen Gegensatz hervor zu lassen, entwickelt er sie ganz unabhängig von einand dem er abwechselnd einem Vertreter der einen und eine anderen Ansicht das Wort erteilt. Die Discussion derselben zu folgendem Ergebnis. Der Idealist glaubt an die Wirkli unvorstellbarer, durch unsern Denkvorgang geforderter Be grenzen. Dazu gehören die geometrischen Grundbegriffe: Linie, Fläche; die vollkommene Gerade und das genaue endlich das Unendlichgrosse und das Unendlichkleine. Wä der Empirist bei der Tatsache stehen bleibt, dass die Ei strecke unbegrenzt viele Punkte enthalte, schreitet der I zur Erklärung fort: die Anzahl dieser Punkte ist unendlich Daraus folgert er die Existenz des Unendlichkleinen, indem Strecke entsprechend der unendlichen Anzahl ihrer Punk unendlich viele Teilstrecken zerfallen muss, deren kein lich sein kann. Die unendlichkleinen Strecken bilden über den endlichen eine neue Art von Grössen, die unte jedoch dieselben Eigenschaften besitzen, wie die end

-össen. Die Null muss dem Idealisten in der Analysis entbehr-lich erscheinen. Der Empirist verharrt stets innerhalb der Grenzen des natürlichen Vorstellungsgebietes. Er giebt zwar das be-liebig Genaue in der Geometrie zu, nennt aber das ideal Genaue ein Axiom. Der Punkt ist ihm ein nach allen Richtungen hin beliebig kleiner Raum, die Linie ein Faden von beliebig kleinem Querschnitt. Für ihn giebt es nur endliche Grössen, darunter auch solche, die über jedes noch so grosse Mass wachsen oder unter jedes noch so kleine sinken. Der Idealist löst das Grenz-problem, indem er den Unterschied zwischen der Grenze und den sie bestimmenden Strecken schliesslich dem Vorstellungsgebiet entrückt, der Empirist aber, indem er die letzteren schliesslich mit der Grenze zu einer Vorstellung sich vermengen lässt. Die Systeme des Idealismus und Empirismus sind bisher schwerlich scharf auseinandergehalten worden. (Selbst auf dem Gebiete der Geometrie, wo einzelne Einwürfe des Empirismus doch schon lange vorgekommen sind, wurde derselbe erst von Herrn Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (1882, s. d. Bd. Abschn. VIII. Cap. 5 A.) consequent durchgeführt.) Für die Functionentheorie fordert der Herr Verfasser eine neutrale Darstellungsweise, d. h. eine solche, die keiner der beiden Anschauungen widerspricht. Es darf die idealistische Metaphysik, das Unendlichgrosse und das Unendlichkleine nicht benutzt werden, ebensowenig aber auch die empiristische Idee des beliebig Genauen, so dass Begriffe wie Grösse, Wert, Strecke im idealistischen Sinne gebraucht werden können. Die vorstehende, vorwiegend erkenntnistheoretische Untersuchung des Grenzproblems bildet den Inhalt des ersten und zweiten Capitels. Das dritte Capitel „über das Argument" giebt die Lehre von der Punktverteilung, ferner die Lehre von der Abzählbarkeit und den relativen Mächtigkeiten unbegrenzter Vielheiten nach Herrn G. Cantor. Nach der Terminologie des Herrn Verfassers werden die unendlichen Punktsysteme auf der Argumentstrecke eingeteilt in Pantachien, Apantachien und solche, die sich nicht in eine endliche Anzahl pantachischer und apantachischer Strecken zerlegen lassen. Zu den Pantachien gehören die integrirbaren Systeme, was aber nicht

stellt, die umgekehrt wieder zur Definition der Operationen -nen können. Die Geometrie lässt gewisse in der Ebene mit -ecken vorzunehmende Operationen als jenen formalen Ge-zen unterworfen erkennen, die sonach mit den obigen Rechen-erationen identificirt werden können, und an denen sich für e abstracte Grössenlehre die Formulirungen successive der gativen, gebrochenen irrationalen und complexen Grössen ent-ckeln lässt.

Die Arbeit soll ersichtlich einer ersten Einführung in den egenstand dienen. Dadurch ist das Absehen von der vorhan-nen Literatur des Gegenstandes gerechtfertigt, und das Nicht-ngehen auf eine Discussion der Bedenken, welche einer un-ittelbaren Gleichstellung des aus geometrischen Vorstellungen ewonnenen Grössenbegriffs und des successive aus den Zahlen-perationen abgeleiteten der abstracten Grössenlehre entgegen-ehen. Doch hätten Incorrectheiten des Ausdrucks vermieden erden können, wie pag. 183, 184 der Satz, dass die Punkte

1, wo n eine incommensurable reelle Zahl bedeutet, die **ganze** eripherie des Einheitskreises ausmachen. Dk.

I. Durège. Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. Dritte Aufl. Leipzig. Teubner.

Ueber den Plan des Buches ist F. d. M. V. (1873) p. 217 berichtet worden. Die vorliegende dritte Auflage hat, abgesehen von zahlreichen kleineren Verbesserungen folgende Aenderungen erfahren. Nach der Einführung der Riemann'schen Kugelfläche wird der Nachweis hinzugefügt, dass für eine gegebene alge-braische Function, unter Berücksichtigung des unendlich grossen Wertes der Variabeln, die Bildung der Riemann'schen Fläche immer möglich ist. Der Abschnitt über die allgemeinen Eigen-schaften der Functionen schliesst mit der Darstellung einer Func-tion durch eine convergente Reihe in der Umgebung eines Punktes, der kein Verzweigungspunkt ist, in welchem aber die Function

unstetig wird. Im folgenden Abschnitt werden die beiden Arten der Unstetigkeit genauer erörtert. In dem neunten Abschnitt, der von den einfach und mehrfach zusammenhängenden Flächen handelt, ist der Riemann'sche Hauptsatz über die letzteren mehrfach ergänzt. In einer nachträglichen Bemerkung am Ende des Buches ist gezeigt, dass man bei der von Riemann ursprünglich aufgestellten Fassung seines Satzes alle Schwierigkeiten vermeidet und sofort die Folgerungen erhält. Für den Satz selbst wird ein von Herrn Lippich gegebener Beweis hinzugefügt, der einige Eigenschaften allgemeiner Liniensysteme voraussetzt. Hieraus ergeben sich noch Folgerungen für eine beliebige mit Randcurven behaftete Riemann'sche Fläche, und eine Erweiterung des Euler'schen Satzes von den Kanten, Ecken und Flächen eines Polyeders. M.

C. G. J. Jacobi. Gesammelte Werke. II. Band. Herausgegeben von K. Weierstrass. Berlin. G. Reimer.

Wie wir bereits in unserem Referate über den ersten Band (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 20) erwähnt haben, sollten die beiden ersten Bände der auf Veranlassung der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften herausgegebenen Werke Jacobi's alle Abhandlungen desselben über elliptische und Abel'sche Transcendenten umfassen. Die in den vorliegenden 2ten Band aufgenommenen 21 von Jacobi bereits veröffentlichten Abbandlungen sind streng chronologisch geordnet. Ihnen folgen fünf Abhandlungen aus dem Nachlasse Jacobi's, welche bis auf die letzte nach seinem Tode von Anderen im Borchardt'schen Journal veröffentlicht sind. Der reinen Theorie der elliptischen Functionen gehören folgende Abhandlungen an: 15) „Ueber die unmittelbare Verification einer Fundamentalformel der Theorie der elliptischen Functionen", Crelle J. XXXVI. p. 75-80, worin die Reihe

$$1-q(z+z^{-1})+q^4(z^2+z^{-2})-q^9(z^3+z^{-3})+ \text{ etc.}$$

als unendliches Product dargestellt wird; 16) „Ueber die partielle Differentialgleichung, welcher die Zähler und Nenner der

ptischen Functionen Genüge leisten", Crelle J. XXXVI. p. 80-88; „Ueber die Differentialgleichung, welcher die Reihen

$$1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 + \text{ etc.}, \quad 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + \text{ etc.}$$

nüge leisten", Crelle J. XXXVI. p, 97-112; und aus dem Nach-: 23) „Darstellung der elliptischen Functionen durch Potenz-ien, Crelle J. LIV. p. 82-97, mitgeteilt durch C. W. Borchardt. wendungen der elliptischen Functionen enthalten folgende Ab-dlungen: 3) „Ueber die Figur des Gleichgewichts," Poggen-ff Ann. XXXIII. p. 229-233. 18) „Ueber eine particuläre Lösung ' partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0\text{"},$$

elle J. XXXVI. p. 113-134. Die Differentialgleichung wird auf iptische Coordinaten transformirt, dann mit Benutzung der iptischen Functionen ein particuläres Integral derselben auf-stellt. 19) „Ueber unendliche Reihen, deren Exponenten zu-eich in zwei verschiedenen quadratischen Formen enthalten id", Crelle J. XXXVII. p. 61-94 u. 222-254, wo die in der Theorie r elliptischen Functionen auftretenden q-Reihen auf Probleme r Zahlentheorie angewendet werden. 21) „Auszug eines Schrei-s von C. G. J. Jacobi an E. Heine", Crelle J. XLII. 35-40, lches die elliptischen Functionen zur Lösung der von Lamé rachteten Gleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial \varepsilon_2^2} + n(n+1)(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) X_n = 0$$

utzt. 24) „Ueber die Abbildung eines ungleichaxigen Ellip-ls auf einer Ebene, bei welcher die kleinsten Teile ähnlich iben", Crelle J. LIX. 74-88, mitgeteilt von S. Cohn. 25) „So-on nouvelle d'un problème fondamental de géodésie", Astr. chr. XLI. p. 210 u. f., Crelle J. LIII. p. 335-341, mitgeteilt von Luther. Und endlich die berühmte Abhandlung: 20) „Sur la ation d'un corps." Extrait d'une lettre adressée à l'Académie Sciences de Paris, Crelle J. XXXIX. p. 292-350, worin die n Cosinus des Problems mit Hülfe der elliptischen Functionen $\frac{2Kx}{\pi}\Big)$ und $H\Big(\frac{2Kx}{\pi}\Big)$ als Functionen der Zeit ausgedrückt

werden. Aus dem Nachlass wird als Fortsetzung dieser Abhandlung hier zum ersten Mal veröffentlicht: 26) Fragments sur la rotation d'un corps tirés des manuscrits de C. G. J. Jacobi et communiqués par E. Lottner." A. „Second mémoire sur la rotation d'un corps non soumis à des forces accélératrices" (p. 427-467). „Supplément au mémoire précédent. Expressions elliptiques des cosinus des angles qu'un système quelconque d'axes rectangulaires fixes dans le mobil fait avec les axes des x, y, z fixes dans l'espace" (p. 468-476). B. „Nouvelle théorie de la rotation d'un corps de révolution grave suspendu en un point quelconque de son axe" (p. 477-492). C. „Sur la rotation d'un corps de révolution grave autour d'un point quelconque de son axe" (p. 493-514).

Mit der Integration eines Systems hyperelliptischer Differentialgleichungen beschäftigt sich die Abhandlung 13) „Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differentialgleichungen und über die rationale Form ihrer vollständigen algebräischen Integralgleichungen", Crelle J. XXXII. p. 220-22[illegible].

Das Abel'sche Theorem behandeln: 1) „De theoremate Abeliano observatio", Crelle J. IX. p. 99, und 7) „Demonstratio nova theorematis Abeliani", Crelle J. XXIV. p. 28. Die Theorie der Abel'schen Functionen wird weiter ausgebaut in folgenden Abhandlungen: 2) „Considerationes generales de transcendentibus Abelianis", Crelle J. IX. p. 394-403, worin die Analogie mit den elliptischen Transcendenten durchgeführt wird. 4) „De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur", Crelle J. XIII. p 55-7[illegible]. 8) „Ueber die Additionstheoreme der Abel'schen Integrale 2ter und 3ter Gattung", Crelle J. XXX. p. 120-126. 9) „Note sur les fonctions Abéliennes", Bull. Pétersb. II. No. 7, Crelle J. XXX. p. 183-184. 10) und 11) „Extrait de deux lettres de Charles Hermite à C. G. J. Jacobi et d'une lettre de Jacobi adressée à Hermite", Crelle J. XXXII. p. 277-299; XXXII. p. 176-181, worin die Teilung der Argumente der Abel'schen Functionen, der Ausdruck von $\sin\operatorname{am}(u, k)$ durch $\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{m}, \lambda\right)$, der Beweis des Abel'schen

eorems für elliptische Functionen, die Addition der Argumente d der Parameter in den Abel'schen Integralen 3ter Gattung und Vertauschung von Argument und Parameter zur Sprache kommn. 12) „Ueber die Vertauschung von Parameter und Argunt bei der dritten Gattung der Abel'schen und höheren Tranendenten", Crelle J. XXXII. p. 185-196. Und aus dem Nachs: 22) „Ueber die Substitution

$$(ax^2+2bx+c)y^2+2(a'x^2+2b'x+c')y+a''x^2+2b''x+c''=0,$$

d über die Reduction der Abel'schen Integrale erster Ordnung die Normalform", Crelle J. LV. p. 1-14, mitgeteilt durch Richelot. Ferner ist hier zu erwähnen der Nekrolog Göpel's:) „Notiz über A. Göpel", Crelle XXXV. p. 313-317, worin eine ebersicht der Resultate der Göpel'schen Dissertation: „De equationibus secundi gradus indeterminatis", Berlin 1835, gegeben ird, und der wichtigen Abhandlung: „Theoriae transcendentium belianarum primi ordinis adumbratio levis", welche die Aufgabe ehandelt, die umgekehrten Functionen der ersten Klasse der bel'schen Integrale wirklich darzustellen.

Anwendungen der Abel'schen Transcendenten enthalten gende Abhandlungen: 6) „Note von der geodätischen Linie auf em Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkrdigen analytischen Substitution", Crelle J. XIX. p. 309-313. d 5) „De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium elianorum in analysi diophantea", Crelle J. XIII. p. 353-355.

Die Anmerkungen enthalten ausser einigen Notizen über nderungen, die hier und da nötig gewesen sind, einen kürzlich Herrn Prof. Weierstrass unter den Papieren Borchardt's aufundenen Aufsatz Jacobi's „Zur Geschichte der elliptischen Abel'schen Transcendenten", dem ein Teil der obigen Notiz r Göpel entnommen zu sein scheint, und der für die Geschichte Theorie der elliptischen und hyperelliptischen Functionen les Interessante enthält. M.

SALTEL. Sur un moyen d'étendre la théorie des maginaires sans faire usage des imaginaires. C. R. XCIV. 66-169. Dk.

P. Dziwiński. Richtungszahlen, ihre Bedeutung und Anwendung in der Mathematik. Pr. Jaroslaw. (Polnisch)

Darstellung der elementaren Theorie complexer Zahlen, welche als Repräsentanten der Punkte einer Grundebene definirt, Drehungs- und Richtungszahlen genannt und durch das Symbol $A\alpha$ (A Länge des Radius vector des Punktes, α der Winkel, welchen dieser Radius mit der positiven Richtung der x-Axe bildet) dargestellt sind. Den Inhalt der Schrift bildet die Theorie der Operationen mit den Drehungs- und Richtungszahlen, ihre Anwendung auf die Theorie der Logarithmen, auf goniometrische Functionen und auf einige Aufgaben aus der analytischen Geometrie. Dn.

P. Cazzaniga. Il calcolo dei simboli d'operazione elementaremente esposto. Batt. G. XX. 48-78, 194-230.

Zweck der umfangreichen Abhandlung ist, eine elementare Theorie der Operationen, wie sie von Gregory, Boole, Rob. Carmichael und Andern entwickelt ist, nebst Anwendungen zu geben. Nach Auseinandersetzung der Bedeutung der distributiven Eigenschaft einer Operation und anderer Principien werden die distributiven und commutativen Eigenschaften zusammengesetzter Operationen entwickelt. Dann werden Anwendungen auf lineare Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten und auf lineare Differentialgleichungen im Allgemeinen gegeben. Die Fortsetzung enthält die Theorie der inversen Operationen nebst Anwendungen, ferner Criterien, ob mehrere Functionen eine Abhängigkeit von gegebener Form von einander haben, endlich Systeme von Differential- und Differenzengleichungen. M.

J. C. Glashan. Forms of Rolle's theorem. Sylv. Am. IV. 282-292. 1881.

Mit Hülfe eigentümlicher symbolischer Bezeichnungen werd folgende Formeln aus der Theorie der Functionen einer reell Variabeln dargestellt: Rolle's Fundamentalsatz, Ausdehnung d

, **Lagrange's Form, Cauchy's Form, specielle Fälle der ɜn, Erweiterung derselben, Ausdrücke durch bestimmte ıle, Restglied bei Taylor, Cayley, Lagrange. Dann folgen ınctionen einer complexen Variabeln: allgemeine und be- e Formen des Theorems, Restglied in Taylor's Satz.**

M.

ıYLEY. On the geometrical representation of an ıation between two variables. J. Hopkins Circ. 1882. 210.

'ird die Darstellung zweier Variablen $z = x + iy$ und $+ iy'$ durch Punkte in zwei Ebenen auf die Gleichung $\overline{z^4 - 1}$ angewandt, so entspricht einem System von Halb- ı (aus dem Coordinatenanfang) in der einen Ebene eine : von lemiscatenartigen Curven in der anderen.

Schg.

ıYLEY. On associative imaginaries. J. Hopkins Circ. 2. 211-212.

'ie imaginären Grössen x, y werden definirt durch folgende ıungen:

$$x^2 = ax + by$$
$$xy = cx + dy$$
$$yx = ex + fy$$
$$y^2 = gx + hy;$$

rden die Bedingungen untersucht, die zwischen den Coef- ɜn a, b, c, d, e, f, g, h bestehen müssen, damit die imaginä- rössen associative Grössen sind. Es ergeben sich zwölf iedene Relationen zwischen jenen acht Coefficienten.

M.

ʌARR. On the establishment of the elementary ɔciples of quaternions in an analytical basis. . Ass. Rep. 1882.

Csy.

W. J. STRINGHAM. Determination of finite quatern[ion]
groups. Sylv. Am. J. IV. 345-358.

Haben zwei Quaternionen derselben endlichen Gruppe ein[e] Axe, so ist jede von beiden die Potenz einer und derselbe[n] Quaternion. Sind q, r zwei Quaternionen einer solchen Grupp[e], q mit einem Minimalargument, r so gewählt, dass der Winkel (φ) möglichst klein, aber von Null verschieden ist, dann ist r ei[n] Vector mit der Periode 4. Hat q_1 eine Periode, die grösser al[s] 10 ist, so liegen die Axen aller übrigen Quaternionen der Grupp[e] in der zur Axe von q_1 senkrechten Ebene, und alle Quaternionen, die nicht Potenzen von q_1 sind, haben die Periode 4 oder 2. Die grösste Periode einer endlichen Gruppe, welche nicht ein[e] Kreisteilungsgruppe ist, wird grade sein. Mit Hülfe dieser Sätz[e] gelingt es, die endlichen Gruppen aufzustellen.

No.

H. HANKEL. Untersuchungen über die unendlich o[ft] oscillirenden und unstetigen Functionen. Klein Ann. XX. 63-112.

Wörtlicher Wiederabdruck der letzten Arbeit von Hankel, die bisher durch die Art ihrer Veröffentlichung nur schwer zu[-] gänglich war. Ueber dieselbe wurde im zweiten Bande (1870) dieses Jahrbuches p. 190 berichtet. Sie hat auf die neuere Ent[-] wickelung der Theorie der Functionen von reellen Veränder[-] lichen einen bedeutenden Einfluss ausgeübt. Darüber, sowie übe[r] das interessanteste Capitel derselben, „das Condensationsprinci[p] der Singularitäten", möge man die Auseinandersetzungen de[s] Herrn G. Cantor (Klein's Ann. XII. p. 588, siehe das folgend[e] Referat) vergleichen. Die Schrift enthält im Einzelnen einig[e] Unrichtigkeiten, z. B. den Satz, dass die punktirt unstetige[n] Functionen immer integrabel sind, an welchem, wenn wir nic[ht] irren, zuerst Herr Stephen Smith Anstoss genommen hat. (Vg[l.] d. Jahrbuch VII. (1875) p. 247.).

St.

ANTOR. Ueber ein neues und allgemeines Condenıtionsprincip der Singularitäten von Functionen.
lein Ann. XIX. 588-594.

Hankel hat in seinen „Untersuchungen über die unendlich »scillirenden und unstetigen Functionen; ein Beitrag zur Festang des Begriffes der Function überhaupt" (Tübinger Unitätsprogramm 1870, wieder abgedruckt in Klein's Ann. XX. 63, cf. das vorhergehende Referat) eine Methode „Conationsprincip der Singularitäten" gegeben, wonach sich aus ctionen $\varphi(x)$, die an einer gegebenen Stelle irgend ein sinres Vorkommnis darbieten, andere Functionen herstellen an, welche die genannte Unstetigkeit an unendlich vielen Stellen ıhmen, und zwar an einer überall dichten Mannigfaltigkeit Stellen. Die von Hankel gegebene Methode besitzt aber rseits nicht die wünschenswerte Einfachheit, weil die aufellte Function noch durch secundäre Vorkommnisse complicirt heint, andererseits nicht volle Allgemeinheit, insofern die Manaltigkeit der Stellen, für welche die Singularität in der gebiln Function auftritt, sich auf die Menge der rationalen Zahlen ;hränkt, ohne dass in der vorliegenden Form eine Erweiterung beliebige abzählbare Zahlenmengen möglich erscheint.

Herr Cantor giebt nun ein Bildungsgesetz (eine absolut und chmässig convergente Reihe) für eine solche Function an, welche singulären Stellen für eine ganz beliebige, nur abzählbare ınigfaltigkeit von Zahlenwerten besitzt, und wo die einzelne gularität für sich jedesmal durch ein Glied in der Reihenentkelung der Function charakterisirt erscheint. Ist nämlich $\varphi(x)$: Function mit der einzigen singulären Stelle $x = 0$, und ist : beliebige, abzählbare Menge von Stellen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$ eben, so setze man

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} c_\nu \cdot \varphi(x-\omega_\nu),$$

durch passende Wahl der Coefficienten stets die Reihe von absolut und gleichmässig convergent herzustellen ist. Da:h ist dann eine Function gebildet, welche an allen Stellen

stellung der Function $F(x)$ in der Form

$$F(x) = \int \frac{\Phi(z)}{z} \cdot e^{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{z}\right)^{n+1} - 1}{\frac{x}{z} - 1} dz,$$

wo $\Phi(z)$ jene ganze Function bezeichnet und das Integral den Punkt $z = 0$ genommen ist. In etwas weiterer Ausfüh sind diese Resultate seither im Bulletin de la société math tique de France vol XI. (1883) veröffentlicht. Dk.

P. Cazzaniga. Espressione di funzioni intere che posti dati arbitrariamente prendono valori prestabil Brioschi Ann. (2) X. 279-290.

Der Verfasser leitet den allgemeinsten analytischen Ausdr einer Function $f(z)$ von z her, welche an beliebig vorgeschrie nen Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ (welche nur so verteilt sind, dass jedem endlichen Flächenstück nur eine endliche Anzahl solc Stellen sind) vorgeschriebene Werte $f_1, f_2, f_3, \ldots$ annimmt, lässt dabei die Analogie mit der Lagrange'schen Interpolati formel hervortreten, welche das analoge Problem für eine e liche Anzahl vorgegebener Stellen α durch eine rationale ga Function löst. Die Construction der gemeinten Function gel sofort mit Hülfe der von Weierstrass zuerst principiell ei führten Primfactoren. Setzt man

$$E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) \cdot e^{\sum\limits_{k=1}^{k=p_\nu} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^k}$$

und

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right),$$

wo die ganzen Zahlen p_ν so gewählt sind, dass für jeden e lichen Wert von z die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\alpha_\nu} \left(\frac{z}{\alpha_\nu}\right)^{p_\nu} \right|$$

nvergirt, bedeutet ferner $w_1(z)$ eine beliebige ganze Function n z, so ist durch den im Endlichen convergenten Ausdruck

$$\delta_{z,\alpha} = \frac{\varphi(z) E'\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) . e^{w_1(z)}}{\varphi'(\alpha_\nu) E\left(\frac{z}{\alpha_\nu}, p_\nu\right) . e^{w_1(\alpha_\nu)}},$$

s der Accent die Differentiation nach z bedeutet) eine Function von z dargestellt, welche für $z = \alpha_\nu$ zu Eins, für $z = \alpha_1$, ..., $\alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu+1}, \dots$ zu Null wird. Multipliciren wir das δ_{z,α_ν} mit f_ν und bilden

$$\Sigma f_\nu \ \delta_{z,\alpha_\nu} = f(z),$$

o ist damit die eingangs verlangte Function $f(z)$ hergestellt. r $w_1(z) = 0$ nimmt der Ausdruck eine Form an, welche unittelbar der Lagrange'schen Interpolationsformel analog gebaut , und welche in die letztere übergeht, wenn man (was bei der nn endlichen Anzahl der α_i gestattet ist) alle p_ν zu Null cht.

Es folgt noch die Untersuchung der Convergenz des für $f(z)$ geleiteten Ausdrucks unter der Annahme $w_1(z) = 0$, und end- die Entwickelung desselben in eine Potenzreihe nach z.

Dk.

WEIERSTRASS. Recherches sur les fonctions $2r$-fois périodiques de r variables. Darb. Bull. (2) VI. 111-120.

Eine von Herrn J. Molk veröffentlichte Uebersetzung der handlung Borchardt J. LXC. 1—8, über welche F. d. M. XII. 80) 313 berichtet worden ist. M.

MITTAG-LEFFLER. Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. C. R. XCIV. 414-416, 511-514, 713-715, 781-783, 938-941, 1040-1042, 1105-1108, 1163-1166; XCV. 335-336.

Fortsetzung der Untersuchungen des Herrn Verfassers über Darstellung eindeutiger analytischer Functionen. Für das

Frühere vergl. F. d. M. XI. (1879) p. 264; XII. (1880) p.
XIII. (1881) p. 307. Nach der von Herrn Weierstrass (Be
1880) gegebenen Methode lässt sich folgender allgemeine
beweisen: „Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine unendliche Reihe versch
Werte, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty$$

ist, und

$$G_\nu(y) = \sum_m c_m^{(\nu)} y^m \qquad (\nu = 1, 2$$

ganze, rationale oder transcendente Functionen, die für
verschwinden, so lässt sich immer eine analytische Functio
bilden, die keine andern singulären Punkte als $a_1, a_2, a_3, \ldots$
und die so beschaffen ist, dass für jeden bestimmten We
ν die Differenz

$$F(x) - G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right),$$

wenn man $x = a_\nu$ setzt, einen endlichen und bestimmten
annimmt, so dass sich $F(x)$ in der Umgebung von $x =$
der Form

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + P(x-a_\nu)$$

entwickeln lässt." Wenn nun in dieser Darstellung, welc
Form hat:

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x) + G(x),$$

wo

$$F_\nu(x) = G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) - \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu$$

und

$$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} A_\mu^{(\nu)} \left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu \quad \text{für} \quad \left(\frac{x}{a_\nu}\right) < 1.$$

$F(x)$ eine bekannte Function ist, und man will sie durc
Reihe von obiger Form ausdrücken, so handelt es sich
solche Zahlen m_ν zu finden, dass die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(x)$ ein
convergent wird, und die Function $G(x)$ zu bestimmen. E
im Folgenden eine Formel entwickelt, welche ein Mittel

...ses Problem in einem sehr allgemeinen Falle zu lösen. Diese ...rmel wird noch verallgemeinert zu folgender:

$$F(x) = \overline{G}(x) + \sum_{\nu=0}^{n} \overline{F}_\nu(x)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int F(x)\left\{\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z}\left[B_0 - B_1\frac{x}{z} + \cdots + B_{m-1}\left(\frac{x}{z}\right)^{m-1}\right]\right\}dz,$$

...o die B willkürliche, von z und x unabhängige Grössen sind. ...s folgen Anwendungen auf den Fall, wo

$$F(x) = R(y).r(x), \quad y = e^x,$$

...orin r eine algebraische rationale Function von x, und $R(y)$ ...e algebraische rationale Function von y ist, die für $y = 0$ ...d $y = \infty$ endlich bleibt. Unter Anderm ergeben sich daraus ...e Entwickelungen von $\pi \cot \pi x$, von denen Herr Gyldén bei der ...örungsrechnung Gebrauch gemacht hat. Ferner wird

$$F(x) = f(x).r(x)$$

...setzt, wo $f(x)$ eine endliche monogene Function mit einer end...hen Anzahl singulärer Punkte, und

$$f(x+2w) = \mu f(x), \quad f(x+2w') = \mu' f(x),$$

... w, w' μ, μ' Constanten, $\frac{w'}{w}$ nicht reell, und $[\mu] < 1$, $[\mu'] < 1$.

Alsdann giebt der Herr Verfasser einen Auszug aus einer ...sseren Abhandlung, die in den Berichten der Akademie zu ...ckholm erschienen ist, und welche auf dem obigen allge...inen Satze die Theorie der eindeutigen analytischen Func...nen einer Variabeln aufbaut. Auch wird dieses allgemeine ...eorem angewendet auf das Studium der von Herrn Poincaré ...geführten analytischen Functionen. M.

Casorati. Aggiunte a recenti lavori dei sig[i]. Weierstrass e Mittag-Leffler sulle funzioni di una variabile complessa. Brioschi Ann. (2) X. 261-278.

Ebenso wie Herr Mittag-Leffler selbst (s. d. obige Referat) ...allgemeinert auch Herr Casorati den von ersterem gegebenen ...danken, durch eine Summe passend modificirter rationaler ...iche eine eindeutige Function darzustellen, die wie jeder

dieser Brüche unendlich wird, dahin, dass er diese Darstell auf eine Menge verschiedenartiger eindeutiger oder nicht e deutiger Functionen anwendet, die sich in der Umgebung ei gegebenen Reihe von Punkten ebenso verhalten wie gewisse f jeden dieser Punkte gegebene, eindeutige oder nicht eindeutig algebraische oder transcendente, Functionen. Insbesondere wen er sie an auf die Darstellung eindeutiger Functionen mit ei unendlichen Anzahl solcher wesentlichen singulären Stellen, w sie Herr Weierstrass in seiner Abhandlung: „Zur Theorie d eindeutigen analytischen Functionen" (Berl. Abh. 1876) in e licher Anzahl betrachtet hat. Die gegebene Verallgemeiner führt zu verschiedenen neuen Resultaten über die eindeutig und nicht eindeutigen Functionen. M.

F. Casorati. Sulle funzioni analitiche. Lomb. Ist. R (2) XV. 250-251.

Kurze Notiz über einen Bericht, den Herr Casorati de Institut gegeben, und der die neuesten Untersuchungen des Ve fassers, sowie der Herren Weierstrass und Mittag-Leffler üb eindeutige Functionen betrifft. M.

S. Pincherle. Alcuni teoremi sopra gli sviluppi in seri per funzioni analitiche. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 224-225.

Einige Sätze über die Entwickelung einer analytischen Func tion $F(x)$, die innerhalb eines Kreises um $x = 0$ regulär ist, nach analytischen Functionen $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x), \ldots$, die eben falls in einem Kreise um den Nullpunkt regulär sind, in der Form:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(x),$$

ohne Beweis. M.

. HERMITE. Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions. Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler. Kronecker J. XCII. 145-155.

Der analytische Ausdruck der Function $D_x \log \Gamma(1+x)$ durch Formel

$$C + \left[1 - \frac{1}{1+x}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+x}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right] + \cdots$$

das erste bekannte Beispiel, wo die divergente Reihe der chen Brüche sich in eine absolut convergente Reihe verdelt, indem man jedem der Brüche eine Constante hinzufügt. zweite Beispiel bieten die elliptischen Functionen. In der ierstrass'schen Formel

$$\frac{(x)}{(x)} = \Sigma \left[\frac{1}{x+2mK+2m'iK'} - \frac{1}{2mK-2m'iK'} - \frac{x}{(2mK+2m'iK')^2} \right]$$

s man ein Binom ersten Grades, anstatt der Constanten, nehmen. Herr Hermite giebt weitere Beispiele, wo von den chen Brüchen ein ganzes Polynom von endlichem Grade, aber sonst ganz beliebig sein kann, weggenommen wird. enn

$$F(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)},$$

en Pole $x = -n$, und die entsprechenden Residuen

$$R_n = \frac{(-1)^n (a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1 \cdot 2 \dots n},$$

st, wenn a positiv, die Reihe $\Sigma \frac{R_n}{x+n}$ convergent, und man

$$F(x) = \Sigma \frac{R_n}{x+n};$$

wenn a negativ $= -\nu+\alpha$, wo ν ganz und α positiv, so sich $F(x)$ in der Form schreiben:

$$F(x) = \Sigma \left[\frac{R_n}{x+n} + G_n(x)\right],$$

s das Theorem des Herrn Mittag-Leffler bedingt. Zu ähn-

lichen Folgerungen führt die Function

$$F(x) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)}.$$

Ein Postscriptum enthält eine Bemerkung über die Anwendung der Bezeichnung der Schnitte (coupures) in den bestimmten Integralen auf die Theorie der Euler'schen Integrale (s. Kronecker J. XCI. 54-78; F. d. M. XIII. (1881) 307 ff.). M.

Hugoniot. Sur le développement des fonctions en séries d'autres fonctions. C. R. XCIV. 907-909.

Es ist bekannt, dass jede Function $\varphi(x)$, deren Werte zwischen den Grenzen $+1$ und -1 der Variabeln gegeben sind, sich mit Hülfe der Legendre'schen Polynome in eine Reihe von der Form

$$\varphi(x) = A_0 + A_1 X_1 + \cdots + A_n X_n + \cdots$$

entwickeln lässt. Ein wichtiges Theorem über diese Entwickelungen ist von G. Plarr hergeleitet worden (C. R. XLIV. 1857), nämlich: „Wenn man die Reihe nach den n ersten Gliedern abbricht, so erhält man ein Polynom n^{ten} Grades, so dass das mittlere Quadrat der Differenzen zwischen der Function und dem Polynom, in den Grenzen $+1$ und -1, kleiner ist als für alle andern Polynome desselben Grades".

Diese Eigenschaft wird hier auf eine grosse Zahl anderer Functionen ausgedehnt, von denen die Legendre'schen nur ein besonderer Fall sind; und es wird gezeigt, wie man sehr einfach den Wert des mittleren Quadrates der Differenz zwischen der Function und der abgebrochenen Reihe berechnen kann.

M.

Hugoniot. Sur des fonctions d'une seule variable analogues aux polynômes de Legendre. C. R. XCV. 983-9[illegible]

In der obigen Note waren Functionen $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ gebildet, die den Bedingungen

$$\int_\alpha^\beta Z_k Z_{k'}\, dx = 0$$

r alle Fälle, wo k und k' verschiedene Werte haben, genügten. Vorliegenden wird eine ähnliche Reihe von Functionen ge-et. Kennt man nämlich $Z_0, Z_1, \dots Z_{n-1}$, und will man Z_n finden, genügt dieses folgenden Gleichungen:

$$\int^\beta Z_n Z_0\, dx = 0,\quad \int_0^\beta Z_n Z_1\, dx = 0, \dots \quad \int_\alpha^\beta Z_n Z_{n-1}\, dx = 0.$$

kann nun Z_0 willkürlich festsetzen und nach und nach die igen Z finden. Es wird alsdann der Fall betrachtet, wo alle Z der Form

$$Z_n = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + \dots + a_n f_n(x)$$

d. Dann lässt sich eine Function $\varphi(x)$, deren Werte zwischen nd β gegeben sind, mit Hülfe der Z in eine Reihe der Func-ıen $f_0, f_1, \dots$ entwickeln. Für specielle Fälle stimmt Z_n mit ı n^{ten} Legendre'schen Polynom überein. M.

Cazzaniga. Sopra una formola di Cauchy, concer-ıente lo sviluppo di funzioni in prodotti infiniti.

omb. Ist. Rend. (2) XV. 273-279.

Es sei $w(z)$ eine monodrome stetige und endliche Function, leich mit ihrer Ableitung $w'(z)$, innerhalb eines Bereiches S dem Umfang s, ausgenommen die Punkte $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$, in en sie unendlich von den Ordnungen $n_1, n_2, \dots, n_\nu$ resp. wird, . es verschwinde $w(z)$ in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ von den nungen $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ resp., und endlich seien die Werte von) und $w'(z)$ in irgend einem Punkte γ des Bereiches S ge-en, der natürlich von den β verschieden sein muss. Alsdann t sich $w(z)$ durch unendliche Producte in folgender Form lrücken:

$$(z) = w(\gamma) \frac{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{z}{\alpha_h}, p_h\right)\right\}^{m_h}}{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{\gamma}{\alpha_h}, p_h\right)\right\}^{m_h}} \cdot \frac{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{\gamma}{\beta_k}, q_k\right)\right\}^{n_k}}{\Pi \left\{ \varepsilon\left(\frac{z}{\beta_k}, q_k\right)\right\}^{n_k}} \cdot e^{\int_\gamma U(z,\gamma)\, dz}$$

$$\cdot \quad (h, k = 1, 2, 3, \dots),$$

wo

$$\varepsilon\left(\frac{z}{c}, r\right) = \left(1 - \frac{z}{c}\right) e^{\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \frac{1}{\varrho}\left(\frac{z}{c}\right)^{\varrho}}$$

gesetzt ist. Es ist dies eine Verallgemeinerung der Form Cauchy. M

P. Appell. Théorèmes sur les fonctions d'un point lytique. C. XCV. 624-626.

Verallgemeinerung einer früheren Untersuchung (C. R. 1238). Die beiden bekannten Theoreme von Cauchy, er dass eine ausserhalb einer geschlossenen Curve holomorphe tion dargestellt wird durch

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\xi).d\xi}{x-\xi},$$

das Integral genommen über die Grenzcurve, und zweitens, eine ausserhalb eines Kreises vom Mittelpunkt a holom Function $f(x)$ dargestellt wird durch eine convergente Reih Form

$$f(x) = \sum_0^{\infty} A_\nu \left[\frac{d^\nu}{d\xi^\nu}\left(\frac{1}{x-\xi}\right)\right]_{\xi=a},$$

welche sich beide auf die Ebene beziehen, werden ausge auf die mehrblättrige Riemann'sche Verzweigungsfläche, an Stelle von $\frac{1}{x-\xi}$ das Integral 2[ter] Gattung $Z(\xi,\eta)$ mi Pol (ξ,η) tritt. H. S

P. Appell. Relations entre les résidus d'une fon d'un point analytique etc. C. R. XCV. 714-717.

Erweiterung der Untersuchung C. R. XCI. 972 (s. F XII. (1880) 250). Definirt man in der durch die algebr Gleichung $F(x, y) = 0$ bestimmten Riemann'schen Fläche

on $\Phi(x, y)$ derart, dass sie nur in den Punkten

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$$

und in denselben die Residuen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hat und Ueberschreiten der $2p$ Querschnitte die $2p$ Multiplicatoren $, \ldots, \mu_{2p}$ annimmt, so bestehen zwischen den Polen und den nen $(p-1)$ Relationen der Form

$$A_1 \omega_s(\xi_1 \eta_1) + \cdots + A_n \omega_s(\xi_n \eta_n) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, p-1),$$

e ω gewisse aus algebraischen Functionen und Thetafunctionen mmengesetzte Ausdrücke darstellen, deren Coefficienten von Multiplicatoren μ abhängen. H. St.

PPELL. Sur les fonctions uniformes d'un point ana-tique (x, y). C. R. XCIV. 700-703.

Auszug aus einer Abhandlung, welche das Studium der eindeu-Functionen eines analytischen Punktes (x, y) zum Gegenstande wo y mit x durch eine algebraische Gleichung $F(x, y) = 0$ nden ist, die eine Curve m^{ter} Ordnung und p^{ter} Gattung dar-. Auf diese Functionen werden die Theoreme von Weier-s und Mittag-Leffler für die eindeutigen Functionen einer abeln x ausgedehnt. Zunächst werden Functionen mit einer chen Zahl singulärer Punkte, welche in Pole und in wesent-singuläre Punkte unterschieden werden, in eine Doppel- von der Form

$$f(x, y) = \sum_{\nu = -\infty}^{\nu = +\infty} \frac{A^{(k)}}{(x - a_k)^\nu}$$

ickelt. Alsdann wird mit Hülfe der Function $\theta(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ p Variabeln mit den normalen Perioden der Integrale $u^{(i)}(x, y)$ allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen Function mit einem ntlich singulären Punkte (a, b) gebildet. Zuletzt wird für tionen, welche eine unendliche Reihe singulärer Punkte n, eine Verallgemeinerung des Mittag-Leffler'schen Theorems en. M.

P. APPELL. Développements en série d'une fonc holomorphe dans une aire limitée par des arcs cercle. C. R. XCIV. 1238-1240.

Diese Entwickelungen gelten für alle Punkte innerhalb Bereiches, der von n Kreisbögen $C_1, C_2, \dots$ begrenzt wird ihre Convexität gegen das Innere des Bereiches kehren, mit Mittelpunkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Die Darstellung durch eine Su rationaler Brüche hat die Form:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{(x-\alpha_k)^\nu},$$

wo

$$A_\nu^{(k)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} (z-\alpha_k)^{\nu-1} f(z)\, dz.$$

Es folgt die Entwickelung einer Function in eine Reihe dop periodischer Functionen und drittens in eine Reihe einfach-p discher Functionen. M.

P. APPELL. Sur les fonctions uniformes doublen périodiques à points singuliers essentiels. C. R. X 936-938.

Entwickelung einer doppelt-periodischen Function, we in dem Bereiche zwischen einem Kreise um das feste Centr und dem Umfang des Periodenparallelogramms für die Peri ω, ω' holomorph ist, in der Form:

$$f(x) = \frac{A_0}{2\pi i} + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n Z^{(n)}(a-x), \quad Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du},$$

$$2\pi i A_n = -\frac{1}{1.2\dots n} \int_{C} (u-a)^n f'(u) du, \quad Z^{(n)}(u) = \frac{d^n Z(u}{du^n}$$

Es wird das Theorem von Mittag-Leffler auf diese eind gen doppelt-periodischen Functionen mit wesentlich singul Punkten ausgedehnt. Eine eindeutige doppelt-periodische Fi tion $\Phi(x)$, welche in den Punkten $a_1, a_2, \dots, a_\nu, \dots$ verschwin keine Pole hat und den einen wesentlichen singulären Punk

[..]tzt, lässt sich darstellen in der Form:

$$[f](x) = A \prod_{\nu=1}^{\nu=x} \frac{\theta_1(x-a_\nu)}{\theta_1(x-a)} e^{(a_\nu-a)Z(x-a)} . e^{\sum_{m=1}^{m=m_\nu} \frac{(a-a_\nu)^{m+1}}{1.2...(m+1)} Z^{(m)}(x-a)},$$

[..] die ganzen m_ν passend zu wählen sind. M.

[..] Halphén. Sur une série pour développer les fonctions d'une variable. C. R. XCIV. 629-631.

Die schon von Tchébycheff (Mélanges math. et astr. II. 182, [Pét]ersbourg 1859) und Laguerre (Bull. S. M. F. VII. 72, s. F. d. M. [..] (1879) 214) angewendeten und auch von Abel (Oeuvres II. [..]) gekannten Polynome

$$P_n(x) = \frac{e^x}{1.2\dots n} \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

$$= 1 - \frac{n}{1^2} x + \frac{n(n-1)}{(1.2)^2} x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{(1.2.3)^2} x^3 + \cdots$$

den benutzt zur Entwickelung einer Function in der Form

$$= = A_1 + A_2 P_1\left(\frac{x}{2\beta}\right) + A_3 P_2\left(\frac{x}{3\beta}\right) + \cdots + A_n P_{n-1}\left(\frac{x}{n\beta}\right) + \cdots,$$

β willkürlich und die A_n von x unabhängig sind. Es ist

$$A_n = \frac{1}{1.2\dots n} \int_0^\infty f(n\beta + x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^n e^{-x}) dx.$$

M.

Picard. Sur certaines fonctions uniformes de deux variables indépendantes et sur un groupe de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 579-582.

Die elliptische Modulfunction bietet das erste Beispiel für [..]e solche eindeutige Function einer Variabeln, die durch eine [G]ruppe von unendlich vielen linearen Substitutionen nicht ge[ä]ndert wird. Die Theorie der Abel'schen Functionen bietet hier[..] kein Analogon. Herr Picard hat sich nun die Aufgabe ge[s]tellt, eindeutige Functionen zweier Variabeln zu finden, die den

Modulfunctionen analog sind. Bei Betrachtung der algebr
Relation

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y)$$

ist der Herr Verfasser zu solchen Functionen gelangt (C. R.
835; vergl. F. d. M. XIII. (1881) p. 375). Im Vorliegend
eine Ungleichung aufgestellt, der die Werte der Variabeln
der eindeutigen Functionen genügen müssen, und die
der linearen Substitutionen entwickelt, welche diese Fun
unverändert lassen.

E. PICARD. Sur les fonctions uniformes affecté
de coupures. C. R. XCIV. 1405-1407.

Herr Weierstrass hat in seiner Abhandlung: „Zur T
der eindeutigen analytischen Functionen" die analytische
jeder Function gegeben, die eine endliche Anzahl wesen
singulärer Punkte und eine beliebige Anzahl von Polen
Herr Picard giebt zwei Sätze, mit deren Hülfe diese Th
mit einfachen Veränderungen, auf solche eindeutige Func
ausgedehnt werden kann, die eine endliche Zahl von Sch
(Unstetigkeitslinien) haben, die als gerade Linien vorausg
werden. Es zeigt sich, dass jede solche Function eine S
von n Functionen ist, die nur eine solche Unstetigkeitslinie
Das zweite Theorem betrifft die Zerlegung in primäre Fa

E. GOURSAT. Sur les fonctions uniformes prése
des lacunes. C. R. XCIV. 715-718.

Die hier betrachteten eindeutigen Functionen haben die

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{1-\frac{x}{a_\nu}},$$

wo $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ eine unendliche Reihe imaginäre
willkürlicher Grössen und $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_\nu, \ldots$ eine zweite
in der kein Glied null und für die die Summe Σ mod c_ν

hen Wert hat. Für jeden Punkt x_0 innerhalb eines Be-
s A der Ebene, der keinen Punkt a_ν enthält, lässt sich $F(x)$
ie nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$ fortschreitende
$P(x-x_0)$ entwickeln. Wenn ein um x_0 geschlagener Kreis
Punkt a_ν auf seiner Peripherie enthält, so ist es der Con-
ızkreis für die Reihe $P(x-x_0)$. M.

ÌLDER. Beweis des Satzes, dass eine eindeutige ılytische Function in unendlicher Nähe einer wesent- ı singulären Stelle jedem Wert beliebig nahe kommt.
in Ann. XX. 138-143.

ine Function $f(x)$ sei als Function einer complexen Varia- indeutig bestimmt in jedem Punkte eines Gebietes F mit hme eines darin gelegenen Punktes a, und $f(x)$ sei zugleich (x) im ganzen Gebiete ausser a stetig. Alsdann können de drei Fälle eintreten: 1) Es existirt eine Potenzreihe $-a$, so dass in der Umgebung von a

$$f(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots;$$

ann in der Umgebung von a nach positiven und negativen ;en von $x-a$ entwickelt werden, wobei die negativen in ıer Form auftreten:

$$f(x) = (x-a)^{-n}\{b'_0 + b'_1(x-a) + \cdots\}, \qquad n \text{ ganz.};$$

) wird in unendlicher Nähe von a sowohl beliebig gross ch beliebig klein. Dies wird mit Hülfe Weierstrass'scher ɔien bewiesen. Als Beispiele dienen $e^{\frac{1}{x}}$, $\sin\frac{1}{x}$ und $\cos\frac{1}{x}$, und $\operatorname{cotg}\frac{1}{x}$. Ist $\varphi(x)$ eine eindeutige analytische Function iner wesentlich singulären Stelle im Unendlichen und t-periodisch, so nimmt $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ in jedem den Nullpunkt ;enden Gebiet jeden Wert unendlich oft an.

M.

H. Poincaré. Théorie des groupes fuchsiens. Act
I. 1-62.

Die vorliegende Abhandlung ist die erste unter einer
von ausführlichen Abhandlungen, in welchen der Verfasse
Untersuchungen über eindeutige Functionen mit linearen
formationen in sich darlegt, deren wesentliche Principi
Resultate er vorher zunächst in den Bänden XCII-XCI
C. R. (vergl. hierzu das Referat in Bd. XIII. (1881) diese
schritte p. 247ff.) und in einem zusammenfassenden Aufsa
Klein Ann. XIX. p. 553ff. entwickelt hat.

Die Gruppen linearer Transformationen einer Grösse

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

sind zunächst in continuirliche (solche, unter welchen sich
lich kleine Substitutionen finden) und discontuirliche (m
endlichen Substitutionen) zu trennen. Unter den letzteren
weitere Klassification in den späteren Arbeiten folgt) sonde
Verfasser hier die Gruppen mit reellen Coefficienten ab.
haben die Eigenschaft, dass bei ihren Substitutionen die A
reellen Zahlen in sich übergeht. Unmittelbar mit diese
die Gruppen verbunden, welche aus den eben betrachteten
eine „Transformation mit irgend einer bestimmten Subst
$\left(z, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)$" hervorgehen, also die Gruppen, für welch
die einzelnen Substitutionen in der Form schreiben lassen:

$$\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{\alpha\cdot\frac{az+b}{cz+d}+\beta}{\gamma\cdot\frac{az+b}{cz+d}+\delta}\right),$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganz beliebige, die a, b, c, d wieder reelle Z
bedeuten. Bei den Substitutionen dieser Gruppe geht der
Kreis in der z-Ebene in sich über, der aus der Axe der r
Zahlen durch die Transformation mit der Substitution $\left(z, \frac{\alpha z}{\gamma z}\right.$
entsteht. Es stimmen selbstverständlich diese letzteren Gr

ändig mit den Gruppen mit reellen Substitutionen überein, ie somit allein zur Betrachtung gezogen werden. Die hierbezeichnete Klasse von discontinuirlichen Gruppen ist es, ie Poincaré als „groupes fuchsiens" bezeichnet, während er lie allgemeinsten discontinuirlichen Gruppen linearer Subionen die Bezeichnung als „groupes kleinéens" gewählt hat. Der Ausgangspunkt, den der Verfasser für das Studium un- · Gruppen zu Grunde legt, ist die geometrische Deutung der ren Substitutionen, für welche zunächst die allgemein beiten Sätze entwickelt werden. Mit Bezug auf die Gruppen er Substitutionen seien dann irgend zwei Figuren in der ene als „congruent" bezeichnet, wenn sie durch eine reelle ire Substitution in einander übergeführt werden können. e Definition bringt für die z-Ebene die Einführung einer teuklidischen Massbestimmung mit sich, in welcher die Bogen- e ($z = x + iy$ gesetzt) durch das Integral

$$\int \frac{\operatorname{mod} dz}{y},$$

Flächeninhalt durch

$$\int \frac{dx\,dy}{y^2}$$

gedrückt wird. Die Entfernung zweier Punkte wird dabei gs des Kreisbogens gemessen, der, durch die beiden Punkte end, auf der x-Axe senkrecht steht. Die Bedingung, nach cher zwei Punkte α, β in zwei andere γ, δ übergeführt werden nen, ist dann die der „Congruenz" der entsprechenden Kreisen. Berücksichtigt man, dass bei Ueberführung von α, β h γ, δ gleichzeitig die zu α, β conjugirten Punkte α', β' in die prechenden Punkte γ', δ' übergehen, so lautet diese Begung:

$$\frac{\alpha - \alpha'}{\alpha - \beta'} \cdot \frac{\beta - \beta'}{\beta - \alpha'} = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma - \delta'} \cdot \frac{\delta - \delta'}{\delta - \gamma'}.$$

Bestimmung der Winkel bleibt in unserer Geometrie in der öhnlichen Form enthalten. Es mag dabei noch die Bemerg eingeschaltet werden, dass die Formulirung unserer Massbe-

stimmung sich am einfachsten übersehen lässt, wenn man, anstatt die Variable z in der Ebene zu deuten, eine Kugelfläche mit dem Aequator als Axe der reellen Zahlen zu Hülfe nimmt. Ueberdies gelangt man durch eine Orthogonalprojection der Kugel auf die Aequatorialebene dort zu der gewöhnlich als nicht euklidisch bezeichneten Massbestimmung mit dem Aequator als „Fundamentalkreis" und hat in dieser so herbeigeführten Versinnlichung der linearen Transformationen in der Ebene eine in den einschlägigen Arbeiten von Klein vielfach angewandte Darstellung vor sich.

Gestützt auf diese geometrischen Formulirungen, und die Existenz discontinuirlicher Gruppen reeller linearer Substitutionen vorausgesetzt, hat man nun den Satz, dass jede solche Gruppe Anlass zu einer regulären Gebietseinteilung der complexen Ebene oder eines Teiles derselben giebt, d. h. zu einer Einteilung in mit einander (mit Bezug auf reelle Substitutionen) „congruente" Gebiete, welche jedesmal nur solche Punkte enthalten, die nicht durch eine Substitution der Gruppe aus einander hervorgehen. Dabei entspricht jeder Substitution der Gruppe eindeutig ein bestimmtes Gebiet der Einteilung. Umgekehrt ist durch jede derartige Gebietseinteilung eine Fuchs'sche Gruppe bestimmt, so dass die Frage nach allen diesen Gruppen gleichbedeutend ist mit der geometrischen nach allen so definirten regulären Einteilungen der z-Ebene. In der Folge handelt es sich eben um die Lösung dieses letzteren Problems, aus der geometrischen Formulirung heraus die zugehörigen Gruppen linearer Transformationen zu finden.

Zu dem Ende werden (in § 3) zunächst die möglichen Gestalten der Eckpunkte und Kanten einer solchen Einteilung klassificirt. Berücksichtigt man, dass sich unsere Gebietseinteilungen bis an die x-Axe fortsetzen lassen, so hat man zunächst für die Kanten der Einteilung zwei Fälle: a) Kanten erster Art, die von der x-Axe verschieden sind, b) Kanten zweiter Art, die ein Stück der x-Axe bilden. Weiter klassificiren sich die Eckpunkte a) in solche ausserhalb der x-Axe, b) in solche auf der x-Axe, und diese letzteren sind wieder zu trennen in solche, in

en zwei Kanten erster Art, und in solche, in denen eine Kante er Art und eine Kante zweiter Art einlaufen. Die Kanten er Art eines „Ausgangspolygons“ der Einteilung müssen dabei s paarweise durch Substitutionen der Gruppe einander zugenet sein. Die Substitutionen, welche die sämmtlichen Kanten ter Art des Ausgangspolygons einander zuordnen, bilden dabei System der „erzeugenden Substitutionen“ der Gruppe; sie gen in der Form

$$(z, f_i(z))$$

chrieben sein. Zwischen diesen erzeugenden Substitutionen steht eine Reihe von Relationen der Form

$$z = f_{a_1}(f_{a_2}(\cdots f_{a_\nu}(z)\cdots)),$$

man erhält, wenn man alle Ecken des Ausgangsgebietes mit inen geschlossenen Wegen umgiebt und diese Wege durch entsprechenden Substitutionen (nach den dabei durchlaufenen bieten) charakterisirt. Die Bemerkung, dass zwar durch eine gebene reguläre Einleitung die zugehörige Gruppe völlig bemmt, nicht aber umgekehrt durch eine gegebene Gruppe reeller earer Substitutionen die zugehörige Einteilung, lässt gewisse rmalformen einer solchen Einteilung formuliren, die den folnden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Man zeigt mlich (§ 4), dass die Einteilung stets, und noch auf unendlich le Weisen, in der Form hergestellt werden kann, dass die einlnen Gebiete von Kreisbögen begrenzt erscheinen, die auf der Axe senkrecht stehen. Es wird nun (in § 5) eine erste Klassiation der verschiedenen Arten von Gebietseinteilungen getrofn, und zwar nach der Anordnung der einzelnen Eckpunkte derlben zu „Cyklen“. Der Verfasser definirt nämlich einen „Cyklus n Eckpunkten“ folgendermassen: Man gehe von einem Eckmkte der Einteilung, bezeichne (den Rand des betreffenden sgangspolygons in einem bestimmten Sinne durchlaufend) die stossende Kante, dann gehe man zu der ihr in diesem Polyne zugeordneten Kante (sofern dieselbe erster Art ist), dann m angrenzenden Eckpunkt, zur hier anstossenden Kante, deren conjugirten, u. s. w. Schliesslich kommt man entweder einer Kante zweiter Art, wo dann der Cyklus der durch-

laufenen Eckpunkte, mit zwei Kanten zweiter Art abbre
als offen bezeichnet wird, oder aber man kommt wieder z
Eckpunkte zurück, von dem man ausgegangen, „geschlo
Cyklus“. Je nachdem nun die durchlaufenen Eckpunkte n
Categorie 1) (conf. oben), oder der Categorie 2), oder
lich den Categorien 2) und 3) angehören, spricht man
Cyklen erster Art (für welche sämmtliche Eckpunkte auss
der x-Axe liegen), von Cyklen zweiter und dritter Art.
Cyklen erster und die zweiter Art sind geschlossene, die
Art sind offene Cyklen. Nach dieser Einteilung lassen sic
möglichen Formen des Ausgangspolygons für unsere Grupp
sieben Familien einordnen, je nachdem die Ecken dieses
gons nur Cyklen der ersten, der zweiten, der dritten, der e
und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und erster
endlich allen drei Categorien angehören. Die Mannigfalti
der hiermit bezeichneten Formen, sowie noch eine weitere U
gliederung, auf die wir hier nicht näher eingehen, ist an e
nen Beispielen erläutert, die auch für die folgenden U
suchungen wieder herangezogen werden.

Nun lassen sich zwei nothwendige Bedingungen für die
lichkeit einer regulären Einteilung in unserem oben defi
Sinne angeben. Sie lauten: 1) Es müssen je zwei einand
geordnete Kanten des Ausgangspolygons „congruent“ sein.
muss die Winkelsumme derjenigen Eckpunkte des Aus
polygons, die zu einem Cyklus erster Art gehören, ein ali
Teil von 2π sein. In § 7 wird nun gezeigt, dass diese
gungen auch hinreichend für die Existenz solcher Einteil
sind, und damit ist gleichzeitig der Existenzbeweis für die I
schen Gruppen geliefert. Der Beweis wird durch eine det
geometrische Untersuchung und Discussion der verschi
gestaltlichen Möglichkeiten erbracht. Es schliessen sich Be
an, in welchen insbesondere der durch die Arbeiten von S
und Klein zuerst betonten „regulär-symmetrischen“ Eintei
Erwähnung getan wird.

Eine weitere Klassification der verschiedenen reguläre
bietseinteilungen, die in § 8 ausgeführt ist, und welche jed

viel principiellere Bedeutung besitzt, als die vorhergenannte sification nach Familien, ist die nach dem Geschlechte, deren Formulirung von Klein herrührt. Denkt man sich nämlich paarweise Zuordnung der Kanten erster Art im Ausgangs-gon durch Zusammenbiegen der Ränder wirklich ausgeführt, ntsteht eine Fläche, die jetzt bis auf die von den Kanten iter Art gebildeten Oeffnungen geschlossen ist, und deren chlecht sich sofort aus den bekannten Formeln herleitet.

Nachdem in § 9 die vorhin erwähnte Möglichkeit der Deforion der Gebietseinteilung auch an Beispielen erläutert und ailie, Geschlecht und gewisse Eigenschaften der Cyklen als eränderlich bei solchen Deformationen erwiesen sind, geht Verfasser in § 10 auf den Isomorphismus der Gruppen näher . Zwei Gruppen können nämlich dann und nur dann auf ander isomorph bezogen werden, wenn die Zahl ihrer erzeuden Substitutionen für beide dieselbe ist, und ausserdem die schen jenen statthabenden Relationen für beide Gruppen überstimmen. Insofern nun die Anzahl jener Fundamentalrelatio- mit der Zahl der Cyklen erster Art des Ausgangspolygons reinstimmt, kann man sofort gewisse Schlüsse auf die Mögkeit einer isomorphen Beziehung machen, wobei insbesondere Gruppen hervorgehoben werden, für welche überhaupt keine ationen existiren.

Nun handelt es sich noch darum (§ 11), nachdem gezeigt wie aus den geometrischen Daten des Ausgangspolygons rt die linearen Substitutionen $z = f_i(z)$ gebildet werden kön-, die Charakteristik aller möglichen Ausgangspolygone einer immten Familie und einer bestimmten Anzahl erzeugender stitutionen zu bilden. Der zunächst geometrisch aus den lichen Gestalten der Fundamentalpolygone erschlossene Chaer giebt die Bedingungen (Ungleichungen) für die Coefficien-der linearen Substitutionen, welche als die erzeugenden Subtionen der entsprechenden linearen Gruppe auftreten. Die chführung dieser Aufgabe ist nicht in abstracto gegeben, son- an eine Reihe einzelner Beispiele angeschlossen, welche die retenden Möglichkeiten zu behandeln bestimmt sind.

Den Schluss der Abhandlung bildet eine kurze Zusamm[en]stellung der vorhandenen Litteratur des Gegenstandes.

Dk.

H. Poincaré. Sur les groupes kleinéens. C. R. XCIII. 44-4[6]

Die Arbeit ist inzwischen ausführlich in den „Acta Mathe[-]matica“ erschienen. Das Referat wird daher verschoben.

Dk.

H. Poincaré. Sur les fonctions fuchsiennes. C. R. XCV. 626-629.

Note zur Theorie der eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, welche inzwischen Acta mat. I. 3 i[n] eine Gesammtdarstellung der „Théorie des fonctions fuchsiennes“ eingeordnet ist, und über welche in diesem Zusammenhange re[-]ferirt wird. (Vergl. F. d. M. XIII. (1881) p. 247). Dk.

H. Poincaré. Sur les fonctions uniformes qui se re[-]produisent par des substitutions linéaires. Klein Ann. XIX. 553-565.

Die vorliegende Abhandlung fasst die in den C. R. XCII XCIII. in kurzen Noten veröffentlichten Untersuchungen des Ve[r-]fassers über die Theorie der eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich präcis zusammen. Man vergl. hierüber das Referat in diesem Jahrbuche XIII. (1881) 247. Ein erst[es] Referat über diese inzwischen in ausführlicher Form in de[n] „Act. mat.“ veröffentlichten Untersuchungen vergl. in gegenwä[r-]tigem Bande der Fortschritte p. 338. Dk.

H. Poincaré. Sur les fonctions uniformes, qui se r[e-]produisent par des substitutions linéaires. Klein A[nn.] XX. 52-53.

eplik auf einige von Herrn Klein im Anschluss an die **aré'sche** Arbeit „Sur les fonctions uniformes etc." in Klein Bd. XIX. (siehe das folgende Referat) gemachte Bemeren, die von Poincaré in die Theorie der eindeutigen Funcn eingeführte Nomenclatur betreffend. Dk.

LEIN. Ueber eindeutige Functionen mit linearen ransformationen in sich. Klein Ann. XIX. 565-560, XX. 49-52.

HURWITZ. Ueber eine Reihe neuer Functionen, elche die absoluten Invarianten gewisser Gruppen anzzahliger linearer Transformationen bilden. lein Ann. XX. 125-135.

RAUSENBERGER. Ueber eindeutige Functionen mit ehreren nicht vertauschbaren Perioden. Klein Ann. X. 187-213.

CHOTTKY. Ueber eindeutige Functionen mit linearen ransformationen in sich. Klein Ann. XX. 293-300.

Die Klasse von Functionen, auf welche sich die vorstehend nnten Arbeiten beziehen, hat neuerdings das Interesse der ematiker vielfach in Anspruch genommen. Dieselbe findet Ursprung in folgender Fragestellung: Man bezeichne mit

$$S_1(\eta) = \frac{\alpha_1\eta+\beta_1}{\gamma_1\eta+\delta_1}, \quad S_2(\eta) = \frac{\alpha_2\eta+\beta_2}{\gamma_2\eta+\delta_2}, \dots .$$

Reihe von linearen Transformationen der Veränderlichen η frage nun nach solchen eindeutigen Functionen $\varphi(\eta)$, welche Gleichungen

$$\varphi(S_i(\eta)) = \varphi(\eta) \qquad (i = 1, 2, \dots)$$

hängig von dem Werte des Argumentes η Genüge leisten, he übrigens aber ihren Wert im Allgemeinen verändern, η einer nicht in der Reihe $S_1(\eta)$, $S_2(\eta), \dots$ enthaltenen ren Transformation unterworfen wird. Man erkennt leicht, nicht zu jedem willkürlich angenommenen Systeme von sformationen $S_1(\eta)$, $S_2(\eta), \dots$ Functionen $\varphi(\eta)$ gehören. Es

is

Zeit

Herrn

zulässigen

Zur



ergiebt sich sofort als notwendige Bedingung, dass die Tra formationen $S_1(\eta)$, $S_2(\eta)$,... eine „Gruppe“ bilden, d. h., dass Zusammensetzung irgend zweier Transformationen $S_i(\eta)$, S_k wieder eine Transformation $S_l(\eta)$ der Reihe ergiebt, in Zeich $S_i(S_k(\eta)) = S_l(\eta)$.

Diese Bedingung ist aber noch nicht hinreichend. E Gruppe möge „zulässig“ oder „unzulässig“ genannt werden, nachdem zu ihr Functionen $\varphi(\eta)$ gehören oder nicht. Da kann man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen die Zulässigkeit einer Gruppe angeben, wenn man sich der ge metrischen Repräsentation der Veränderlichen η durch die Punk einer Ebene oder einer Kugel bedient. Es muss nämlich mög lich sein, die Ebene (Kugel) η oder einen zusammenhängende Teil derselben derart in lückenlos neben einander liegende Pa cellen P, P_1, P_2, . . . zu zerlegen, dass die Punkte der Parcelle durch die Transformation S_i in die Punkte der Parcelle P_i übe gehen. Die Betrachtung der unmittelbar an die Parcelle P a stossenden Parcellen lehrt, dass die Begrenzungslinien von paarweise zusammengehören, und dass jede aus der zugehörig durch eine Transformation S hervorgeht. Diese, die zusamme gehörigen Ränder von P vereinigenden Transformationen könn als erzeugende oder Fundamental-Transformationen der Grup bezeichnet werden, indem die Zusammensetzung derselben, w leicht zu sehen, notwendig zu allen Transformationen der Grup führt. Vgl. das obige Referat p. 338.

Geht man umgekehrt von irgend einem vollständig begre ten Gebiete P aus, dessen Begrenzungslinien paarweise du lineare Transformationen verbunden sind, so entstehen aus durch wiederholte Anwendung dieser Transformationen eine Re von Parcellen P_1, P_2, ... Die aus der Zusammensetzung die Transformationen hervorgehende Gruppe ist dann offenbar lässig, falls die Parcellen P, P_1, P_2,... die η-Ebene (Kugel) o einen Teil derselben einfach und lückenlos überdecken. Di umgekehrte Betrachtung bildet im Wesentlichen die Grundl der ersten drei Abhandlungen.

Die erste Note von Herrn Klein bezieht sich auf den F wo die Ausgangsparcelle P von $2p\,(p>1)$ geschlossenen, sich se

einander nicht schneidenden Curven, welche unbeschadet Allgemeinheit als Kreise angenommen werden können, be- zt ist. Diese Curven gehören paarweise zusammen, und zwar jede aus der zugehörenden durch eine lineare Transforma- hervor. Die Zulässigkeit der von diesen Transformationen ugten Gruppe ist geometrisch evident. Das Hauptresultat, zu hem Herr Klein in seiner Note gelangt, lässt sich nun folgen- nassen formuliren: „Die $2p$ Begrenzungscurven der Parcelle P en sich so bestimmen, dass zwei zu der entstehenden Gruppe örende Functionen $w(\eta)$ und $z(\eta)$ existiren, welche eine be- ig vorgelegte algebraische Gleichung $f(w, z) = 0$ vom Ge- lechte p identisch befriedigen.“ Die genannten Functionen itzen unendlich viele wesentlich singuläre Stellen, welche ret über die η-Ebene (Kugel) zerstreut liegen. Eine beson- e Berücksichtigung erfahren die algebraischen Gleichungen reellen Coefficienten.

Die zweite Note enthält ein ähnliches Theorem. Die Par- en-Einteilung, welche hier in Betracht kommt, bezieht sich och nur auf eine Kalotte der η-Kugel. Der Begrenzungskreis Kalotte trägt unendlich viele überall unendlich dicht liegende guläre Punkte der zugehörigen Functionen, und bildet daher die letzteren eine natürliche Grenze.

Die dritte Arbeit (deren Abfassung in eine frühere Zeit t) beschäftigt sich mit specielleren hierher gehörigen Func- en. Sie knüpft an das Princip der Symmetrie des Herrn warz an, welches zu einer unendlichen Zahl von zulässigen ppen hinleitet. Aus diesen werden die einfachsten ausgewählt, che zu bislang nicht behandelten Functionen führen. Zur nzeichnung dieser Gruppen reicht es hin, die betreffende gangsparcelle P anzugeben. Dieselbe besteht aus einem isbogen-Vierecke, mit den Winkeln $0, \frac{\pi}{n}, \pi, \frac{\pi}{n}$, wo n eine ze Zahl bedeutet. Der Fall $n = 3$ ergiebt die Gruppe aller zzahligen linearen Transformationen der Determinante 1, also bekannte Function $J(\omega)$ (oder in der hier gewählten Bezeich- g $J(\eta)$), welche als die absolute Invariante des elliptischen grals erster Gattung definirt werden kann. Es werden nun

die Fälle $n = 4, 6, \infty$, welche die einzigen sind, die ebenfa
auf eine Gruppe ganzzahliger Transformationen führen, eingehe
behandelt. Es stellt sich namentlich heraus, dass die hier a
tretenden Functionen algebraisch von der Function $J(\eta)$ abhäng
Schliesslich folgen einige Bemerkungen über die aus der Z
sammensetzung der Transformationen $\eta + 1$ und $-\frac{1}{m\eta}$ e
stehenden Gruppe, wo m eine ganze Zahl bezeichnet.

Einige Berührungspunkte bietet diese Arbeit in den Resu
taten mit der Abhandlung des Herrn Rausenberger, welcher si
das folgende Problem gestellt hat: „Es ist eine Zahl von linear
Transformationen gegeben; man soll untersuchen, ob die dur
Zusammensetzung derselben hervorgehende Gruppe zulässig i
oder nicht." Der erste Abschnitt der Abhandlung enthält d
Darstellung der allgemeinen Methoden, deren sich Herr Rause
berger bedient. Dieselben sind überwiegend arithmetischer Nat
und stützen sich auf folgende beiden Sätze:

1) Es dürfen in der Gruppe keine infinitesimalen Transfo
mationen vorkommen; d. h. es darf keine Transformation gebe
welche einen beliebig gewählten Punkt der η-Ebene in ein
unendlich benachbarten Punkt überführt.

2) Wenn die durch die Gruppe notwendig bedingten U
stetigkeitspunkte der zugehörenden Functionen die Ebene in
trennte Teile zerlegen, so darf kein Punkt eines dieser Te
durch eine Transformation der Gruppe in einen Punkt ei
anderen Teiles übergehen.

Im zweiten Abschnitt behandelt Herr Rausenberger die du
Zusammensetzung zweier Transformationen entstehenden Grupp
Es werden jedoch diese beiden Transformationen zunächst
specialisirt, dass die Betrachtung auf die beiden Transformatio
$\eta + 1$ und $\frac{-a}{\eta + b}$ zurückgeführt werden kann. Ferner wird a
eine reelle Zahl, b beliebig angenommen. Die Untersuch
ergiebt nun die Fälle, in welchen durch diese beiden Transfor
tionen eine unzulässige, bezüglich zulässige Gruppe erzeugt w

genügt, die letzteren Fälle aufzuzählen. Diese sind, unter n **» ganze Zahl** verstanden:

1) $b = 0,\ a = \dfrac{1}{4\cos^2\dfrac{\pi}{n}}$ (vgl. die Arbeit von Hurwitz),

2) $b = 0,\ a = \dfrac{-1}{4\cos^2\dfrac{2\pi}{n}}$ (ausgenommen $n = 3, 4$),

3) $b = 0$, mod. $a \leqq \dfrac{1}{4}$, (hier sind selbst complexe Werte **a** a zulässig).

Schliesslich ist zu bemerken, dass nur der Fall mod. $a \leqq \dfrac{1}{4}$, **b**eliebig, wegen der sich darbietenden Schwierigkeiten nicht **ll**ständig erledigt werden konnte. (Inzwischen hat Herr Rausen-**rger** diese Lücke in einer neueren Arbeit ausgefüllt).

Der Auszug aus einem Briefe des Herrn Schottky an Herrn **ein** enthält einige Mitteilungen, welche sich darauf beziehen, **e** sich nach Inhalt und Entstehung die Arbeit des Herrn Schottky Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender **ä**chen" zu den späteren Arbeiten über eindeutige Functionen **t** linearen Transformationen in sich verhält. Hz.

. FUCHS. Ueber Functionen, welche durch lineare Substitutionen unverändert bleiben. Gött. N. 1882. 81-84.

Erwiderung auf die Note, welche Herr Klein der Arbeit n Poincaré „Sur les fonctions uniformes" etc. (Klein Ann. IX.) beigefügt hat. Der Verfasser fixirt seinen Anteil an der ıeorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich. an vergl. hierzu noch die Note von Poincaré „Sur les fonctio-s uniformes etc." im XX. Bande der math. Annalen und die ımerkungen von Klein in dessen Abhandlung „Neue Beiträge r Riemann'schen Functionentheorie". Klein Ann. XXI. p. 143 d 214. Dk.

E. Picard. Sur une classe de fonctions uniformes deux variables indépendantes. C. R. XCV. 594-597.

Siehe Abschn. VI. Cap. 6. p. 291.

E. Picard. Sur un groupe de substitutions linéaires. C. R. XCIV. 837-840.

Herr Picard hat in einer Note „Sur certaines fonctions formes de deux variables indépendantes et sur un groupe substitutions linéaires" (C. R. XCIV. p. 579; vgl. diesen Bd. p. 335) gewisse discontinuirliche Gruppen linearer Transformation bei zwei Veränderlichen aufgestellt von der Form:

$$\left(u,\ v,\ \frac{A_3+B_3v+C_3u}{A_1+B_1v+C_1u},\ \frac{A_2+B_2v+C_2u}{A_1+B_1v+C_1u}\right),$$

für welche die A_i, B_i, C_i mit dritten Einheitswurzeln gebild complexe ganze Zahlen sind, und für welche, unter α_i, β_i, γ_i d zu A_i, B_i, C_i conjugirten Zahlen verstanden, die Relationen

$$C_1\gamma_2+C_2\gamma_2+C_3\gamma_3 = A_1\beta_2+A_2\beta_1+A_3\beta_3 = K$$

und

$$A_1\alpha_2+A_2\alpha_1+A_3\alpha_3 = 0 \text{ etc.}$$

bestehen. In Verbindung mit den in der früheren Abhandlung gegebenen Beziehungen erweist sich nun zunächst K von de Form a^2-ab+b^2. Betrachtet man dann einmal Substitutionen T mit $K=1$, und zweitens die allgemeinen S, S', für welche K von eins verschieden, und bezeichnet zwei Substitutionen S, S' als „äquivalent", für welche $S'=ST$, so ergiebt sich hieraus für jedes K eine Einteilung der zugehörigen Substitutionen in nicht äquivalente Substitutionen. Für K Primzahl werden die Typen dieser Systeme, sowie die Anzahl derselben $[=2K(K+2)]$ bestimmt.
Dk.

H. Poincaré. Sur les groupes discontinus. C. R. XCIV. 840-843.

Herr Picard hat in einigen Noten in den Comptes rendus

ersten Beispiele für discontinuirliche Gruppen gebrochener »arer Substitutionen bei zwei Veränderlichen gegeben. (Man e Comptes rendus vol. XCIV. p. 579 u. 837; vergl. diesen Band 135 u. 350; man vergl. ferner die inzwischen veröffentlichten iteren hierher gehörigen Abhandlungen von Picard in den mptes rendus von 1883, den Acta mathematica vol. 1 und 2 1 den Annales de l'école normale.) Herr Poincaré zeigt in vorgender Note, wie man durch zahlentheoretische, algebraische 1 geometrische Betrachtungen auf unendlich viele derartige appen geführt wird.

Einmal ergiebt die Theorie der quadratischen Formen für le quadratische Form $F(x,y,z)$ mit ganzzahligen Coefficienten fort unendlich viele Substitutionen

$$(1) \qquad (x,\, y,\, z,\;\; ax + by + cz,\;\; a'x + b'y + c'z,\;\; a''x + b''y + c''z)$$

t ganzzahligen Coefficienten, welche die obige Form in sich erführen; aus ihnen ergiebt sich dann sofort eine discontinuirhe Gruppe linearer Substitutionen bei zwei Veränderlichen in r Form

$$(2) \qquad \left(x,\; y,\; \frac{ax + by + c}{a''x + b''y + c''},\; \frac{a'x + b'y + c'}{a''x + b''y + c''}\right),$$

.d dieselbe Regel ist auch auf Formen mit complex-ganzzahlin Coefficienten ausdehnbar.

Zweitens lässt sich aus jeder Gruppe linearer Substitutionen ner Veränderlichen mit reellen Coefficienten

$$(3) \qquad \left(t,\; \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right)$$

ne entsprechende (isomorphe) Gruppe für zwei Veränderliche erstellen. Man betrachte nämlich etwa die quadratische Form

$$z^2 - xy$$

nd setze t als der Gleichung

$$xt^2 - 2zt + y = 0$$

enügend voraus. Führt man dann die obigen Substitutionen (3) in ie letzte Gleichung ein, so ergiebt dieselbe eine lineare Transformaion der Coefficienten x, y, z derselben von der obigen Form (1), nd aus ihr folgt wieder eine Gruppe linearer Transformationen

zweier Veränderlichen x, y in der Form (2), eine Gruppe, wel gleichzeitig mit der in (3) gegebenen discontinuirlich ist. Formulirung ist einer einfachen geometrischen Deutung und ei unmittelbaren Ausdehnung auch auf solche Gruppen (3), für wel die Coefficienten der Substitutionen nicht reell sind, fähig.

Dk.

R. Dedekind und H. Weber. Theorie der algebraisch Functionen einer Veränderlichen. Kronecker J. XCII. 181-

Zweck dieser ausführlichen Arbeit ist, die Entwickelung ein allgemeinen und strengen Theorie der algebraischen Function einer Veränderlichen zu geben, ohne beschränkende Voraus setzungen über die Singularitäten derselben zu machen und oh von den Grundsätzen über Stetigkeit und Entwickelbarkeit v Functionen überhaupt Gebrauch zu machen, welche z. B. d Riemann'schen Theorie zu Grunde liegen, die aber bezügli einer strengen Begründung bisher noch gewisse Schwierigkeit bieten. Die Mittel hierfür werden durch eine Verallgemeineru der Theorie der rationalen Functionen gewonnen, welche d Uebertragung des Fundamentalsatzes von der Zerlegbarkeit gan rationaler Functionen in lineare Factoren auf das Gebiet d algebraischen Functionen ermöglicht. Zu diesem Ziele führt d Uebertragung derjenigen Methoden, deren sich die Zahlentheor zu einem ähnlichen Zwecke bedient, auf die Theorie der Fu tionen, die ohne Weiteres möglich war. Demnach läuft auch d erste Abteilung der vorliegenden Arbeit im Wesentlichen, u soweit es in der Natur des Gegenstandes liegt, der allgemein Darstellung der Theorie der algebraischen Zahlen (ohne indess die Kenntnis derselben beim Leser vorauszusetzen) parallel, w sie der erste der genannten Herrn Verfasser in einem Anhang zu Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie (2[te] Aufl., au führlicher in der 3[ten] Aufl.) und in einem Aufsatze: „Sur la théori des nombres entiers algébriques" in Darboux Bull. (2) I. (s F. d. M. X. (1877) 126) gegeben hat. Besteht zwischen de Grössen θ und z die algebraische Gleichung

$$f(\theta, z) \equiv \theta^n + b_1 \theta^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\theta + b_n = 0,$$

die b rationale Functionen von z sind, so hat das System · rationalen Functionen von θ und z die Eigenschaft, dass ich durch Anwendung der vier Species auf seine Individuen oducirt, und wird deshalb als ein Körper algebraischer Functen Ω vom Grade n bezeichnet. Jede Function ξ desselben t sich stets und nur auf eine Weise in die Form setzen:

$$\xi = x_0 + x_1\theta + \cdots x_{n-1}\theta^{n-1},$$

die x rationale Functionen von z sind, und umgekehrt geen alle Functionen von dieser Form dem Körper Ω an; allseiner lässt sich ξ linear und homogen durch irgend n Functen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ (Basis) des Körpers Ω darstellen, dann und nur tn, wenn $\eta_1, \ldots, \eta_n$ rational unabhängig sind (ein rational irreibles System bilden), d. h. wenn zwischen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ keine lation

$$y_1\eta_1 + \cdots + y_n\eta_n = 0$$

in z rationalen y besteht, ohne dass die y sämmtlich verwinden. Jede Function ξ in Ω genügt einer irreductiblen eichung mit in z rationalen Coefficienten, deren Grad n oder Teiler von n ist; eine Gleichung n^{ten} Grades

$$\varphi(\xi) \equiv \xi^n + a_1\xi^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\xi + a_n = 0$$

· ξ erhält man, indem man unter Zugrundelegung einer beliebin Basis $\eta_1, \ldots, \eta_n$ das Gleichungssystem $\xi\eta_i = \sum_{\lambda=1}^{n} y_{i\lambda}\eta_\lambda$ aufstellt und $, \ldots, \eta_n$ hieraus eliminirt; $N(\xi) \equiv (-1)^n b_n = \Sigma \pm y_{11} \ldots y_{nn}$ heisst e Norm von ξ, $S(\xi) \equiv b = \sum_{\lambda=1}^{n} b_{\lambda\lambda}$ die Spur von ξ; für Norm id Spur existiren sehr einfache Sätze; hervorgehoben sei die eziehung $\varphi(t) = N(t - \xi)$, wo t eine willkürliche Grösse beutet; ferner: $\varphi(t)$ ist entweder irreductibel oder eine ganze otenz einer irreductibeln Function. Discriminante von n Funconen $\eta_1, \ldots, \eta_n$ in Ω heisst die rationale Function von z:

$$\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n) \equiv \Sigma \pm S(\eta_1\eta_1) \ldots S(\eta_n\eta_n).$$

st $\eta_1, \ldots, \eta_n$ eine Basis von Ω und $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ irgend ein System von Functionen in Ω, so ist

$$\Delta(\eta'_1, \ldots, \eta'_n) = X^2\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n),$$

wo X die Determinante der η' nach den η ist; und die not
dige und hinreichende Bedingung dafür, dass $\eta_1, \ldots, \eta_n$
Basis von Ω bilden, ist, dass $\Delta(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ nicht identisch
schwinde.

Eine Function ω in Ω heisst eine ganze Function v
wenn in der Gleichung niedrigsten Grades, der ω ge
$\omega^e + b_1 \omega^{e-1} + \cdots + b_{e-1} \omega + b_e = 0$, die b ganze rationale F
tionen von z sind. Jede Function η in Ω kann durch Mul
cation mit einer rationalen Function von z in eine ganze F
tion verwandelt werden. Das System $\mathfrak{o}$ der ganzen Function
Ω reproducirt sich durch Addition, Subtraction und Multiplic
seiner Individuen; ω heisst durch ω' teilbar, wenn $\omega = \omega'\omega''$
wo ω'' ebenfalls eine ganze Function bedeutet. Aus jeder
von Ω lassen sich unzählig viele andere ableiten, deren
mente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ganze Functionen von z sind; während
$x_1 \omega_1 + \cdots + x_n \omega_n$ sicher eine ganze Function ist, so lange x_1,
ganze rationale Functionen von z sind, braucht nicht umge
jede ganze Function in dieser Form darstellbar zu sein; damit
aber der Fall sei, ist notwendig und hinreichend, dass der
der Discriminante $\Delta(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ ein Minimum sei, d. h.
grösser sei, als der irgend einer Basis, die aus lauter g
Functionen besteht. In diesem Fall heisst das System $\omega_1, \ldots$
dessen Herstellungsweise angegeben wird, eine Basis v
Die Discriminante einer solchen ist von der Wahl der Basi
abhängig, wenn man noch den Coefficienten der höchsten P
von z durch Division mit einer Constanten $= 1$ macht; d
heisst sie Discriminante des Körpers $\Omega : \Delta(\Omega)$. Ein Syst
von Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, (in Ω) heisst ein Modul, wen
Functionen desselben addirt, subtrahirt oder mit ganzen ra
len Functionen von z multiplicirt, wieder Functionen dess
liefern; der Modul heisst ein endlicher, wenn er sich aus
endlichen Anzahl von Elementen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ durch diese Ope
nen erzeugen lässt, und wird durch $\mathfrak{a} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_m]$ bezei
$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ heisst seine Basis. Jeder endliche Modul besitzt ra
irreductible Basen (alle von derselben Elementenanzahl). Ist
Function in $\mathfrak{a}$ auch in einem zweiten Modul $\mathfrak{b}$ enthalten, so

lurch $\mathfrak{b}$ **teilbar,** $\mathfrak{b}$ ein Teiler von $\mathfrak{a}$ etc. (Der Teiler ist um-**sender** als das Vielfache; damit stimmt die von den Zahlen r gewohnte Anschauung, wenn man statt der Zahlen a und b Systeme $0, \pm a, \pm 2a, \ldots$, resp. $0, \pm b, \pm 2b, \ldots$ nimmt.) Alle **nctionen**, die in $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ enthalten sind, bilden ebenfalls einen **dul**, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$; **selbe** gilt für den grössten gemeinschaftlichen Teiler, d. h. **n** Inbegriff aller Functionen $\alpha + \beta$, wo α und β irgend welche **nctionen** aus $\mathfrak{a}$, resp. $\mathfrak{b}$ sind. Unter Product von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ver-**ht** man ferner den Inbegriff sämmtlicher Functionen $\Sigma\alpha\beta$, der **bst** ein Modul ist und zwar ein endlicher, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ es sind. **ist** zwar $\mathfrak{ab} = \mathfrak{ba}$, $\mathfrak{abc} = \mathfrak{acb} = \ldots$, aber $\mathfrak{ab}$ braucht nicht **rch** $\mathfrak{a}$ teilbar zu sein, dagegen ist, falls $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{b}_1$ **lbar** ist, auch $\mathfrak{ab}$ durch $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1$ teilbar. Endlich ist $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}$ der In-**griff** aller Functionen γ von der Art, dass $\gamma\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ teilbar **t**, und ebenfalls ein Modul; $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{a}$ ist durch $\mathfrak{b}$ teilbar, wenn auch **cht** immer gleich $\mathfrak{b}$. Aus der Definition des Teilers ist klar, **as** unter der Congruenz $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}$ zu verstehen ist. Hieran **hliesst** sich dann unmittelbar die Definition eines vollständigen **estsystems** des Moduls $\mathfrak{b}$ nach $\mathfrak{a}$. Von Wichtigkeit ist ferner der **egriff** der Norm $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ von $\mathfrak{a}$ in Bezug auf $\mathfrak{b}$; es ist dies eine **ewisse** rationale, in bestimmter Weise herzustellende Func-**on** von z, welche die Eigenschaft hat, dass durch Multipli-**ation** mit ihr jede Function von $\mathfrak{b}$ in eine Function von $\mathfrak{a}$ ver-**andelt** wird. Für die Norm wird eine Reihe von Sätzen ab-**eleitet**. Das für die vorliegende Theorie wichtigste Gebilde, das **leal**, ist eine besondere Art von Modul; ein System $\mathfrak{a}$ von ganzen **unctionen** von z in Ω heisst ein Ideal, wenn 1) Summe und **ifferenz** je zweier Functionen in $\mathfrak{a}$ wieder eine Function in $\mathfrak{a}$ **rgeben**, 2) das Product einer jeden Function in $\mathfrak{a}$ mit einer **eden** Function in $\mathfrak{o}$ wieder eine Function in $\mathfrak{a}$ ist. Der Modul $\mathfrak{o}$ **st** selbst ein Ideal, und jedes Ideal ist durch $\mathfrak{o}$ teilbar, wie über-**haupt** $\mathfrak{o}$ in der Theorie der Ideale die Rolle der Einheit spielt. Bedeutet μ eine beliebige Function in $\mathfrak{o}$, so ist das System $\mathfrak{o}\mu$

aller durch μ teilbaren ganzen Functionen ein Ideal, welches Hauptideal heisst. Grad des Ideals $\mathfrak{a}$ heisst der Grad der ganzen rationalen Function $(\mathfrak{o}, \mathfrak{a})$, die kurz Norm von $\mathfrak{a}$ genannt und mit $N(\mathfrak{a})$ bezeichnet wird, dieselbe ist stets eine Function in $\mathfrak{o}$ und Teiler der Norm einer jeden Function α in $\mathfrak{a}$; $N(\mathfrak{o}) = 1$. Wesentlich unterscheidend für die Ideale von den allgemeinen Moduln ist der nur für Ideale geltende Satz: „Sind μ, μ_1, ν, ν_1 Functionen in $\mathfrak{o}$ und $\mu \equiv \mu_1$, $\nu \equiv \nu_1$ (mod. $\mathfrak{a}$), so ist auch $\mu\nu \equiv \mu_1\nu_1$ (mod. $\mathfrak{o}$)." Heisst nun eine Function α in $\mathfrak{o}$ durch das Ideal $\mathfrak{a}$ teilbar, wenn $\mathfrak{o}\alpha$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, d. h. wenn α eine Function in $\mathfrak{o}$ ist, heissen ferner zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ relativ prim, wenn ihr grösster gemeinsamer Teiler $\mathfrak{o}$ ist, und nennt man endlich $\mathfrak{p}$ ein Primideal, wenn es von $\mathfrak{o}$ verschieden ist und nur $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{p}$ als Teiler hat, so lässt sich ohne Mühe eine Reihe von Sätzen über die Teilbarkeit der Ideale aufstellen, die denjenigen über die Teilbarkeit der ganzen rationalen Functionen entsprechen. Um aber die vollständige Analogie, die zwischen den Idealen und den ganzen rationalen Functionen herrscht, zu beweisen, bedarf es eingehenderer Betrachtungen; aus diesen ergiebt sich: ist $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{a}$ teilbar, so giebt es ein und nur ein Ideal $\mathfrak{b}$, welches der Bedingung $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ genügt; jedes von $\mathfrak{o}$ verschiedene Ideal ist entweder ein Primideal, oder es lässt sich, und zwar nur auf eine Weise, als Product von lauter Primidealen darstellen; ferner ist $N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a})\,N(\mathfrak{b})$; endlich: Primideal und Ideal ersten Grades sind identische Begriffe und überhaupt der Grad eines Ideals gleich der Anzal seiner Primfactoren. Da die Discriminante von Ω durch das Product $\Delta(\Omega) = \Pi(z-c)^{n-s}$ darstellbar ist, wo alle diejenigen linearen Ausdrücke $z-c$ zu multipliciren sind, die durch die zweite oder eine höhere Potenz eines Primideals teilbar sind, und wo s die Anzahl der verschiedenen in $z-c$ aufgehenden Primideale bedeutet, so ist ersichtlich, dass es nur eine endliche Anzahl linearer Functionen $z-c$ giebt, die durch das Quadrat eines Primideals teilbar sind. Bezeichnet nun $\mathfrak{p}$ ein solches Primideal, und ist e der Exponent der höchsten in seiner Norm aufgehenden Potenz von $\mathfrak{p}$, so heisst das über alle derartigen Primideale erstreckte Product $\Pi\mathfrak{p}^{e-1}$ das Verzweigungsideal $\mathfrak{z}$ des Körpers Ω, das wegen

er Wichtigkeit einer eingehenden Untersuchung unterworfen l. Auf Grund dieser Theorie der ganzen Functionen in Ω len nun auch die gebrochenen Functionen untersucht. Den uss der ersten Abteilung bildet die Behandlung der rationalen ısformationen der Functionen des Körpers Ω, aus der sich Berechtigung ergiebt, an Stelle der unabhängigen Veränderen z jede beliebige Function des Körpers als unabhängige iable der Betrachtung zu Grunde legen zu dürfen, wenn es die Erhaltung der Gesammtheit der Functionen des Körpers ommt; die Begriffe: Basis, Norm, Spur, Discriminante, ganze ıction, Modul, Ideal sind allerdings wesentlich abhängig von Wahl der unabhängigen Variablen z.

Sind die soweit geführten Betrachtungen über die Functionen Körpers Ω rein formaler Natur, d. h. bewegten sie sich überall im Gebiete der rationalen Rechnungsoperationen, ohne die nerischen Werte der Functionen in Betracht zu ziehen, so ngt sich nun die Frage auf, welche an die Spitze der zweiten teilung gestellt wird: „In welchem Umfange ist es möglich, ı Functionen in Ω solche bestimmte Zahlenwerte beizulegen, s alle zwischen diesen Functionen bestehenden rationalen ationen (Identitäten) in richtige Zahlengleichungen übergehen?" diesem Zwecke wird folgende, zunächst ganz abstrakte Defion aufgestellt: Wenn alle Individuen $\alpha, \beta, \ldots$ des Körpers Ω ch bestimmte Zahlenwerte $\alpha_0, \beta_0, \ldots$ so ersetzt werden, s (I.) $\alpha_0 = \alpha$, falls α eine Constante ist, und allgemein

$$\text{(II.)}\ (\alpha+\beta)_0 = \alpha_0 + \beta_0, \qquad \text{(III.)}\ (\alpha-\beta)_0 = \alpha_0 - \beta_0,$$

$$\text{(IV.)}\ (\alpha.\beta)_0 = \alpha_0 . \beta_0, \qquad \text{(V.)}\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_0 = \frac{\alpha_0}{\beta_0}$$

d. so soll einem solchen Zusammentreffen bestimmter Werte „Punkt" P zugeordnet werden, und wir sagen, in P sei $= \alpha_0$, oder α habe in P den Wert α_0. Zwei Punkte heissen ts und nur dann verschieden, wenn eine Function α in Ω exirt, die in beiden Punkten verschiedene Werte hat. Es sind n die Primideale, die den Uebergang von dieser Definition des ınktes zum Nachweise seiner Existenz vermitteln. Ist nämlich irgend eine in P endliche Variable, so ist der Inbegriff $\mathfrak{p}$ aller

derjenigen ganzen Functionen von $\mathfrak{z}$, welche in P verschwind ein Primideal in $\mathfrak{z}$, das vom Punkte P erzeugte Primideal $\mathfrak{p}$; jedes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{z}$ stets durch einen, und nur durch ein Punkt P, den Nullpunkt von $\mathfrak{p}$, erzeugt werden kann, so ergi sich der Weg, um alle existirenden Punkte P und jeden nur einziges Mal zu erhalten, deren Inbegriff die Riemann'sche Fläc T bildet, von selbst. Dies ist die Grundlage, auf der dann Hülfe der Ergebnisse der ersten Abteilung eine Theorie der alg braischen Functionen entwickelt wird. Eine ganz formale De nition des Differentialquotienten führt zu der Geschlechtszal und zu einer allgemeinen Darstellung der Differentiale ers Gattung. Hieran schliesst sich der Beweis des Riemann-Roc schen Satzes über die Anzahl der willkürlichen Constanten in ein durch ihre Unendlichkeitspunkte bestimmten Function und Theorie der Differentiale zweiter und dritter Gattung.

T.

F. Klein. Ueber Riemann's Theorie der algebraisch Functionen und ihrer Integrale. Leipzig. Teubner.

Es sind zwei Hauptpunkte, durch welche sich die vorliege Darstellung der Riemann'schen Theorie von der Darstellung un scheidet, wie sie Riemann selber in seiner berühmten Abhandl über Abel'sche Functionen gegeben hat. Einmal benutzt H Klein durchweg physikalische Anschauungen, wo sich Riem des Dirichlet'schen Princips bedient; sodann legt Herr K seiner Untersuchung beliebige geschlossene, nicht nur, wie mann, mehrblättrige über einer Ebene ausgebreitete Flächen Grunde.

Die Vorteile, welche diese Abweichungen gewähren, lie namentlich nach der didaktischen Seite hin (siehe d. Vorw Es tritt „das heuristische Element der Methode klarer herv der Leser gewinnt beim Studium der Schrift unwillkürlich Empfindung, dass er selber aus sich auf dem vorgezeichn Wege die Theorie hätte entwickeln können. Hierauf vor Al dürfte die grosse anregende Kraft zurückzuführen sein, wel

von Herrn Klein gegebenen Darstellung innewohnt. Was die age der Untersuchung angeht, so wird zunächst im ersten schnitt die physikalische Deutung der Functionen eines comxen Argumentes ausführlich studirt, bei welcher der reelle il der Function als Geschwindigkeitspotential einer stationären ömung in der Ebene, deren Punkte die Werte des Argumentes metrisch repräsentiren, betrachtet wird. Die rationalen Funcnen und ihre Integrale geben hier zweckmässige Beispiele; sie fern alle einförmigen Strömungen, bei welchen durch jeden nkt der Ebene im Allgemeinen nur eine Strömungslinie geht. er Uebergang von der Ebene zur Kugel beseitigt einmal die Aushmestellung, welche in der Ebene der Punkt $z = \infty$ einnimmt, dass nunmehr auf der Kugel der Verlauf der Strömungen llständig überblickt werden kann. Es schliesst sich an diesen bergang aber auch sofort die Fragestellung an, welche als e Riemann'sche bezeichnet wird, und aus der sich alles Weitere twickelt: Man nehme eine beliebige geschlossene Fläche im ume; welche einförmigen Strömungen existiren auf derselben? iese Strömungen führen offenbar zu einer wohlumgrenzten Classe on Functionen, deren Eigenschaften unmittelbar durch die Anchauung der zugehörigen, die Functionen definirenden Strömunen erkannt werden. Die Ausführung dieser Idee und damit die ntwickelung der Riemann'schen Theorie enthält der zweite Abchnitt der Schrift. Die geschlossenen Flächen werden zuerst ach der Zahl p der sie nicht zerstückenden Rückkehrschnitte ingeteilt und der weiteren Betrachtung bestimmte Normalflächen ür das Geschlecht p eine Kugel mit p Anhängseln) zu Grunde elegt. Die physikalische Anschauung lehrt nun die allgeeinsten auf einer solchen Normalfläche existirenden einförmigen trömungen kennen. Es ergeben sich dann die Sätze der Rienann'schen Theorie einfach durch Uebertragung der anschauungsnässig erkannten Eigenschaften dieser Strömungen auf die durch lieselben definirten Functionen. Der Uebergang von der Normalläche zu der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche, welcher durch die eindeutigen unter den gefundenen Functionen vermittelt werden kann, ist für den Fall $p = 1$ auch rechnerisch durchgeführt,

wie überhaupt die allgemeinen Untersuchungen vielfach d
specielle Beispiele erläutert sind.

Der dritte Abschnitt der Schrift ist weiteren Folgeru
aus den vorhergegangenen Entwickelungen gewidmet. Er
hält nicht nur der Form, sondern auch dem Inhalte nach
Resultate über die eindeutige conforme Abbildung geschlos
Flächen auf einander. Hierbei werden insbesondere auch
vom Verfasser als „symmetrisch" bezeichneten Flächen betrac
welche eine conforme Abbildung auf sich zulassen, die zwei
angewandt, zur Identität führt. Diese Flächen, welche auch
die zu reellen algebraischen Gleichungen gehörenden Flä
definirt werden können, gewinnen ein besonderes Interesse
dadurch, dass sich die berandeten und Doppelflächen als spec
derartige Flächen auffassen lassen. Hz.

N. Herz. Beweis des Riemann'schen Satzes über al
braische Functionen. Hoppe Arch. LXVIII. 14-18.

Es handelt sich um den Satz: „Jede Function u vo
welche in einer durch die irreductible Gleichung $f(y,x)=0$
finirten Fläche vom Geschlechte p eindeutig ist und nur für
endliche Anzahl ($=m$) von Punkten unstetig von der e
Ordnung wird, ist in y und x rational darstellbar." Der Be
des Satzes lässt sich in zwei Teile trennen, deren erster den
gemeinen Ausdruck für jene Function u herstellt und zeigt,
derselbe im Allgemeinen $m-p+1$ willkürliche Constanten be
deren zweiter aus y und x rationale Functionen von verla
Beschaffenheit mit gleichfalls $m-p+1$ willkürlichen Consta
bildet. Hier handelt es sich um den ersten Teil des Bewe
welcher durch Constantenzählung erbracht wird, und dabei
Gegensatz zu der Darstellung bei Riemann, lediglich die Th
der algebraischen Functionen heranzieht, ohne die Abel's
Integrale zur Construction einer Function u zu benutzen.
wäre dabei vom Verfasser wol der analoge Betti'sche Be
(in der Abhandlung: Sopra le funzioni algebriche di una v
bile complessa. Annali delle Università Toscane. Tom.

2) **in Vergleich** zu ziehen gewesen; übrigens finden auch hier **Bemerkungen** von Prym über die Durchführbarkeit der ab- **enden Methoden** in speciellen Fällen in der gleichfalls diesen **nann'schen Satz** betreffenden Abhandlung im LXXXIII. Band **Borchardt J.** p. 253 Anwendung (siehe F. d. M. IX (1877) 84.). Dk.

CASORATI. Sopra il teorema di Jacobi. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 623-634.

Der Verfasser hat schon früher (C. R. Dec. 1863 u. Jan. 1864) **auf** aufmerksam gemacht, dass das Theorem von Jacobi, nach n eine Function einer Variablen mit mehr als zwei Perioden nöglich ist, zu beschränken sei auf Functionen, die für jeden rt der Variable nur einen oder nur eine endliche Zahl von rten habe, was Jacobi vermutlich ebenso aufgefasst, aber ht ausdrücklich hervorgehoben habe. Da diese Bemerkungen wenig beachtet und zum Teil nicht verstanden wurden, will Verfasser in weiteren Mitteilungen nochmals die Existenz dytischer Functionen einer Variablen mit mehrfacher Periodi- it und die Möglichkeit der Umkehrung eines einzelnen Inte- ls zeigen. H. St.

. SCHUMANN. Ein Beweis für ein Theorem von Liouville, die doppelt-periodischen Functionen betreffend. Schlömilch Z. XXVII. 125-126.

Der Satz von Liouville, dass sich die Summe der Pole von Summe der Nullpunkte in einem elementaren Periodenparal-)gramm um eine vollständige Periode unterscheidet, wird her- leitet aus dem Integral $\int z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, das über die Umgren- ng eines solchen Parallelogramms, dessen Ecken den Werten

$$z_0,\ z_0+\omega,\ z_0+\omega+\omega',\ z_0+\omega'$$

itsprechen, ausgedehnt wird. M.

L. Gegenbauer. Ueber die doppelt-periodischen tionen zweiter Art. Wien. Ber. LXXXVI. 969-975.

Stellt man eine doppelt-periodische Function einmal Form eines Quotienten zweier Producte von Jacobi'schen tionen H dar, und zweitens mit Hülfe einer Function, nur an einer einzigen Stelle und den congruenten von dei Ordnung unendlich wird, und ihrer successiven Ableitun eine Form, welche der Partialbruchzerlegung rationaler tionen entspricht, so besteht zwischen den in diesen Dan gen auftretenden Grössen eine lineare Relation. Einen sp Fall für diesen hier bewiesenen Satz liefert die von F. Brioschi (C. R. XCII. 1881. 325., s. F. d. M. XIII. (1881) bewiesene Relation zwischen den Grössen ω, die in den Ausdrücken für die der Gleichung

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)k^2 sn^2 u + h]y$$

genügenden Functionen enthalten sind.

O. Rausenberger. Zur Theorie der Functione mehreren nicht vertauschbaren Perioden. Kle XX. 47-49.

Ist $f(x)$ eine eindeutige Function, welche den Fun gleichungen

$$f(x+1) = f(x), \quad f\left(-\frac{1}{x}\right) = f(x)$$

genügt, (Modulfunction), so genügt jede Function $F($ sich rational aus $f(x.\sqrt{n})$ und $f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ zusammensetzt, dei tionalgleichungen

$$F(x+\sqrt{n}) = F(x) \quad \text{und} \quad F\left(-\frac{1}{x}\right) = F(x);$$

oder sie besitzt, wie man sich ausdrücken mag, die P $x+\sqrt{n}$ und $-\frac{1}{x}$. Wie sich dieses Beispiel in die

nen Conceptionen über eindeutige Functionen mit linearen nsformationen in sich einordnet, sehe man einerseits in der teren Abhandlung desselben Verfassers: „Ueber eindeutige ctionen mit mehreren nicht vertauschbaren Perioden“ (Klein ı. XX. p. 187. und diesen Band p. 345), andererseits in den viel allgemeineren Gesichtspunkten ausgehenden Arbeiten Poincaré und Klein über die Theorie der eindeutigen Funcıen mit linearen Transformationen in sich. Dk.

RAUSENBERGER. Ueber periodische Functionen zweiter Gattung. Klein Ann. XX. 550-557.

Herr Rausenberger definirt im XVIII. Bande der Math. Ann. der Arbeit: „Theorie der allgemeinen Periodicität“ als „periodche Function“ eine Function $F(x)$, welche der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = F(x)$$

ıügt, wo $\varphi_1(x)$ eine beliebige algebraische Function bedeutet F. d. M. XIII. (1881) p. 317). Hieran knüpft er jetzt die Bechtung „periodischer Functionen zweiter Gattung“, definirt rch eine oder mehrere Functionalgleichungen

$$F[\varphi_1(x)] = \psi_1[F(x)],$$

rin $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(x)$ allgemein algebraische Functionen beıten. In der vorliegenden Abhandlung sind diese Functionen ıbesondere als lineare vorausgesetzt. Mit Bezug auf diese Funcınen wird nun die schon für jene periodischen Functionen ster Gattung beantwortete Frage gelöst nach allen eindeutigen, nfach oder mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattung it einer endlichen Anzahl von wesentlichen Discontinuitätsıncten.

Die einfach periodischen Functionen zweiter Gattung erweisen sich sofort auf vier Normalformen zurückführbar:

$$\begin{array}{lll} (1) & F(x+1) & = F(x)+1, \\ (2) & F(x+1) & = q.F(x), \\ (3) & F(p.x) & = F(x)+1, \\ (4) & F(p.x) & = q.F(x), \end{array}$$

wobei noch mod. $p < 1$ angenommen werden darf; hieraus e geben sich leicht die wesentlichen Eigenschaften solcher Fu tionen.

Für die mehrfach periodischen Functionen zweiter Gattu zeigt die Aufstellung einer Reihe von Normalformen, „dass a überhaupt existenzfähigen Functionen zweiter Gattung mit me reren nicht vertauschbaren Perioden, ganz unwesentliche Au nahmefälle abgerechnet, unendlich viele wesentliche Disconti tätspunkte besitzen müssen." Zum Schlusse wird noch die B zeichnung der „periodischen Functionen dritter Gattung" fü für Functionen $F(x)$, welche der Gleichung

$$F[\varphi_1(x)] = G[x, F(x)]$$

genügen, worin φ_1 eine rationale Function von x, G eine in und $F(x)$ rationale Function bezeichnet. Dk.

Tchébychef. Ueber die Functionen, die für gewiss Werte der Variabeln wenig von Null abweichen. Petersb. Abh. X. (Russisch).

Weicht die Function $F(x)$ zwischen den Grenzen $x = -$ und $x = +h$ wenig von Null ab, so kann sie für einen ausser halb dieser nahe bei denselben liegenden Wert von x nur dan gross werden, wenn ihr Grad ziemlich gross ist. In der ange führten Abhandlung wird die Aufgabe gelöst, die höchste Grenz für den Wert, den eine Function n^{ten} Grades, welche nicht meh als um $\pm C$ von Null zwischen den Grenzen $x = -h$ und $x = +$ abweicht, für einen ausserhalb dieser liegenden Wert H von annehmen kann, zu bestimmen. Da durch Einführen eines Pro portionalitätsfactors der Wert der Function für $x = H$ imme einer gegebenen Grösse M gleich gemacht werden kann, so nur eine Function zu suchen, die zwischen den Grenzen $x = -$ und $x = +h$ am wenigsten von Null abweicht, und für $x =$ den Wert M annimmt; dann wird das Verhältnis $M:L$, wen jetzt L die grösste Abweichung dieser Function von Null zwi schen $x = -h$ und $x = +h$ bezeichnet, die gesuchte höchst Grenze des Wertes der Function für $x = H$ relativ zu der grösste

reichung zwischen genannten Grenzen geben. Wenn die Aufgabe diese letzte zurückgeführt worden ist, wird sie durch dieen Betrachtungen gelöst, von denen der Verfasser in seiner andlung: Sur les questions de minima qui se rattachent à la résentation approximative des fonctions (Mémoires de l'Acad. des Sciences de St. Pétersb. sixième série. Sciences mathétiques et physiques. T. VII.) Gebrauch gemacht hatte, und in dem „Calcul différentiel" von Bertrand S. 512-521 angert sind.

Dieselbe Aufgabe wird auch in Bezug auf die trigonometrische nction

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \cdots + A_n \cos n\varphi$$
$$+ B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \cdots + B_n \sin n\varphi$$

löst. Ty.

J. Stieltjes jr. Over de transformatie van der periodiche functie

$$A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \cdots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi.$$

Nieuw Arch. IX. 111-116

Einfache Entwickelung in Factoren von Ausdrücken obiger rm; für $n = \infty$ und unter der Voraussetzung, dass der Ausck für keinen Wert von φ gleich Null wird, hat man die twickelung bei der Störungsfunction schon lange angewendet. er bleibt die Form allgemein und so wird die Entwickelung gewendet, welche nachher durch ein Beispiel erklärt wird.

G.

. Ascoli. Una osservazione relativa ad un teorema contenuto nella mia Memoria: „Sulla rappresentabilità di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica." Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 543-546.

Verbesserung eines Lemma über die Reihe $\sum_0 {}_\mu \sum_0 {}_\nu c_\mu^{(\nu)}$, das § 3 Nr. 1 der oben genannten Abhandlung nicht ganz correct gesprochen war. M.

LAGUERRE. Sur la distribution, dans le plan, des r d'une équation algébrique dont le premier m satisfait à une équation différentielle linéaire du s ordre. C. R. XCIV. 412-414, 509-511.

Siehe Abschn. II. Cap. 1. p. 54.

Capitel 2.

Besondere Functionen.

A. Elementare Functionen.

PEROTT. Sur la recherche des diviseurs des fon entières. S. M. F. Bull. X. 250-251.

Angabe eines Verfahrens, welches die Zerlegung eines noms

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

mit ganzzahligen Coefficienten in seine Primfactoren aus endlichen Anzahl von Versuchen ergiebt. Dl

---

ST. RYCHLICKI. Ein Beitrag zum Rationalmachen Summe von $2^{q\text{ten}}$ Wurzeln. Hoppe Arch LXVIII. 180-1

Es werden zunächst die expliciten rationalen Ausdrück wickelt, welche den algebraischen Summen von 2, 3, Quadratwurzeln entsprechen; sodann wird die Form des r len Ausdrucks discutirt, der für die Summe von n Quadr zeln erscheint; und zuletzt finden sich einige Bemerkunge den in der Ueberschrift bezeichneten allgemeinsten Fall.

Sı

PEROTT. Sur un théorème de Gauss. S. M. F. Bull. X.

Es wird ein neuer Beweis für den Gauss'schen Satz (

lio quarundam serierum singularium) gegeben, dass, wenn m **l** μ ganze Zahlen und $m > \mu$ ist, der Ausdruck

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\dots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\mu)}$$

ie ganze Function von x ist. M.

. Dziobek. Ueber diejenigen Functionen von sechs Variabeln, welche die Eigenschaft haben, bei Vertauschung derselben nur sechs verschiedene Werte anzunehmen, ohne in Bezug auf fünf derselben symmetrisch zu sein. Hoppe Arch. LXVIII. 225-255.

Es werden die einfachsten Formen solcher Functionen aufgestellt. Dieselben lassen sich für die Darstellung der Invarianten er linearen Formen sechsten Grades verwerten. Indem ferner der Punkt eines Kegelschnittes

$$xz - y^2 = 0$$

durch einen Parameter α mittels der Formeln

$$x = 1,\ y = \alpha,\ z = \alpha^2$$

dargestellt wird, ergeben sich Anwendungen der genannten Functionen auf die Theorie des Pascal'schen Sechsecks. M.

. Halphén. Sur une série d'Abel. S. M. F. Bull. X. 67-87.

Die Resultate dieser Abhandlung sind bereits früher C. R. XCIII. 1003-1005 veröffentlicht worden; wir verweisen deshalb auf das betreffende Referat in F. d. M. XIII. (1881) p. 180.

M.

H. A. Schwarz. Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Torino, Att. XVII. 740-743

Ein eleganter, nur elementare Hülfsmittel benützender Beweis der Formel

$$f(t_1, t_2, \dots t_n) = \frac{1}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(-1)}(u),$$

in welcher, für $f(t)$ als Ausgangsfunction,

$$f(t_1, t_2) = \frac{f(t_1)-f(t_2)}{t_1-t_2},$$

$$f(t_1, t_2, t_3) = \frac{f(t_1, t_2)-f(t_1, t_3)}{t_2-t_3} \text{ u. s. w.}$$

gesetzt ist, wo ferner $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ eine reelle W
u einen Zwischenwert derselben bezeichnet

M. Lerch. Bemerkungen über den Quotienten
Cas. XI. 292-204. (Böhmisch).

Enthält die Ableitung und eine Anwendung der Fo

$$\frac{\sin x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots \text{ in inf.}$$

J. W. L. Glaisher. Une identité trigonométriqu
Ass. fr. 1880.

Die hier betrachtete Identität lautet:

$$\frac{\sin(a-f)\sin(a-g)\sin(a-h)}{\sin(a-b)\sin(a-c)} + \frac{\sin(b-f)\sin(b-g)\sin(b}{\sin(b-a)\sin(b-}$$

$$+\frac{\sin(c-f)\sin(c-g)\sin(c-h)}{\sin(c-a)\sin(c-b)} + \frac{\sin(f-a)\sin(f-b)\sin(}{\sin(f-g)\sin(f-h)}$$

$$+\frac{\sin(g-a)\sin(g-b)\sin(g-c)}{\sin(g-f)\sin(g-h)} + \frac{\sin(h-a)\sin(h-b)\sin(h}{\sin(h-f)\sin(h-g)}$$

wo a, b, c, f, g, h irgend welche Grössen sind. Für letzt
$\sin^2 a$, $\sin^2 b, \dots,$ gesetzt; alsdann ergiebt sich eine
Identität.

S. Günther. Parabolische Logarithmen und parab
Trigonometrie. Eine vergleichende Untersuch
Leipzig. Teubner.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 3.

'ORTI. Tafeln der hyperbolischen Functionen.
:hlömilch Z. XXVII. Hl. A. 1-12.

Für die Rechnung mit Hyperbelfunctionen konnte man sich er zweier Tafelwerke bedienen, desjenigen von Gronau und enigen von Forti: ältere Arbeiten dieser Art, wie wir sie von ıbert und Gudermann besitzen, hatten mehr eine theoretische, eine praktische Bedeutung. Gronau legte den sogenannten ıscendenten Winkel τ, Forti den gemeinsamen Winkel φ zu ınde. Letzterer erzählt uns, dass seine Anordnung von man- n sachkundigen Männern, so besonders von Hoüel und Bella- s, getadelt worden sei, dass er jedoch in seinen zu Rechnungs- ecken bestimmten Tafeln trotzdem die ursprüngliche Idee als vorteilhafteste beibehalten habe. „Für den ausschliesslichen brauch der Mathematiker" aber gedenke er nunmehr neue feln zu entwerfen, in welchen er sich den Wünschen seiner itiker mehr anbequeme und den doppelten hyperbolischen :tor ω zum Argumente nehme. Eine Probe dieses in der Aus- ırung befindlichen Werkes wird mitgeteilt. Ausserdem sind : Abhandlung zahlreiche geschichtliche Notizen, namentlich er Newton's Stellung zu den Hyperbelfunctionen, beigegeben.

Gr.

LINDEMANN. Ueber die Ludolph'sche Zahl. Berl. Ber. 1882, 679-682.

LINDEMANN. Sur le rapport de la circonférence au diamètre, et sur les logarithmes népériens des nombres commensurables ou des irrationnelles algébriques. C. R. CXV. 72-74.

F. LINDEMANN. Ueber die Zahl π. Klein Ann. XX. 213-225.

In seiner Abhandlung: Sur la fonction exponentielle (C. R. LXXVII., s. F. d. M. V. (1873.) p. 248) hat Herr Hermite die [illegible]möglichkeit einer Relation von der Form

$$N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n} = 0$$

iesen, wo sowohl die z als die N als ganz vorausgesetzt

werden. Herr Lindemann erweitert die hier gemachten Sch
und gelangt zu folgendem Satze: „Sind

$$f_1(z) = 0,\ f_2(z) = 0,\ \ldots,\ f_s(z) = 0$$

s algebraische Gleichungen, von denen jede irreductibel und
der Form

$$z^n + a_1 z^{n-1} \ldots + a_n = 0$$

ist, wo unter $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze Zahlen zu verstehen
werden ferner mit $z_i, z_i', z_i'', \ldots$ die Wurzeln der Gleic
$f_i(z) = 0$ bezeichnet, wird kurz

$$\Sigma e^{z_i} = e^{z_i} + e^{z_i'} + e^{z_i''} + \ldots$$

gesetzt, bedeuten endlich $N_0, N_1, \ldots, N_s$ beliebige ganze Za
welche nicht sämmtlich gleich Null sind, so kann eine Rel
von der Form

$$0 = N_0 + N_1 \Sigma e^{z_1} + N_2 \Sigma e^{z_2} + \cdots + N_s \Sigma e^{z_s}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass eine der Grössen z g
Null ist."

Ersetzt man die Gleichungen $f_i(z) = 0$ durch diejen
irreduciblen Gleichungen, welche bez. von den Zahlen
$Z_1 = z_1,\ Z_2 = z_1 + z_2,\ Z_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots,\ Z_n = z_1 + z_2 \cdots$
befriedigt werden, so führt dieser besondere Fall zu dem S
„Ist z eine von Null verschiedene rationale oder algebr
irrationale Zahl, so ist e^z immer transcendent." Damit ist
wiesen, dass die Ludolph'sche Zahl π eine transcendente Zal
Die angeführten Sätze bleiben bestehen, wenn man unter
N_i nicht ganze oder rationale, sondern beliebige algebra
irratinale Zahlen versteht. Analog folgt aus dem obigen
der folgende: „Versteht man unter $N_0, N_1, \ldots, N_n$ beliebige,
unter $z_0, z_1 \ldots, z_n$ beliebige, von einander verschiedene (r
oder complexe) algebraische Zahlen, so kann eine Relation
der Form

$$0 = N_0 e^{z_0} + N_1 e^{z_1} + \cdots + N_n e^{z_n}$$

nicht bestehen, es sei denn, dass die N_i sämmtlich gleich
werden." M.

. Hurwitz. Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(x) = \Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten. Schlömilch Z. XXVII. 86-102.

Durch Vergleichung der beiden von Herrn Schlömilch gebenen Relationen

$$f(s) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(s) \cdot f(s),$$

$$f(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \cdots + (1)^n \frac{1}{(2n+1)^s} + \cdots,$$

ıd

$$\varphi(1-s) = \frac{2^s-1}{2^{1-s}-1} \cdot \frac{2}{(2\pi)^s} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}s\pi\right) \cdot \Gamma(s) \cdot \varphi(s),$$

o

$$\varphi(s) = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

it der von Riemann („Ueber die Anzahl der Primzahlen unter ner gegebenen Grenze") betrachteten Function

$$\zeta(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots,$$

ir welche er u. A. die Gleichung

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s)$$

erleitet, ist der Herr Verfasser zu allgemeinen, die obigen als pecielle Fälle enthaltenden Sätzen, gelangt. Seine Untersuchungen betreffen die Dirichlet'sche Function $F(s, D)$, welche, wenn

$$D \equiv 1 \pmod 4 \text{ ist}, = \frac{1}{1-(-1)^{\frac{D^2-1}{8}} \cdot \frac{1}{2^s}} \cdot \Sigma\left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s},$$

n allen übrigen Fällen $= \Sigma\left(\frac{D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n^s}$ gesetzt wird, wo die Summe sich auf alle n erstreckt, die positiv, ganzzahlig und relativ prim zu $2D$ sind. Als Resultat der Untersuchung ergeben sich folgende Sätze:

I. „Die Functionen $F(s, D)$ sind durchaus eindeutige F tionen der complexen Variabeln s." II. „Alle Functionen $F(s,$ mit einziger Ausnahme von $F(s,1)$, haben einen endlichen W des Arguments s." III. „Die Function $F(s,1)$ hat für jeden i Endlichen gelegenen Wert von s selbst einen endlichen W mit Ausnahme der Stelle $s=1$, wo $F(s,1)$ so unendlich w dass $\lim\,[(s-1)\,F(s,1)]_{s=1}$ ist." IV. „Die Functionen $F(s,D)$ g nügen folgenden einfachen Relationen:

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{\varkappa D} \cdot \cos\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s,D),$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \cdot F(s,D),$$

wenn D positiv ist;

$$F(1-s, D) = \left(\frac{2\pi}{-\varkappa D}\right)^{1-s} \cdot \frac{\Gamma(s)}{\pi} \cdot \sqrt{-\varkappa D} \cdot \sin\left(\frac{s\pi}{2}\right) \cdot F(s,D),$$

oder auch

$$F(1-s, D) = \left(\frac{-\varkappa D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} \cdot F(s,D),$$

wenn D negativ ist. Dabei ist $\varkappa = 1$ für $D \equiv 1 (\text{mod.} 4)$ u $\varkappa = 4$ in allen übrigen Fällen." M.

A. Genocchi. Sur les fonctions de M. Prym et M. Hermite. Belg. Bull. (3) IV.

Die beiden Functionen von Herrn Hermite

$$P(x) = a^x\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{x+1} + \frac{a^2}{1.2(x+2)} - \text{etc.}\right),$$

$$Q(x) = \int_a^\infty v^{x-1} e^{-v}\, dv,$$

welche in die von Herrn Prym für $a=1$ übergehen, sind scho

lem **Falle**, wo a reell ist, von Legendre (Fonctions elliptiques,). 502) betrachtet worden. Mit Hülfe der Formel

$$P(x) = \frac{1}{\sin 2\pi x}\int_{-\pi}^{+\pi} t^x e^{-t}\, d\varphi\,, \quad t = ae^{2\varphi\sqrt{-1}}$$

sen sich verschiedene andere interessante, aber ziemlich complirte Darstellungsformen für jene Functionen geben. Wenn x e ganze Zahl ist, so nimmt man für $P(x)$ die Definition $P(x+\varepsilon)_{\varepsilon=0}$. Mn. (M.)

Berger. En generalisation af några formler i Gammafunktionens teori. Stockh. Öfv. 1881. 13-30.

Wenn die Function $f(x)$ für $x>0$ endlich und continuirlich eibt, wenn ferner

$$\int^{\infty} f'(x) = \int^{\infty} f''(x) = \cdots = 0$$

, und für $x>-1$

$$F(x+1)-F(x) = f(x)$$

setzt wird, so findet der Verfasser, dass

$$F(x+1) = \int_1^x f(z)\,dz + \frac{f(x)}{2} + K_0$$

$$-\sum_{k=1}^{k=x}\Big[\frac{f(k+x-1)+f(k+x)}{2} - \int_k^{k+1} f(x-1+z)\,dz\Big],$$

orin

$$K_0 = \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{k=x}\Big[\frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(z)\,dz\Big].$$

iese Formel combinirt der Verfasser nur mit der Euler'schen ummenformel, und findet dadurch eine Reihe von Formeln, aus relchen für den speciellen Fall

$$f(x) = \log(x)$$

ekannte Gamma-Formeln erhalten werden. So wird z. B. die Gleichung

$$\Gamma(1+x)\cdot\Gamma(1-x) = \prod_{k=1}^{k=\infty}\frac{k^2}{k^2-x^2} = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

aus der allgemeinen Formel

$$F(1+x)+F(1-x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} [-f(k-x)+2f(k)-f(k+x]$$

hergeleitet. E.

E. Goursat. Extension du problème de Riemann à des fonctions hypergéométriques de deux variables. C. R. XC. 903-904, 1044-1047.

Herr Picard hatte die Riemann'sche Definition der hypergeometrischen Functionen durch ihr Verhalten in der Umgebung der singulären Stellen der unabhängigen Veränderlichen auf Functionen zweier Veränderlichen x und y ausgedehnt und war dabei auf die Appell'sche Function $F_1(\alpha\beta\beta'\gamma xy)$ geführt worden (C. R. XCI. 1267., Ann. de l'Éc. N. X. 305., s. F. d. M. XII. (1880) 329). Der Verfasser zeigt, dass man in analoger Weise die Appel'schen Functionen F_2 und F_3 definiren kann, wenn man die Picard'schen Festsetzungen dahin modificirt, dass, statt zwischen vier, zwischen fünf Zweigen der Function $z = F(xy)$ eine lineare homogene Function mit constanten Coefficienten bestehen soll. Demgemäss werden hier in der Nachbarschaft der singulären Punkte die Formen für vier Zweige der Function, in ähnlicher Weise wie bei Herrn Picard für drei Zweige, vorgeschrieben. Die singulären Stellen sind $x=0, 1, \infty$ für jedes y, $y=0, 1, \infty$ für jedes x und $x=a, y=b$ wenn $ab=a+b$. Jede Function z, die diese Bedingungen erfüllt, genügt zwei linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung, von denen jede nur die Ableitungen von z nach einer der Variablen x, y enthält. Diese Gleichungen werden durch jedes gemeinsame Integral zweier linearer, simultaner, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ebenfalls von Herrn Appell aufgestellt sind, befriedigt. Zweck der zweiten Note ist, zu beweisen, dass die erwähnten simultanen Differenzialgleichungen vierter Ordnung kein anderes gemeinschaftliches Integral zulassen, als diejenigen, die dem Appell'schen System zweiter Ordnung genügen.

Hr.

Appell. Sur les functions hypergéométriques de leux variables. Résal J. (3) VIII. 173-217.

Der Herr Verfasser hat für die Gauss'sche hygeometrische ihe eine Verallgemeinerung gefunden, welche die wesentlichen genschaften jener Reihe beibehält; dieselbe besteht in der Einirung der vier Functionen:

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma,x,y) = \Sigma\,\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}\,x^m y^n,$$

$$F_2(\alpha,\beta,\beta',\gamma,\gamma',x,y) = \Sigma\,\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}\,x^m y^n,$$

$$F_3(\alpha,\alpha',\beta,\beta',\gamma,x,y) = \Sigma\,\frac{(\alpha,m)(\alpha',n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)(1,m)(1,n)}\,x^m y^n,$$

$$F_4(\alpha,\beta,\gamma,\gamma',x,y) = \Sigma\,\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m+n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)(1,m)(1,n)}\,x^m y^n,$$

$(\lambda,k) = \lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+k-1)$, $(\lambda,0) = 1$, und die Summation m und n von Null bis Unendlich zu erstrecken ist. Die vorgende Arbeit ist einer zusammenhängenden und ausführlichen rstellung der Untersuchungen über diese Functionen gewidmet, ren hauptsächlichsten Resultate der Verfasser in den C. R. von 880 t. XC. p. 296-299, 731-735, 977-980, t. XCI. p. 304-366 mitteilt hat; es sei daher auf die Referate in diesem Jahrbuche 1880) XII. p. 296f., sowie auf die zweite Auflage von Heine's andbuch der Kugelfunctionen Bd. II. Zusätze p. 359f. verwiesen.

T.

B. Elliptische Functionen.

C. **Formenti.** Riduzione di integrali di funzioni algebriche ad integrali di funzioni razionali. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 165-173.

Der Herr Verfasser nennt Periode einer Function $\psi(z)$ eine Function $\lambda(z)$, die der Functionalgleichung

$$\psi(\lambda) = \psi(z)$$

genügt, und beweist den Satz, dass wenn $\lambda(z)$ eine Periode der

rationalen Function $\psi(z)$ ist, und die rationale Function $P(z)$ Bedingung

$$P(\lambda)\,d\lambda = P(z)\,dz$$

genügt, das algebraische Differential

$$\frac{P(z)\,dz}{\alpha[\varphi_{-1}\,\psi(z)]},$$

wo $\alpha(z), \varphi(z)$ rationale Functionen sind und $\varphi_{-1} = \frac{1}{\varphi}$, mittels der Substitution $\psi(z) = \varphi(y)$ in das rationale Differe

$$\frac{F(\varphi(y))\,.\,\varphi'(y)\,dy}{\alpha(y)}$$

transformiren lässt. Als Beispiel dient

$$\psi(z) = \frac{A(z-a)^m - B(z-b)^m}{C(z-a)^m - D(z-b)^m}.$$

Von diesem Theorem wird eine Anwendung gemacht auf Reduction specieller elliptischer Integrale auf Integrale ration Functionen. M.

G. A. Stuart. Reduction of integrals of the form

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(z^n - c^n)\sqrt{z^n - b^n}}.$$

Quart. J. XVIII. 245-260.

Die Reduction des obigen Integrals, die für $n = 3$, Q J. XVIII. 66, durchgeführt ist, beruht auf folgendem Theo Ist

$$\frac{dz}{f(z^n)} = dx,\ z = \varphi(x),\ \omega z = \varphi(y),\ \omega^n = 1,$$

dann ist

$$\frac{\omega\,dz}{f(z^n)} = dy,$$

oder

$$dy = \omega\,dx,$$

und

$$y = \omega x + C,$$

lich:

$$\frac{z^{m-1}\,dx}{(z^n-c^n)f(z^n)} = \frac{1}{nc^{n-m}}\Sigma\int\frac{\omega^m dx}{z-\omega c} = \frac{1}{nc^{n-m}}\Sigma\int\frac{\omega^m\,dx}{\varphi(x)-\varphi(\omega a+C)}.$$

nn $f(z^n) = \sqrt{z^n \pm b^n}$ oder $= \sqrt{b^n - z^n}$, so kann $\varphi(x)$ für $n = 3, 4$ r 6 durch elliptische Functionen ausgedrückt werden. Einlend wird der Fall $n = 4$ behandelt. Schliesslich wird gezeigt, s für $n = 8$ die Integrale

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z^8 \pm b^8}} \text{ und } \int\frac{dz}{\sqrt{b^8 - z^8}}$$

h auf eine Summe zweier elliptischen Integrale zurückführen sen, dass aber $\varphi(x)$ nicht durch elliptische Functionen von x sgedrückt werden kann. M.

GÜNTHER. Sur l'évaluation de certaines intégrales pseudo-elliptiques. S M. F. Bull. X. 88-97.

Als pseudoelliptische Integrale bezeichnete Malet Integrale n der Form

$$\int f[x, R(x)]\,dx,$$

o f irgend eine algebraische Function und $R(x)$ die Quadraturzel aus einem Polynom dritten oder vierten Grades. Diese sen sich nicht auf die Legendre'schen Normalformen bringen, ch gelingt es bisweilen, sie in endlicher Form zu integriren. it solchen Integralen hat sich bereits Legendre beschäftigt raité des fonctions ell. Paris 1827. t. I. p. 136), später Clausen str. Nachr. Nr. 442, Grunert Arch. III. 335) und Malet (Brioschi m. (2) VI. 252, s. F. d. M. VII. (1875) 147). Herr Günther behäftigt sich mit dem Integrale

$$\int\frac{x\,dx}{(x^3+8)\sqrt{x^3-1}},$$

lches Clausen

$$= \frac{1}{18}\operatorname{arctg}\frac{3x(x-1)}{(4-x)\sqrt{x^3-1}}$$

$$+ \frac{1}{12\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{3(x-1)}}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3(x-1)}} + \text{const.}$$

gefunden hat; und indem er versucht, den Weg, auf welch Clausen zu diesem Resultate gelangt ist, zu ermitteln, gewinnt ein Criterium, mit dessen Hülfe man in gewissen Fällen e scheiden kann, ob ein vorgelegtes elliptisches Integral sich endlicher Form darstellen lässt. M.

O. RAUSENBERGER. Beiträge zur Theorie der elliptisch Functionen. I. Kronecker J. XCIII. 328-333.

Wie der Herr Verfasser bereits in seiner Abhandlu „Theorie der allgemeinen Periodicität" (Clebsch Ann. XVII. 3 s. F. d. M. XIII. (1881) 317) hervorgehoben hat, können an Ste der doppeltperiodischen elliptischen Functionen mit Vorteil Tr scendenten mit einfacher unelliptischer Periode eingeführt w den, d. h. Functionen, die der Gleichung

$$f(px) = f(x)$$

genügen. Als Normalform der Functionen, aus denen sich multiplicatorisch periodischen Transcendenten zusammensetz dient:

$$\eta(p,x) = \Sigma p^{n^2}\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \Pi(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+1}x)\left(1+\frac{p^{2n+1}}{x}\right), (n = 0, 1, \dots \infty),$$

und mod. $p < 1$. An der Function

$$\varphi(x) = \frac{\eta_0(p, \alpha x)}{\eta_0(p,x)},$$

wo

$$\eta_0(p,x) = \frac{\eta(p^{\frac{1}{4}}, ix) + \eta(p^{\frac{1}{4}}, -ix)}{2} = \eta(p, -x^2)$$

und α eine primitive n^{te} Einheitswurzel ist, wird gezeigt, d sich die meisten für die elliptischen Functionen gültigen R tionen auf die multiplikatorisch periodischen übertragen lass

M.

Stolp. De elliptische integralen van der eerste soort. ..eiden.

Die Dissertation behandelt die elliptischen Integrale der ersten . Der Verfasser kann namentlich die künstliche Weise nicht igen, auf welche gewöhnlich die Substitution in's Werk gesetzt d, um die biquadratische Form auf die bekannte Form $(1-z^2)(1-k^2z^2)$ zurückzuführen. Im ersten Abschnitt beehtet er die Transformation des Ausdruckes Ax^2+Bx+C in $(x-a_1)(x-a_2)$ und das übereinstimmende Integral

$$\int \frac{dx}{A(x-a_1)(x-a_2)}.$$

. zweiten Abschnitt gelangt er zu den Ausdrücken vom dritten d vierten Grad und untersucht die Folgerungen, welche alle ibstitutionen von der Form $\frac{\alpha_1+\beta_1 y}{\alpha_2+\beta_2 y}$ ergeben. Bei dem Ausdruck m dritten Grad werden sechs brauchbare Formen der Subtution erhalten, welche in einer Tafel zusammengesetzt werden. i dem Ausdruck vom vierten Grad giebt es acht, die in einer eiten Tafel zusammengesetzt werden, welche als besonderen ll die erste enthält. Darauf werden ebenso andere Substitunen untersucht, so die von der Form $\sqrt{\frac{\gamma_1+\delta_1 z}{\gamma_2+\delta_2 z}}$, welche zur leitung des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\mu x^2\cos\theta+\mu^2x^4}}$ dienen nn, wie Enneper bereits gezeigt hat; weiter die Substitutionen n der Form $\frac{F_1(x)}{F_2(x)} = y^2$, welche bereits Lagrange und Legendre ngeführt haben. Sodann wendet sich der Verfasser zu den ransformationen von Gauss und Landen, welche sich an das rige sofort anschliessen, und behandelt das Additionstheorem r elliptische Integrale der ersten Art. Nun folgt die transcente Substitution $x = \sin^2\varphi$ und $x = \text{tang}^2\varphi$, wobei für den wöhnlichen Sinus auch der hyperbolische genommen wird. Im tzten Abschnitt werden einige Methoden, wonach die hier beandelten elliptischen Integrale in Reihen entwickelt werden

können, besprochen und auch andere Näherungsmethoden behandelt. G.

N. Herz. Einige Beziehungen zwischen den Integralen der elliptischen Functionen. Hoppe Arch. LXVII. 343-374.

Die hier gegebenen Relationen entspringen aus der Betrachtung einer rationalen Function der drei Grössen $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Zunächst wird für das Integral von der Form

$$J = \int \operatorname{sn}^m x \operatorname{cn}^n x \operatorname{dn}^p x \, dx,$$

wo m, n, p ganze positive Zahlen sind, eine Reihe von Reductionsformeln gegeben und gezeigt, dass das Integral jeder ganzen rationalen Function der drei elliptischen Functionen sich wieder durch diese selbst oder Logarithmen derselben oder endlich durch elliptische Integrale zweiter Gattung des sn darstellen lässt. Im Folgenden werden dann die gebrochenen Functionen behandelt. M.

J. Thomae. Ueber specielle elliptische Functionen. Schlömilch Z. XXVII. 181-189.

Die Formeln für die Umkehrung elliptischer Integrale erster Gattung mittelst Quotienten von Thetafunctionen werden sehr complicirt, wenn die Argumente nicht, wie gewöhnlich, um Systeme halber Periodicitätsmodeln von einander verschieden, sondern wenn Systeme anderer rationaler Teile der Perioden eintreten. In dem speciellen Falle jedoch, wo das Integral

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-k_1)^2(z-k_2)^2(z-k_3)^2}}$$

umzukehren ist, werden die betreffenden Formeln einfach und elegant. Zur Umkehrung werden hier Quotienten von Thetafunctionen benutzt, deren Argumente sich um Systeme von Drittelperioden unterscheiden. Der Herr Verfasser ist auf diese Func-

en bei der Untersuchung des logarithmischen Potentials einer ehseitig-dreieckigen Platte gestossen. M.

SCHLÖMILCH. Notiz über gewisse elliptische Integrale. Schlömilch Z. XXVII. 62-64.

Genügen die beiden Functionen $F(x)$ und $f(x)$ den Begungen

$$F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right) = \text{const.}, \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x),$$

erhält man die Reduction

$$\int_0^x F(x)\cdot f(x)\frac{dx}{x} = \text{const.}\int_0^1 f(x)\frac{dx}{x}.$$

eses auf die elliptischen Integrale erster und zweiter Art

$$F(x) = F\left(\varkappa, \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right),$$

$$F(x) = E\left(\varkappa, \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{\varkappa'}}\right)-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}$$

gewendet, ergiebt die merkwürdigen Relationen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F(\varkappa,\varphi)f(\sqrt{\varkappa'}\,\text{tg}\,\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varphi = F^1(\varkappa)\int_0^1\frac{f(x)}{x}\,dx$$

d

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{E(\varkappa,\varphi)\,f(\sqrt{\varkappa'}\,.\,\text{tg}\,\varphi)}{\sin\varphi\,\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$=\int_0^1\left\{E^1(x)+\frac{\varkappa^2 x}{\sqrt{(1+\varkappa' x^2)(\varkappa'+x^2)}}\right\}\frac{f(x)}{x}\,dx.$$

M.

---

i. THOMAE. Ueber elliptische Integrale zweiter Gattung. Schlömilch Z. XVII. 179-180.

Für die elliptischen Integrale zweiter Gattung wird eine ntwickelung von folgender Form gegeben:

$$A.t(u)+Bu=\sqrt{\xi(1-\xi)(1-k\xi)}$$
$$.(a_1+a_2\xi+a_3\xi^2+\cdots+a_{n-1}\xi^n+\cdots),$$

wo

$$t(u)=\int_0^u \xi.du,\quad du=\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}},\qquad \xi=\mathrm{sn}$$

Es wird für die a eine Recursionsformel aufgestellt. M.

Hermite. Sur l'intégrale elliptique de troisième esp
C. R. XCV. 901-904.

Der zuerst von Jacobi gegebene Ausdruck

$$\int_0^x \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 a}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 x}\,dx = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta'(x-a}{\Theta(x-a}$$

schliesst einen Logarithmus ein, dessen vielfachen Werte den schiedenen Werten entsprechen, die das Integral längs des der Variabeln beschriebenen Weges annimmt. Für den Fall vollständigen Functionen

$$\Pi(a)=\int_0^K \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 x}\,dx,$$

$$i\Pi'(a)=\int_K^{K+iK'} \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 x}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 x}\,dx$$

wird diese Mehrdeutigkeit hier aufgehoben, indem die Integr längs einer graden Linie geschieht, und eine genaue Bestim des Werthes gegeben. M

A. Cayley. On a formula relating to the elliptic int of the third kind. Lond. M. S., Proc. XIII. 175-176.

Die Differentiation des Integrals dritter Gattung in auf den Parameter wird in der eleganten Form

$$\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{b}{a-x}-\frac{d}{du}\cdot\frac{y}{x-a}=k^2(a-x),$$

wo $n=\frac{1}{a}$, $a=\mathrm{sn}^2\theta$, $b=\mathrm{sn}\,\theta.\mathrm{cn}\,\theta.\mathrm{dn}\,\theta$, dargestellt.

M

)URSAT. Sur l'équation linéaire qui relie au module fonction complète de première espèce. S. M. F. Bull. 44-51.

/ie Herr Picard (C. R. 28 avril 1879, s. F. d. M. XI. 286) t hat, kann jede mehrdeutige Function der complexen)eln x, welche in der ganzen Ebene und auf der ganzen nur drei singuläre Punkte (0, 1, ∞) hat, als eindeutige ion des Quotienten $\omega = \frac{iK'}{K}$ angesehen werden, wo K ' für beliebige Werte von x durch die lineare Differential-ung zweiter Ordnung (s. Fuchs, Borchardt J. LXXI. 91, 1. M. II. (1870) p. 248)

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(1-2x)\frac{dy}{dx}-\frac{1}{4}y=0$$

t werden. Die so definirte Function ω der Variabeln x . der ganzen Ebene nur drei kritische Punkte (0, 1, ∞) und ; folgende Eigenschaften. Der Coefficient von i in ω ist des x positiv; ferner, wenn man von einem Punkte A der mit einem Anfangswerte ω_0 ausgeht und die Variable x . einen geschlossenen Weg beschreiben lässt, der nicht durch der Punkte 0 oder 1 geht, so kommt man zum Ausgangs-ɜ mit einem Werte $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$ zurück, wo a, b, c, d vier , der Bedingung $ad-bc=1$ genügende Zahlen sind. man sich auf diese Eigenschaften, so ist es leicht zu ı, dass, wenn der von x durchlaufene Weg die Punkte 0 1 überschreitet, man niemals zum Anfangswert zurück-t. Es ergiebt sich, dass nur ein einziger Weg für die)le x existirt, der von ω_0 zu $\frac{a\omega_0+b}{c\omega_0+d}$ führt, wenn man Vege als identisch ansieht, die ohne Ueberschreitung der e 0 und 1 ineinander übergeführt werden können. Diese schaft wird hier von Herrn Goursat bewiesen, indem er allein die Veränderungen der Integrale der obigen Diffe-lgleichung in der Umgebung eines der kritischen Punkte ucht. M.

A. Cayley. Note on Landen's theorem. Lond., M. S., Pr
XIII. 47-48.

Landen hat sein Theorem, welches einen Hyperbelbog durch zwei Ellipsenbogen darstellt, (Phil. Trans. LXV. (177 283-289) in folgender Form erhalten:

$$\sqrt{\frac{m^2+gx^4}{m^2-x^2}}\,dx = \left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(m-n)^2-t^2}{(m+n)^2-t^2}}+\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(m+n)^2-t^2}{(m-n)^2-t^2}}\right\}$$

wo

$$t = gx\sqrt{\frac{m^2-x^2}{m^2-gx^2}} \quad \text{und} \quad g = \frac{m^2-n^2}{n^2}.$$

Hier wird diese Form mit der der gewöhnlichen Transforma

$$\frac{(1-k')dx}{\sqrt{1-x^2.1-k^2x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2.1-\lambda^2y^2}}, \quad \lambda = \frac{1-k'}{1+k'},$$

$$y = (1+k')x\sqrt{\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}}$$

identificirt. M.

J. Griffiths. Note on Professor Cayley's paper.
Lond., M. S., Proc. XIII. 49-51.

Mit Bezug auf die vorstehende Note teilt Herr Grif folgende Transformation mit. Wenn

$$\sqrt{1-e^2x^2}+e\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1+e)^2-\frac{4ey^2}{(1+e)^2}},$$

so ist:

$$\left\{\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}+e^2\sqrt{\frac{1-x^2}{1-e^2x^2}}+2e\right\}dx = \sqrt{\frac{(1+e)^2-\frac{4ey^2}{(1+e)^2}}{(1+e)^2-y^2}}$$

M.

J. Griffiths. Elementary analytical proof of Gra and MacCullagh's theorems, with an extension of former. Lond., M. S., Proc. XXXI. 177-179.

Es wird bewiesen, dass, wenn

$$t^2 = (a \sin \vartheta - a' \sin \vartheta')^2 + (b \cos \vartheta - b' \cos \vartheta')^2,$$

rin

$$\frac{a}{a'} \sin \vartheta \sin \vartheta' + \frac{b}{b'} \cos \vartheta \cos \vartheta' = 1, \; a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$

an

$$dt = \sqrt{a'^2 \cos^2 \vartheta + b'^2 \sin^2 \vartheta}\,.\,d\vartheta - \sqrt{a'^2 \cos^2 \vartheta' + b'^2 \sin^2 \vartheta'}\,.\,d\vartheta'$$

und dass die Identität besteht:

$$(aa' \cos \vartheta \cos \vartheta' + bb' \sin \vartheta \sin \vartheta')^2$$
$$= (a'^2 \cos^2 \vartheta + b'^2 \sin^2 \vartheta)(a'^2 \cos^2 \vartheta' + b'^2 \sin^2 \vartheta').$$

rch die geometrische Deutung der ersten Relation ergiebt sich **le** **Erweiterung** von Grave's Satz. Schliesslich wird gezeigt, **s das** hier entspringende Additionstheorem für die elliptischen **egrale** zweiter Gattung in die gebräuchliche Form übergeführt **rden kann.** M.

A. MacMahon. Sur un résultat de calcul obtenu par M. Allégret. C. R. XCV. 831-832.

Bezieht sich auf eine Arbeit, die im ersten Bande des Jahr**chs** (1868) p. 136-137 besprochen worden ist. Herr Allégret **tte** das algebraische Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{(A+3Bx+3Cx^2+Dx^3)^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{(A+3By+3Cy^2+Dy^3)^{\frac{2}{3}}} = 0$$

irrationaler Form dargestellt. Herrn Mac Mahon ist es ge**agen**, dem Integral eine rationale Form zu geben. O.

A. MacMahon. Integration of an equation connected with elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1882.

Die hier betrachtete Gleichung

$$\frac{dx}{X^{\frac{2}{3}}} + \frac{dy}{Y^{\frac{2}{3}}} = 0,$$

)

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3, \quad Y = A + By + Cy^2 + Dy^3.$$

wurde von Allégret (C. R. LXVI. 1144) integrirt. Es ergab das Resultat

$$A\left(\frac{yx^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{1}{3}}}{x-y}\right)^3+\alpha xy\left[D-\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}}{xy}\right)\right]^3=0,$$

wo α eine willkürliche Constante ist. Die vorliegende zeigt, wie man das Resultat in rationaler Form erhalten k

Csy. (M.)

A. G. Greenhill. Note on Professor Cayley's paper on elliptic function solution of the equation $x^3+y^3-1=$ Cambr. Proc. IV. 223-228.

Die Arbeit des Herrn Cayley erschien in Proc. of Cambr 106-109 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 366). Herr Greenhill dass, wenn $k=\sin 15^0$ gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{(1+\operatorname{cn} u)^2}=\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a}{(1+\operatorname{cn} a)^2}$$

giebt: $\operatorname{cn} u=\operatorname{cn} a$, oder $\operatorname{cn}\omega a$, oder $\operatorname{cn}\omega^2 a$, wo ω eine imagi dritte Einheitswurzel ist. Er erwähnt ferner, dass Herr Mahon gezeigt habe, dass das Integral der Gleichung

$$\frac{dx}{(A+3Bx+3Cx^2+Dx^3)^{\frac{2}{3}}}+\frac{dy}{(A+3By+3Cy^2+Dy^3)^{\frac{2}{3}}}=$$

sei:

$$(A+B(x+y+z)+C(yz+zx+xy)+Dxyz)^3$$
$$=(A+3Bx+3Cx^2+Dx^3)(A+3By+3Cy^2+Dy^3)(A+3Bz+3Cz^2+D$$

wo z eine willkürliche Constante ist, und giebt eine Folge aus diesem Satze. Glr. (M.).

J. W. L. Glaisher. Proof of the addition equation elliptic integrals of the second kind by means o q-series. Mess. (2) XII. 43-48.

Es wird ein algebraischer Beweis für das Additionsth der elliptischen Integrale zweiter Gattung

$$Z(u)+Z(v)-Z(u+v)=k^2\operatorname{sn} u\operatorname{sn} v\operatorname{sn}(u+v)$$

ieben, indem für sn u und $Z(u)$ die q-Reihen genommen wer-, nämlich:

$$s = \frac{\pi}{2kK}\left\{\frac{4q^{\frac{1}{2}}}{1-q}\sin x + \frac{4q^{\frac{3}{2}}}{1-q^3}\sin 3x + \frac{4q^{\frac{5}{2}}}{1-q^5}\sin 5x + \dots\right\},$$

$$) = \frac{\pi}{2K}\left\{\frac{4q}{1-q^2}\sin 2x + \frac{4q^2}{1-q^4}\sin 4x + \frac{4q^3}{1-q^6}\sin 6x + \dots\right\},$$

$u = \frac{Kx}{\pi}$ ist. Glr. (M.).

CH. Erklärung. Schlömilch Z. XXVII. 192.

Anerkennung der Priorität Schröter's betreffs des im vorigen de d. Zeitschrift p. 333 (s. F. d. M. XIII. (1881) p. 354.) aus-prochenen Satzes. O.

. Stolz. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Innsbruck Ber. XII. 14-16.

Durch Betrachtung der Doppelreihe

$$\sum_n \sum_{n'} \frac{2}{(n.2\omega+n'.2\omega'-u)^3} \qquad \begin{pmatrix} n = 0,\pm1,\pm2,\dots \\ n' = 0,\pm1,\pm2,\dots \end{pmatrix}$$

weist Herr Stolz, dass die mit den Werten

$$g_2 = 60\Sigma'(n.2\omega+n'.2\omega')^{-4}$$

$$g_3 = 140\Sigma'(n.2\omega+n'.2\omega')^{-6}$$

bildete Weierstrass'sche Function $\wp(u,g_2,g_3)$ die Differential-**eichung**

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

friedigt, und zeigt durch Entwickelung der Function $\wp'(u,g_2,g_3)$ Partialbrüche nach Cauchy's Methode, wie man ungezwungen der $\wp(u,g_2,g_3)$, worin g_2, g_3 als gegeben anzusehen sind, zur **igen** Doppelreihe gelangt. M.

. Weierstrass. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berl. Ber. 1882. 443-451.

Der Herr Verfasser entwickelt zunächst eine Reihe von [...]lationen zwischen den Functionen

$$\sigma(u|\omega,\omega'),\quad \sigma_1(u|\omega,\omega'),\quad \sigma_2(u|\omega,\omega'),\quad \sigma_3(u|\omega,\omega')$$

und deren partiellen Ableitungen nach u, ω, ω'. Aus die[...] folgt, dass jede partielle Ableitung der Function σ nach ω und [...] dargestellt werden kann in der Form:

$$F_0\sigma + F_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + F_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \cdots,$$

wo F_0, F_1, F_2, ... ganze Functionen von ω, ω', η, η', g_2, g_3 [...] sind; ferner, dass jede partielle Ableitung von σ_λ nach ω, ω' [...] in der Form

$$F_0^{(\lambda)}\sigma + F_1^{(\lambda)}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u} + F_2^{(\lambda)}\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \cdots$$

darstellen lässt, wo $F_0^{(\lambda)}$, $F_1^{(\lambda)}$, $F_2^{(\lambda)}$, ... ganze Functionen v[...] ω, ω', η, η', ε_λ, e_λ, u sind; drittens, dass jede partielle Ableit[...] von σ nach g_2, g_3 die Form

$$G_0\sigma + G_1\frac{\partial\sigma}{\partial u} + G_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} + \cdots$$

hat, wo jedes G eine ganze Function von g_2, g_3, u, dividirt du[...] eine Potenz von $g_2^3 - 27g_3^2$ ist; und endlich, dass jede parti[...] Ableitung von σ_λ nach e_λ, ε_λ ein Ausdruck von der Form

$$G_0^{(\lambda)}\sigma + G_1^{(\lambda)}\frac{\partial\sigma_\lambda}{\partial u} + G_2^{(\lambda)}\frac{\partial^2\sigma_\lambda}{\partial u^2} + \cdots$$

ist, wo die $G^{(\lambda)}$ ganze Functionen von u, e_λ, ε_λ, dividirt durch e[...] Potenz von $(e_1-e_2)(e_1-e_3)(e_2-e_3)$ sind.

Die gewonnenen Differentialgleichungen werden im zwei[...] Abschnitte auf die Entwickelung der Functionen σ, σ_λ nach P[...]tenzen von u angewendet. M.

G. Frobenius und L. Stickelberger. **Ueber die Diff[...]rentiation der elliptischen Functionen nach den Period[...] und Invarianten.** Kronecker J. XCII. 311-327.

Die elliptischen Functionen werden hier als Functionen [...] drei Variabeln u, ω, ω' oder u, g_2, g_3 aufgefasst, indem die Per[...]

2ω, $2\omega'$ als unabhängige Veränderliche angesehen werden, die der Beschränkung unterliegen, dass sie weder unendlich gross, ch unendlich klein werden dürfen und dass ihr Verhältnis nicht ch reelle Werte hindurchgehen darf. Die Herren Verfasser ienen sich durchweg der von Herrn Weierstrass eingeführten eichnung. Es werden die partiellen Differentialgleichungen, nen eine elliptische Function, als Function dreier Variabeln trachtet, genügt, aufgestellt, und zu dem Zweck jene Function ächst als Function von u, ω, ω' aufgefasst, hernach aber eine nsformation der erhaltenen Differentialgleichungen durch Einrung der Variabeln g_2, g_3 für ω, ω' vorgenommen. M.

FROBENIUS. Ueber die elliptischen Functionen zweiter Art. Kronecker J. XCIII 53-68.

Unter einer elliptischen Function zweiter Art versteht man, ch Hermite (C. R. LXXXV.), jede Function, welche im Endhen überall den Charakter einer rationalen hat, und deren arithmische Ableitung doppelt-periodisch ist. Im Vorliegenden rd die Theorie dieser Functionen auf die der Functionen erster t zurückgeführt mit Hülfe der Function

$$q(u) = \frac{\sigma(2\mu\omega+2\mu'\omega'-u)}{\sigma(2\mu\omega+2\mu'\omega')\,.\,\sigma(u)}\,e^{(2\mu\eta+2\mu'\eta')u}.$$

er Herr Verfasser beweist folgende allgemeinen Eigenschaften ser Functionen: I. „Eine elliptische Function zweiter Art, die r keinen Wert unendlich gross wird, verschwindet identisch.“ „Eine solche Function wird für ebenso viele incongruente erte Null wie unendlich.“ III. „Sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ die inconuenten Werte, für die eine elliptische Function zweiter Art verhwindet, und $b_1, b_2, \dots, b_n$ die Werte, für die sie unendlich ird, so ist

$$\Sigma a - \Sigma b \equiv 2\mu\omega + 2\mu'\omega'.\text{“}$$

ie folgenden Paragraphen behandeln die Addition und Multiplition, die Multiplication und Division, und die Transformation ser Functionen. M.

Th. Craig. Some elliptic function formulae. Sylv., A
V. 60-75.

Neue Herleitung der in Prof. Cayley's „Treatise on ell
functions", p. 102 stehenden Formeln

$$\frac{d\,\mathrm{sn}\,u}{dk} = -\frac{k}{k'^2}\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\int_0 \mathrm{cn}^2u\,du + \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}\,u\,.\,\mathrm{cn}^2u,$$

$$\frac{d\,\mathrm{cn}\,u}{dk} = \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\int_0 \mathrm{cn}^2u\,du - \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}^2u\,.\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\frac{d\,\mathrm{dn}\,u}{dk} = \frac{k^3}{k'^2}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\int_0 \mathrm{cn}^2u\,du - \frac{k}{k'^2}\mathrm{sn}^2u\,.\,\mathrm{dn}\,u$$

für die Ableitung der drei Functionen sn, cn, dn nach dem M
die hier in etwas anderer Form gegeben werden. Ferner
gezeigt, dass sich mit Hülfe zweier von Glaisher gegebenen
meln Ausdrücke für die Integration der Producte

$$\mathrm{sn}^\alpha u\,\mathrm{cn}^\beta u\,du,\quad \mathrm{cn}^\alpha u\,.\,\mathrm{dn}^\beta u\,du,\quad \mathrm{dn}^\alpha u\,\mathrm{sn}^\beta u\,du$$

gewinnen lassen, wenn entweder α und β beide grade,
eine grade, die andere ungrade, oder endlich beide ung
Ebenso leicht ergeben sich Ausdrücke für $\int_0 \mathrm{sn}^\alpha u\,.\,\mathrm{cn}^\beta u\,du$

M.

M. M. U. Wilkinson. On some formulae arising
the differentiation of elliptic functions with rega
the modulus. Lond., M. S. Proc. XIII. 212-216.

Durch Differentiation der Identität

$$2\mathrm{cn}(\alpha-\beta)\mathrm{cn}(\beta-\gamma)\mathrm{cn}(\gamma-\alpha) = 2-\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)-\mathrm{sn}^2(\beta-\gamma)-\mathrm{sn}^2(\ldots$$
$$+k^2\mathrm{sn}^2(\alpha-\beta)\mathrm{sn}^2(\beta-\gamma)\mathrm{sn}^2(\gamma-\alpha)$$

nach k erhält der Verfasser die Formel:

$$\frac{1}{\mathrm{dn}\,x_1}\cdot\frac{d.\mathrm{am}\,x_1}{dk}+\frac{1}{\mathrm{dn}\,x_2}\cdot\frac{d.\mathrm{am}\,x_2}{dk}+\frac{1}{\mathrm{dn}\,x_3}\cdot\frac{d\,\mathrm{am}\,x_3}{dk}+\frac{1}{\mathrm{dn}\,x_4}\ldots$$
$$= -\frac{k\,\mathrm{sn}(x_1+x_2)\mathrm{sn}(x_1+x_3)\mathrm{sn}(x_1+x_4)(1-k^2\mathrm{sn}\,x_1\,\mathrm{sn}\,x_2\,\mathrm{sn}\,x_3\ldots}{\mathrm{dn}\,x_1\,\mathrm{dn}\,x_2\,\mathrm{dn}\,x_3\,\mathrm{dn}\,x_4}$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4 = 0.$$

em Falle, wo

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0,$$

en sich folgende fünf Formeln:

$$\text{sn}\,u\,\text{sn}\,v\,\text{sn}\,r\,\text{sn}\,s + \text{dn}\,u\,\text{dn}\,v\,\text{dn}\,r\,\text{dn}\,s = k'^2 + k^2\,\text{cn}\,u\,\text{cn}\,v\,\text{cn}\,r\,\text{cn}\,s,$$

$$u\,\text{cn}\,v\,\text{dn}\,r\,\text{dn}\,s - \text{cn}\,r\,\text{cn}\,s\,\text{dn}\,u\,\text{dn}\,v = k'^2(\text{sn}\,u\,\text{sn}\,v - \text{sn}\,r\,\text{sn}\,s),$$

$$k^2\,\text{sn}(u+v)(\text{sn}\,u\,\text{sn}\,v - \text{sn}\,r\,\text{sn}\,s) = Zu + Zv + Zr + Zs,$$

$$u\,\text{sn}\,v\,\text{sn}\,r\,\text{cn}\,s\,\text{dn}\,s - \text{dn}\,u\,\text{dn}\,v\,\text{dn}\,r\,\text{cn}\,s\,\text{cn}\,s + \text{cn}\,u\,\text{cn}\,v\,\text{cn}\,r\,\text{sn}\,s\,\text{dn}\,s$$
$$= k^2\,\text{sn}(r+s)(\text{sn}\,u\,\text{sn}\,v - \text{sn}\,r\,\text{sn}\,s),$$

$$k^2\,\text{sn}\,u\,\text{sn}\,v\,\text{sn}\,r\,\text{dn}\,s\,\text{dn}\,u\,\text{dn}\,v\,\text{dn}\,r\,\text{sn}\,s$$
$$= \text{sn}\,s\,\text{dn}\,s + k^2\,\text{cn}\,s\,\text{sn}(r+s)(\text{sn}\,u\,\text{sn}\,v - \text{sn}\,r\,\text{sn}\,s),$$

$u+v+r+s = 0$. Die beiden ersten Formeln sind bereits den Herren Cayley u. H. J. S. Smith (Lond. M. S. Proc. X. nd 97., s. F. d. M. XI. (1879) 287. 314.) gegeben worden. ich werden einfache Ausdrücke für die Function

$$F = \frac{1}{k}\,\Pi\,\text{dn}\,x\,.\,\Sigma\,\frac{1}{\text{dn}\,x}\cdot\frac{d\,\text{am}\,x}{dk},$$

n $\Sigma x = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0$ ist, mitgeteilt. M.

. DE BRUNO. Sur une nouvelle série dans les fonc-ons elliptiques. C. R. XCV. 22-23.

Die sich durch ausserordentliche Convergenz auszeichnende e lautet:

$$\frac{\sqrt{\;}}{\pi}\left(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'}\right) = 1+2(q^{16}+q^{64}+q^{144}+\cdots+q^{(4p)^2}\cdots).$$

die Herstellung von elliptischen Tafeln auf 20 Decimalen le bereits die Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2K}{\pi}}}(1+\sqrt{k'}+\sqrt[4]{1+k'}\sqrt[8]{64k'})$$

gen. M.

J. W. L. GLAISHER. On a theorem in elliptic functions. Brit. Ass. Rep. 1882.

Ein neuer Beweis des von Jacobi (Fundamenta Nova p. 125-127) bewiesenen Satzes: „Wenn

$$\frac{u^n}{n!} = \frac{\mathrm{sn}^n u}{n!} + R_n^{(n+2)} \frac{\mathrm{sn}^{n+2} u}{(n+2)!} + R_n^{(n+4)} \frac{\mathrm{sn}^{n+4} u}{(n+4)!} + \cdots,$$

so genügen die R folgenden Gleichungen:

$$(2n-2)!\, k^{2n-1} \mathrm{sn}^{2n-1} u = R_1^{(2n-1)} k \,\mathrm{sn}\, u + R_3^{(2n-1)} \frac{d^2}{du^2} k \,\mathrm{sn}\, u + \cdots$$
$$+ R_{2n-1}^{(2n-1)} \frac{d^{(2n-2)}}{du^{2n-2}} k \,\mathrm{sn}\, u,$$

$$(2n-1)!\, k^{2n} \mathrm{sn}^{2n} u = -R_0^{(2n)} + R_2^{(2n)} k^2 \mathrm{sn}^2 u + R_4^{(2n)} \frac{d^2}{du^2} k^2 \mathrm{sn}^2 u + \cdots$$
$$+ R_{2n}^{(2n)} \frac{d^{(2n-2)}}{du^{(2n-2)}} k^2 \mathrm{sn}^2 u,$$

worin $R_0^{(2n)}$ von u unabhängig ist."

Csy. (M.).

J. J. WALKER. Proof of the addition theorem for elliptic integrals of the second kind, and of Fagnano's theorem. Lond., S. M. Proc. XIII. 172-174.

Bekanntlich werden die Beweise der Additionstheoreme für die elliptischen Integrale zweiter und dritter Gattung, analog dem Lagrange'schen Beweise für die erste Gattung, mit Hülfe der Eigenschaften des sphärischen Dreiecks gegeben (s. Gr... Borchardt J. XC. 83, F. d. M. XII. (1880) 353.). Herr Walker geht, um das Additionstheorem für die zweite Gattung herzuleiten, von der Ellipse und deren Tangenten aus und betrachtet den Ueberschuss der Summe zweier von einem Punkte aus gezogenen Tangenten über den dazwischen liegenden Bogen. Ein besonderer Fall führt dann auf einen einfachen und unabhängigen Beweis des Satzes von Fagnano. M.

Novarese. Intorno ad alcune formole di Hermite per l'addizione delle funzioni ellittiche. Torino, Atti. XVII. 607-625.

Novarese. Intorno alla multiplicazione delle funzioni ellittiche. Torino, Atti XVII. 723-739.

Für die Additionstheoreme der drei elliptischen Functionen sn, cn, dn hat Herr Hermite in einer „Note sur la théorie des fonctions elliptiques", welche der sechsten Auflage von Lacroix' Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral T. II. p. 432 beigefügt ist, folgende Form gegeben:

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+\cdots+u_{2n-1}) = \frac{\pm L}{\operatorname{sn}u_1 \operatorname{sn}u_2 \ldots \operatorname{sn}u_{2n-1}},$$

und ähnlich für cn und dn$u$. Die Constanten L etc. sind folgendermassen bestimmt. Wenn z eine der drei Functionen sn, cn, dn darstellt, und die Function

$$\varphi(u) = F(z^2) + \frac{dz}{du} zF_1(z^2)$$

betrachtet wird, wo F und F_1 ganze rationale Functionen vom Grade n und $n-2$ sind, so ergeben sich die $2n-1$ auftretenden Constanten aus der Gleichung

$$\varphi(u_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

und das von z unabhängige Glied des Polynoms F giebt die Zähler L etc. Diese Formel von Hermite wird nun in der ersten Note entwickelt, indem die Ausdrücke für

$$\operatorname{sn}(u_1+u_2+\cdots+u_m),\ \operatorname{cn}(u_1+u_2+\cdots+u_m) \text{ etc.},$$

wo m irgend eine ganze Zahl ist, als Quotienten zweier Determinanten von der Ordnung m mit unzweideutigem Vorzeichen dargestellt werden. Da diese Darstellungen für $u_1 = u_2 = \cdots u_m = u$ in zwei Glieder übergehen, deren erstes sn(mu) etc., aber deren zweites die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so wird in der zweiten Note diese Unbestimmtheit dadurch vermieden, dass dem Multiplicationstheorem eine andere Form gegeben wird, die es sich als besonderen Fall des Additionstheorems erscheinen lässt.

Erreicht wird diese Umformung mit Hülfe eines Theorems Herrn Siacci, nämlich: „Für

$$x_0 = x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = x$$

reducirt sich der Quotient

$$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x_0)\,\varphi_1(x_1)\ldots\varphi_{n-1}(x_{n-1})}{\Sigma \pm \psi_0(x_0)\,\psi_1(x_1)\ldots\psi_{n-1}(x_{n-1})}$$

auf

$$\frac{\Sigma \pm \varphi_0(x)\varphi_1'(x)\ldots\varphi_{n-1}^{(n-1)}(x)}{\Sigma \pm \psi_0(x)\psi_1'(x)\ldots\psi_{n-1}^{(n-1)}(x)}.$$

M.

J. W. L. Glaisher. On certain formulae in elli functions. Quart. J. XIX. 22-38.

Die ähnliche Gestalt der Formeln

$$\operatorname{tg}(A-B) = \frac{\operatorname{tg}A - \operatorname{tg}B}{1-\operatorname{tg}A\,.\operatorname{tg}B}$$

und

$$\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\,.\operatorname{sn}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta}{1-k^2\operatorname{sn}^2\alpha\,.\operatorname{sn}^2\beta}$$

führt darauf, $\operatorname{tg}(A-B)$, $\operatorname{tg}(A-C)$, $\operatorname{tg}(B-C)$ etc. zu ers durch:

$ik\operatorname{sn}(\alpha-\beta)\operatorname{sn}(\alpha+\beta)$, $ik\operatorname{sn}(\alpha-\gamma)\operatorname{sn}(\alpha+\gamma)$, $ik\operatorname{sn}(\beta-\gamma)\operatorname{sn}(\beta+\gamma$

Auf diesem Wege gelangt Herr Glaisher zu einer Reihe von meln für die elliptischen Functionen, welche der von J (Crelle XV. und Werke I. 335-341) gegebenen

$$\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(y-z)+\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(z-x)+\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(x-y$$
$$+k^2\operatorname{sn}(w-x)\operatorname{sn}(w-y)\operatorname{sn}(w-z)\operatorname{sn}(y-z)\operatorname{sn}(z-x)\operatorname{sn}(x-y)$$

analog sind. Am Schluss wird gezeigt, dass man jede Rel welche nur sin am enthält, in eine trigonometrische verwa kann, indem man entweder $k=0$ oder $k=1$ setzt. V Messenger X. 26 und Proc. of Cambr. Phil. Soc. III. 308, (F. d. M. XII. (1880) p. 429.). M.

L. Glaisher. On a method of deriving formulae elliptic fonctions. Cambr. Proc. IV. 186-188.

ie Methode besteht in Folgendem: Wird $\mathrm{sn}\,u$, wenn der gleich 1 ist, mit $\mathrm{sn}_1 u$ bezeichnet, so ist

$$\mathrm{sn}_1(u-v) = \frac{\mathrm{sn}_1 u - \mathrm{sn}_1 v}{1-\mathrm{sn}_1 u \,.\, \mathrm{sn}_1 v},$$

venn der Modul $= k$ ist,

$$k\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\mathrm{sn}(\alpha+\beta) = \frac{k\,\mathrm{sn}^2\alpha - k\,\mathrm{sn}^2\beta}{1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2\beta}.$$

ı wir also

$$\mathrm{sn}_1 u = k\,\mathrm{sn}^2\alpha,\quad \mathrm{sn}_1 v = k\,\mathrm{sn}^2\beta,$$

wandeln wir $\mathrm{sn}_1(u-v)$ in $k\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)$. Wenn wir irgend welche Formeln haben, die die sn der Differenzen rgumente enthalten, und wir setzen $k=1$, so können wir n jeder Differenz durch das k-fache Product der sn der ıen und Differenzen der Argumente ersetzen, z. B.

$$\begin{array}{lll} \mathrm{sn}_1(u-v) & \text{durch} & k\,\mathrm{sn}(u-v)\,\mathrm{sn}(u+v), \\ \mathrm{sn}_1(u-w) & \text{„} & k\,\mathrm{sn}(u-w)\,\mathrm{sn}(u+w) \text{ etc.,} \end{array}$$

vir erhalten eine neue Formel, die für den Modul k rich-
:. Glr. (M.).

[. U. Wilkinson. Some elliptic function formulae. ıd., M. S. Proc. XIII. 106-109.

ꞌs wird eine Reihe von Formeln entwickelt, die aus dem ionstheorem fliessen: zuerst solche, die der Formel

$$\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)+\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}(\beta-\gamma)+\mathrm{sn}\,\gamma\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)$$
$$= -\mathrm{sn}(\alpha-\beta)\,\mathrm{sn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)$$

g sind, z. B.

$$\mathrm{cn}\,\alpha\,\frac{\mathrm{sn}(\beta-\gamma)}{\mathrm{cn}(\beta-\gamma)}+\mathrm{cn}\,\beta\,\frac{\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)}{\mathrm{cn}(\gamma-\alpha)}+\mathrm{cn}\,\gamma\,\frac{\mathrm{sn}(\alpha-\beta)}{\mathrm{cn}(\alpha-\beta)}$$
$$= k^2\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma\,\frac{\mathrm{sn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{sn}(\gamma-\alpha)\,\mathrm{sn}(\alpha-\beta)}{\mathrm{dn}(\beta-\gamma)\,\mathrm{dn}(\gamma-\alpha)\,\mathrm{dn}(\alpha-\beta)},$$

ın die Darstellungen von

$$\mathrm{sn}(\alpha+\beta+\gamma),\quad \mathrm{cn}(\alpha+\beta+\gamma),\quad \mathrm{dn}(\alpha+\beta+\gamma).$$

M.

W. W. Johnson. Systems of formulae for the sn, cn and dn of $u+v+w$. Lond., M. S. Proc. XIII. 97-102.

In den hier gegebenen Formelsystemen für $\text{sn}(u+v+w)$, $\text{cn}(u+v+w)$ und $\text{dn}(u+v+w)$ sind die früher von Herrn Glaisher (Messenger (2) XI.; s. F. d. M. XIII. (1881) 356) gegebenen, in denen der gemeinsame Nenner eine rationale Function von sn^2u, sn^2v und sn^2w ist, sowie die Caley'schen mit irrationalem Nenner, die aber für $w=0$ in die bekannten Formeln für die Summe zweier Argumente übergehen, enthalten. M.

J. W. L. Glaisher. Sur quelques équations identiques dans la théorie des fonctions elliptiques. Ass. fr. 1880.

Bezeichnet man sn, cn, dn mit s, c, d und beziehen sich die Indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf die sechs Argumente A, $B-C$, B, $C-A$, C, $A-B$, so ergiebt sich die den beiden Gudermann'schen (Crelle J. XVIII) analoge Formel

$$s_1s_2d_3d_4d_5d_6+s_3s_4d_1d_2d_5d_6+s_5s_6d_1d_2d_3d_4-k^2k'^2s_1s_2s_3s_4s_5s_6=0,$$

und durch Combination mit den ersteren eine allgemeinere Identität, aus der wieder zahlreiche andere sich ableiten lassen.

M.

M. M. U. Wilkinson. On the addition equations for the elliptic and Θ-functions of the sum of n arguments. Lond., M. S. Proc. XIII. 110-125.

Relationen zwischen Determinanten, gebildet aus elliptischen Functionen einerseits und Thetaproducten andererseits.

H. St.

W. W. Johnson. On the spherical triangle proof of the addition equation in elliptic functions. Quart. J. XVIII. 365-370.

Wenn man nach Legendre's Vorgang die Seiten eines sphärischen Dreiecks als Amplituden elliptischer Integrale auffasst und

otienten aus dem Sinus eines Winkels und dem Sinus ;enseite gleich dem Modul k setzt, ergeben sich zwölf ıgen zwischen den Stücken des sphärischen Dreiecks, aus eder eine besondere Form des Additionstheorems ent- Diese Formen werden schematisch zusammengestellt.

M.

USENBERGER. Notiz zur Theorie der Modulfunc- ɔn. Klein Ann. XX. 45-46.

wird gezeigt, dass zwischen den Reihen, die Herr Hurwitz llagen einer independenten Theorie der elliptischen Modul- ıen", Clebsch Ann. 528., s. F. d. M. XIII. (1881) 364) der ctionen der Modulfunctionen zu Grunde legt, und den en Reihen, auf die Herr Poincaré (Sur les fonctions uni- etc., Clebsch Ann. XIX., s. diesen Bd. p. 344) die Bil- on Transcendenten, welche die Modulfunctionen als spe- Fall in sich schliessen, basirt, eine sehr einfache Be- besteht.

M.

JOHNSON. On the derivation of elliptic function ıulae by transformation to the reciprocal and com- ıentary modulus. Mess. (2) XI. 138-141.

ınsformationen der Functionen sn$u$, cn$u$, dn$u$ mit dem ; in solche mit dem Modul k', $\frac{1}{k'}$, $\frac{ik}{k'}$, $\frac{ik'}{k}$, $\frac{1}{k}$. fasser bedient sich der Bezeichnungen des Herrn Glaisher, sc$u$, ns$u$ etc. für $\frac{\text{sn}\,u}{\text{cn}\,u}$, $\frac{1}{\text{sn}\,u}$ etc., und geht noch n der analogen Bedeutung von s_ν, c_ν, d_ν etc. Wenn z. B. $_1$, n_1 und s_2, c_2, d_2, n_2 sich auf die Argumente u und v ;ziehen, und S, C, D, N auf $u+v$, so lassen sich die ıstheoreme so schreiben:

$$S = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}(s_1 n_1 c_2 d_2 + s_2 n_2 c_1 d_1),$$

$$C = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}(c_1 \cdot c_2 n_1 n_2 - s_1 s_2 d_1 d_2),$$

$$D = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}(d_1 d_2 n_1 n_2 - k^2 s_1 s_2 c_1 c_2),$$

$$N = \frac{1}{n_1^2 n_2^2}(n_1^2 n_2^2 - k^2 s_1^2 s_2^2).$$

Es werden nun die Aenderungen in den Buchstaben s, c
angegeben für die oben erwähnten fünf Transformationen.

Glr. (M.).

Pocrovsky. Beziehungen zwischen den Moduln und il Complementären bei der Transformation 5ten Gr der elliptischen Functionen. Mosk. S. X. Lief. I. (Russi

Durch Anwendung der allgemeinen Formeln von Jacob Transformationen ungraden Grades werden hier die beider genden Gleichungen gefunden:

$$\sqrt[4]{K\Lambda}(\sqrt{K}-\sqrt{\Lambda}) = \sqrt[4]{K'\Lambda'}(\sqrt{\Lambda'}-\sqrt{K'}),$$

$$\sqrt[4]{K\Lambda_1}(\sqrt{\Lambda_1}-\sqrt{K}) = \sqrt[4]{K'\Lambda'_1}(\sqrt{K'}-\sqrt{\Lambda'_1}).$$

Ty.

E. H. Glaisher. Formulae for sin 8u, cn 8u, dn 8 terms of sn u. Edinb. Proc. XXXII. 480-485.

Die entsprechenden Formeln für 7u waren 1861 von B in Grunert Arch. XXXVI. gegeben worden. Hier sind sie 8u erweitert. Die Berechnungen geschehen mit Hülfe Functionen P, Q, R, S, welche die drei Zähler und die Ne in den Ausdrücken sn 4u, cn 4u und dn 4u sind.

Cly. (O.).

Ely. The algebraic solution of the modular equa- for the septic transformation. Lond., M. S. Proc., XIII. 156.

ısgehend von der Cayley'schen Form

$$\frac{1-y}{1+y} = \frac{1-x}{1+x}\left(\frac{1-\alpha x+\beta x^2-\gamma x^3}{1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3}\right)^2$$

Transformation siebenten Grades gelangt Herr Ely auf ıalytischem Wege zu der Modulargleichung

$$(1-u^8)(1-v^8) = (1-uv)^8$$

e Transformation. M.

---

n Lilienthal. Ueber zwei Schaaren sphärischer ven, deren Coordinaten elliptische Functionen sind. ıecker J. XCIII. 237-256.

e Coordinaten der hier betrachteten beiden Schaaren von urven haben die Form:

$$= i\cos\alpha\,\{\psi(u-a_1)-\psi(u-a_2)+\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4)\},$$
$$= i\sin\alpha\,\{\psi(u-a_1)-\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},$$
$$= \psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4),$$

$$\wp^{(2\nu-1)}(u-a_\alpha)+\lambda\wp^{(2\nu-3)}(u-a_\alpha)+\lambda_1\wp^{(2\nu-5)}(u-a_\alpha)+\cdots$$
$$+\lambda_{\nu-2}\wp'(u-a_\alpha)-\lambda_{\nu-1}\frac{\sigma'}{\sigma}(u-a_\alpha) = \psi(u-a_\alpha),$$

$$= \cos\alpha\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)+\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},$$
$$= \sin\alpha\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)-\psi(u-a_4)\},$$
$$= i\,\{\psi(u-a_1)+\psi(u-a_2)-\psi(u-a_3)+\psi(u-a_4)\},$$

$$u-a_\alpha)+\lambda\wp^{(2\nu-2)}(u-a_\alpha)+\cdots+\lambda_{\nu-2}\wp''(u-a_\alpha)+\lambda_{\nu-1}\wp(u-a_\alpha)$$
$$= \psi(u-a_\alpha)$$

t ist, und

$$a_1 = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2},\quad a_2 = \frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2},\quad a_3 = -\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2},$$

$$a_4 = -\frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}.$$

Die hier vorkommenden Constanten lassen sich bis auf eine, die nebst dem Modul beliebig bleibt, so bestimmen, dass die betreffenden Curven auf einer Kugel liegen. Das Integral, welches die Bogenlänge der Curve darstellt, ist ein elliptisches Integral erster Art, vermehrt um die Differerenz zweier elliptischer Integrale dritter Art. Bei der zweiten Schaar der sphärischen Curven lässt sich die willkürliche Constante so bestimmen, dass das Bogenintegral ein elliptisches Integral erster Gattung wird. Durch Integration der Functionen x, y, z erhält man zwei Schaaren transcendenter Curven, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Gattung ist. Die Integralcurven der zweiten Schaar liegen auf algebraischen Cylindern. Die Integralcurven derjenigen Curven der zweiten Schaar, deren Bogenlänge ein elliptisches Integral erster Gattung ist, sind Asymptotenlinien von Minimalflächen, auf welchen eine Schaar algebraischer Curven liegt. M.

A. R. Forsyth. Porism of the in- and circum-scribed polygon. Mess. (2) XII. 100-105.

Das Porisma besagt, dass, wenn ein Polygon zwei Kreisen ein- und umschrieben werden kann, eine unendliche Zahl von Polygonen ebenso um- und eingeschrieben werden können. Es wird mit Hülfe elliptischer Functionen die Beziehung zwischen R, r, den Radien der beiden Kreise, und a, ihrer Centrale, hergeleitet, wenn das ein- und umschriebene Polygon ein Dreieck, Viereck, Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, Achteck und Neuneck ist.

Glr. (M.)

E. Fergola. Di alcune equazioni relative alla teoria delle funzioni ellittiche, e teoremi di geometria che vi si connettono. Nap., Rend. XXI. 132-133.

Die hier angeführten Sätze betreffen Polygone von m Seiten, he einem Kreise eingeschrieben und einem anderen Kreise :hrieben sind. Z. B.: „Ist ein Polygon von m Seiten einem se eingeschrieben und einem zweiten Kreise umschrieben, eibt der Schwerpunkt aller Berührungspunkte stets auf der ale beider Kreise, wie man auch das Polygon innerhalb :inen und um den andern verschieben mag." Dieser und he Sätze lassen sich mit Hülfe der elliptischen Functionen sen. Die dazu erforderlichen Formeln betreffen die Summen:

$$\sum_{m=1,\dots} \sin[\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)+\mathrm{am}(u+mt)],$$
$$\sum_{m=1,\dots} \cos[\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)+\mathrm{am}(u+mt)],$$
$$\sum \cos[\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)-\mathrm{am}(u+\overline{m+1}t)],$$
$$\sum \cos[\mathrm{am}(u+mt)-\mathrm{am}(u+\overline{m-1}t)],$$
$$\sum \mathrm{cn}(u+\overline{m-1}t)\,.\,\mathrm{cn}(u+mt),$$
$$\sum \mathrm{sn}(u+\overline{m-1}t)\,.\,\mathrm{sn}(u+mt).$$

M.

ADELETTI. Alcuni corollari di un teorema del Prof. :rgola. Nap., Rend. XXI. 155-157.

)er oben angeführte Satz des Herrn Fergola wird dahin tert, dass die Polygone Ellipsen mit parallelen und pro- »nalen Axen eingeschrieben und umschrieben sind. Dieser sowie eine Reihe ähnlicher, ergiebt sich, indem man andere tionen aufsucht, deren Wert bei der Aenderung der Poly- constant bleibt. M.

'RUDI. Notizie retrospettive intorno ai corollari de- tti dal socio Padeletti da alcuni recenti teoremi del cio Fergola. Nap., Rend. XXI. 170-172.

Ierr Trudi weist auf den Zusammenhang hin, den die eben ührten Sätze von Fergola und Padeletti mit seinen schon ahren aus der Theorie der reciproken Polaren gewonnenen

Resultaten und von Steiner 1844 im Giornale Arcadico veröffen-
lichten Sätzen haben. M.

A. Cayley. On the geometrical interpretation of certai
formulae in elliptic functions. J. Hopkins Circ. 1882. 23.

Die Formeln

$$\mathrm{dn}^2\left(u+\frac{1}{2}k\right)=k'\frac{\mathrm{dn}\,u-(1-k')\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u+(1-k')\mathrm{sn}\,u.\mathrm{cn}\,u}$$
$$=k'\frac{1-k^2\mathrm{sn}^2u-(1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-k^2\mathrm{sn}^2u+(1-k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}.$$

$$\mathrm{sn}^2\left(u+\frac{1}{2}ik'\right)=\frac{1}{k}\,\frac{(1+k)\,\mathrm{sn}\,u+i\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{(1+k)\,\mathrm{sn}\,u-i\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$
$$=\frac{(1+k)\,\mathrm{sn}^2u+i\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{(1+k)\,\mathrm{sn}^2u-i\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u},$$

$$\mathrm{cn}^2\left(u+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}ik'\right)=\frac{-ik'\,\mathrm{cn}\,u-(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{k\,\mathrm{cn}\,u+(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$
$$=\frac{-ik'}{k}\,\frac{1-\mathrm{sn}^2u-(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1-\mathrm{sn}^2u+(k+ik')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}$$

werden auf die Theorie der Curve dritten Grades

$$y^2=x(1-x)(1-k^2x)$$

angewendet, wo

$$x=\mathrm{sn}^2u,\quad y=\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u.$$

M.

Ch. Hermite. Applications de la théorie des fonctio
elliptiques. C. R. XCIV. 186-192, 372-377, 477-482, 592-600, 753-

Fortsetzungen der Abhandlungen in den Bänden LXXXV
XCIII der C. R., über welche in den früheren Jahrgängen die
Zeitschrift (IX.-XIII.) berichtet worden ist. Es werden die A
wendungen auf die Mechanik zu Ende geführt, und alsdann w
die Gleichung

$$D_x^2y=[n(n+1)k^2\,\mathrm{sn}^2x+h]y,$$

deren Lösung bisher nur für $n=1$ und $n=2$ erhalten war,
ihrer ganzen Allgemeinheit betrachtet. M.

C. Hyperelliptische und Abel'sche Functionen.

UNGAR. Die Reduction Abel'scher Integrale auf Normalintegrale. Wien. Ber. LXXXVI. 893-908.

Das Problem der Reduction hyperelliptischer und Abel'scher [Int]egrale auf Normalintegrale ist zuerst von Abel aufgestellt [(Oe]uvres I. XXVIII.) und für die binomischen Integrale durch[ge]führt (Oeuvres II. XVII.). In der vorliegenden Abhandlung [wi]rd eine Reductionsformel aufgestellt, welche für alle Abel'schen [Int]egrale giltig ist, aus der man die Möglichkeit, ein Abel'sches [Int]egral auf algebraische Functionen zu reduciren, beurteilen [ka]nn. Die allgemeinste Relation aber zwischen einem solchen [Int]egral und algebraisch-logarithmischen Functionen wird auf die [be]kannten Gleichungen des Abel'schen Theorems zurückgeführt.

M.

PICARD. Sur la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques. C. R. XCIV. 1704-1707.

In einer früheren Note (C. R. XCIII. 1126; s. F. d M. XIII. [(1]881) 379) hatte Herr Picard gezeigt, wie sich das hyperellip[tis]che Integral, das dem Polynom fünften Grades

$$y^2 = x(1-x)(1-k^2x)(1-l^2x)(1-m^2x)$$

[ent]spricht, auf elliptische Integrale zurückführen lässt. Im Vor[lie]genden wird die algebraische Substitution, welche die Trans[for]mation des genannten Integrals bewirkt, eingehender erörtert.

M.

HANEL. Reduction hyperelliptischer Functionen auf elliptische. Breslau. Köhler.

C. MALET. On certain definite integrals. Dublin. Trans. XXVIII. 1882.

Die hier behandelten Integrale ähneln einer gewissen Klasse

von hyperelliptischen Integralen, die vermöge gewisser Bezieh-gen zwischen den Moduln reducirbar sind. Eine Reihe sol Integrale, die aber logarithmische Ausdrücke enthalten, w durch gewöhnliche Transformationen zurückgeführt auf elliptis und hyperellische Integrale mit drei Moduln. Csy. (M.)

G. A. Pick. Ueber die Integration hyperelliptisc Differentiale durch Logarithmen. Wien. Ber. LXX 643-662.

Die Zurückführung hyperelliptischer Integrale auf Loga men algebraischer Functionen ist allgemein von Herrn Kön berger (Vorlesungen über die Theorie der hyperellipt. Integr p. 120 sq. 132 sq.) gelöst worden, indem zunächst die angenomm Gleichung mit Hülfe der Zerlegung des gegebenen Integral Normalintegrale, in solche einfacheren zerfällt wird, die nu ein logarithmisches Glied haben, und indem dann die Beding gen für die Existenz solcher Gleichungen sowohl in transcende als in algebraischer Form gewonnen werden. Im Vorliegen versucht der Herr Verfasser das in Rede stehende Problem rein algebraischer Weise zu lösen. Als notwendige und reichende Bedingung für das Bestehen der Reductionsgleich

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{D}} = \int \frac{\varrho_0 d\xi}{\sqrt{D}} + \frac{1}{k} \log \left\{ \frac{\gamma_1 + \gamma\sqrt{D}}{\gamma_1 - \gamma\sqrt{D}} \right\},$$

wo D ein ganzes Polynom in ξ vom Grade $2p+1$, de Linearfactoren sämmtlich verschieden sind, und γ_1, γ ganze P nome in ξ ohne gemeinsamen Teiler, ist die Existenz von ganzen Polynomen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ erforderlich, die den Bedingun

$$a\alpha^2 - c\gamma^2 = m = [(\xi-\xi_1)^{k_1}(\xi-\xi_2)^{k_2}\dots(\xi-\xi_r)^{k_r}]^k,$$
$$a\alpha\beta - c\gamma\delta = n,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (ac = D),$$

genügen. Für die weiteren Untersuchungen wird eine Met benutzt, die der zahlentheoretischen Behandlungsweise der dratischen Formen von negativer Determinante ganz analo

M.

:Y. Reduction of $\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ to elliptic integrals.

) XI. 142-143.

Ierr Verfasser zeigt, dass, wenn

$$x = \frac{-1+\theta \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1+\theta \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u},$$

$$\int \frac{dx}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} \theta u,$$

ω, $\theta^3 = -1+\omega$, und ω eine imaginäre dritte Einheits-

. Glr. (M.).

.L. Sur un cas de réduction des fonctions Θ ıx variables à des fonctions Θ d'une variable. ƆIV. 421-424.

.L. Sur des cas de réductions des fonctions Θ sieurs variables à des fonctions Θ d'un moindre e de variables. S. M. F. Bull. X. 59-67.

i

$$\Theta(x,y) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} e^{mx+ny+m^2\alpha+2mn\gamma+n^2\beta},$$

über alle ganzzahligen m und n. und die normalen ler entsprechenden Abel'schen Functionen seien:

für x $2\pi i, 0, 2\alpha, 2\gamma$,

für y $0, 2\pi i, 2\gamma, 2\beta$.

ınn zwischen den letzten Perioden eine Gleichung von

$$2k\gamma = 2k'\beta + 2k''\pi i,$$

$''$ ganze Zahlen sind, so lässt sich $\Theta(x,y)$ durch Func- einer Variabeln ausdrücken. Diese in der ersten Note Reduction lässt sich nun, wie in der zweiten Abhand- ɜigt wird, verallgemeinern. Es wird nämlich die

$$\Theta(x_1, x_2, \ldots, x_p, a_{ij}) = \sum_{m_i=-\infty}^{m_i=+\infty} e^{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_px_p+\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p)},$$

wo die quadratische Form

$$\varphi(m_1, m_2, \ldots, m_p) = \sum_{i,j=1}^{i,j=p} a_{ij}\, m_i\, m_j,\ (a_{ij} = a_{ji})$$

auf Functionen Θ von $(p-1)$ Variabeln und Functionen Θ vo[n] einer Variabeln reducirt, wenn die Perioden für x_p durch $(p-1)$ Gleichungen derart verbunden sind, dass sie sich auf $(p-2)$ zurück führen lassen. Eine analoge Reduction des obigen Θ findet stat[t] wenn die p Gruppen simultaner Perioden der $(p-1)$ Variabel[n] $x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$ sich auf $(p-1)$ getrennte Gruppen zurückführ[en] lassen. M.

E. Picard. Sur les équations différentielles abélienn[es] dans le cas de la réduction du nombre des périod[es]. C. R. XCV. 898-901.

Es sei $f(x,y) = 0$ eine algebraische Gleichung der Gattung [p.] Wir nehmen an, dass unter den p Integralen erster Gattung

$$\int_{x_0}^{x} \frac{F_q(x,y)dx}{f'_y(x,y)} \qquad (q = 1, 2 \ldots$$

nur $2q$ verschiedene Perioden haben, und dass alle ander[en] Periodensysteme sich linear mit ganzzahligen Coefficienten dur[ch] jene ausdrücken lassen, und betrachten das System

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{F_q dx}{f'_y} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{F_q dx}{f'_y} + \cdots + \int_{x_0}^{x_q} \frac{F_q dx}{f'_y} = u_q + h_q$$

$$(q = 1, 2, \ldots, q),$$

wo die h Constanten sind. Für das Abel'sche System, wo $q=p$ ist, ist jede symmetrische Function der x_q eindeutige Functio[n] der u_q. Nun wird gezeigt, dass, wenn auch $q<p$, die x no[ch] Wurzeln algebraischer Gleichungen sind, deren Coefficient[en] eindeutige Functionen der u mit $2q$ Periodensystemen sind. Die[se] periodischen Functionen lassen sich durch Thetafunctionen von unabhängigen Variabeln ausdrücken. Für den besonderen Fa[ll]

2 wird der Beweis durchgeführt, für die höheren Fälle nur
deutet. M.

. FORSYTH. A memoir on the theta-functions, par-
cularly those of two variables. Phil. Trans. CLXXIII.

Die Abhandlung zerfällt in fünf Abschnitte. Im ersten Ab-
itt wird die sogenannte Rosenhain'sche Theorie der Theta-
ionen zweier Argumente entwickelt. Es wird nämlich nach
ogie der Methode von Prof. H. J. S. Smith für die ein-
en Thetafunctionen (L. M. S. I.) ein allgemeines Theorem für
Product von vier doppelten Functionen mit verschiedenen
akteristiken und Variabeln hergeleitet. Definirt wird:

$$\Phi\left\{\begin{pmatrix}\lambda, \varrho \\ \mu, \nu\end{pmatrix} x, y\right\}$$

$$\sum_{=-\infty}^{=+\infty} (-1)^{m\lambda+n\varrho} p^{\frac{1}{4}(2m+\mu)^2} q^{\frac{1}{4}(2n+\nu)^2} r^{\frac{1}{4}(2m+\mu)(2n+\nu)} e^{(2m+\mu)\frac{i\pi x}{2K}+(2n+\lambda)\frac{i\pi y}{2\Lambda}}.$$

erhaltene Product wird gleich der Summe von 16 ähnlichen
lucten; und die allgemeine Gleichung umfasst, wie gezeigt
, 4096 besondere Fälle. Zwischen den Functionen werden
ratische Gleichungen aufgestellt; die 15 Quotienten aller,
Ausnahme einer, werden als Functionen dieser einen, in der
nnten Weise, in Gliedern zweier neuer Variabeln x_1, x_2
edrückt, wo x_1, x_2 die oberen Grenzen der von der Irratio-
it $\sqrt{z(1-z)(1-k_1^2 z)(1-k_2^2 z)(1-k_3^2 z)}$ abhängenden Integrale
Die Formeln enthalten ausser k_1, k_2 und k_3 die vier Con-
en A, B, A', B'.

Im zweiten Abschnitt werden die obigen Functionen in trigo-
trische Reihen nach steigenden Potenzen von x und y ent-
elt. Zu dem Zweck wird das Theorem

$$\Phi\left\{\begin{pmatrix}\lambda, \varrho \\ \mu, \nu\end{pmatrix} x, y\right\} = e^{\frac{-2K\Lambda \log r}{\pi} \cdot \frac{d^2}{dx.dy}} \theta_{\mu,\lambda}(x)\, \theta_{\nu,\varrho}(y)$$

esen, wo $\theta_{\mu,\lambda}(x), \theta_{\nu,\varrho}(y)$ einfache Thetafunctionen sind. Hieraus
en die Ausdrücke für die vier Perioden erhalten, sowie ein

Beweis für das Product-Theorem des ersten Abschnittes. Fe wird gezeigt, dass die Function Φ zweien Differentialgleichun von der Form

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\left(k'^2 - \frac{E}{K}\right)\frac{d\Phi}{dx} + 2kk'^2\frac{d\Phi}{dk} = 0$$

genügt, wo k, k', E die gewöhnliche Bedeutung in Bezug $\theta_{\mu,\lambda}(x)$ haben, und einer Differentialgleichung von der Form

$$r\frac{d\Phi}{dr} + \frac{2K\Delta}{\pi^2}\cdot\frac{d^2\Phi}{dx\,dy} = 0.$$

Im dritten Abschnitte werden die Ausdrücke für die Prod $\Phi(x+\xi, y+\eta)\,.\,\Phi'(x-\xi, y-\eta)$ gebildet, wo die Φ und Φ' selben oder verschiedene Thetafunctionen sind. Es giebt Ganzen 256 solcher Gleichungen, die zu je 16 in 16 Rubr hingeschrieben sind. Der vierte Abschnitt enthält eine dehnung der oben bewiesenen Eigenschaften auf r-fache T functionen. Insbesondere werden die r und $\frac{r(r-1)}{2}$ Differe gleichungen erhalten, die den obigen 2 und der einen entspre Beziehungen zu früheren Arbeiten sind in der Einleitung Seite 785 und 786 erwähnt. Cly. (M.)

A. R. Forsyth. On Abel's theorems and Abelian functi Edinb. Proc. XXXIV. 288-291.

Auszug aus einer Arbeit, die demnächst in den Transac veröffentlicht werden wird. Cly. (O.)

A. Cayley. Note on Abel's theorems. Cambr. Proc. 119-122.

Betrachtet man das Abel'sche Theorem in so weit, al sich auf die erste Gattung der Integrale bezieht, und sieht es als ein Differential-, nicht Integral-Theorem an, so kan folgendermassen ausgedrückt werden. Es sei $f(x, y, 1) = 0$ bestimmte Curve von der Ordnung m; sie enthalte eine ziehung

$$f'(x)dx + f'(y)dy = 0$$

[illegible]chen den Differentialen dx, dy der Coordinaten eines Curven-[illegible]ktes, und wir können deshalb schreiben

$$d\omega = \frac{dx}{f'(y)} = -\frac{dx}{f'(x)},$$

[illegible]d anstatt dx und dy das $d\omega$ benutzen, um die Verrückung [illegible]es Punktes auf der Curve auszudrücken. Wir nehmen der [illegible]sseren Einfachheit halber eine Curve ohne Spitzen und Doppel-[illegible]nkte, also vom Geschlecht $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ und betrachten [illegible]e mn Durchschnittspunkte mit einer veränderlichen Curve [illegible]$x, y, 1) = 0$ von der Ordnung n. Bezeichnet dann $(x, y, 1)^{m-3}$ [illegible]e beliebige ganze rationale Function von x, y von der Ord-[illegible]g $m-3$, so besagt das Abel'sche Theorem, dass zwischen den [illegible]rückungen der mn Durchschnittspunkte die Gleichung

$$\Sigma(x, y, 1)^{m-3} d\omega = 0$$

[illegible]teht, wo sich die Summe auf alle Werte von $(x, y, 1)^{m-3}$ er-[illegible]reckt, die zu den resp. mn Durchschnittspunkten gehören.

Glr. (M.).

[illegible] C. Rowe. Memoir on Abel's theorem. Phil. Trans. CLXXIII. 713-750.

Ein Auszug aus dieser Abhandlung ist erwähnt in F. d. M. [illegible] (1880) p. 322. Sie ist im Wesentlichen eine Reproduction von [illegible]el's grosser Abhandlung: „Sur une propriété générale d'une [illegible]sse fort étendue de fonctions transcendantes“, 1826, Mém. [illegible] Étrang. 1841, Werke, 2[te] Ausg. 145-211. Der erste Abschnitt [illegible]t. 1-10) enthält eine Untersuchung des Hauptsatzes in der [illegible]el'schen Abhandlung. Durch Anwendung eines Satzes von [illegible]le wird das Theorem etwas einfacher geschrieben in der Form

$$\int f(x\ y)\,dx = \Theta\left[\frac{1}{f_2(x)F'_0(x)}\right] F_0(x).\Sigma \frac{f_1(x,y)}{\lambda'(x,y)} \log\theta(y) + C.$$

[illegible] der Gleichung (37) bei Abel entspricht. Es folgen einige [illegible]spiele für das Theorem. Im zweiten Abschnitte wird gezeigt, [illegible]s sich aus den Resultaten des ersten Abschnittes ergiebt, [illegible]s die Summe einer beliebigen Zahl von Integralen der

betrachteten Form sich durch eine bestimmte Zahl solcher Integr ausdrücken lässt, und so wird die Frage nach der kleinsten A zahl solcher Integrale erörtert. Der Ausdruck für diese gesuc Zahl y wird (p. 741) in folgender eleganten Form gegeben:

$$y = \sum_{s>r} n_r m_r n_s \mu_s + \frac{1}{2} \Sigma n^2 m\mu - \frac{1}{2} \Sigma nm - \frac{1}{2} \Sigma n - \frac{1}{2} n + 1 - A -$$

wo die letzten Glieder $-A-B$, welche als Correction hinzu fügt sind, im Allgemeinen Null sind. Die Untersuchung ist et vereinfacht durch die Nomenclatur der „major terms" und „se durch die Einführung des Buchstabens τ, und durch verschied kleinere Aenderungen in der Bezeichnung. Der dritte Absch enthält zwei getrennte Teile: Zuerst eine Verallgemeinerung Theorems im ersten Abschnitt; es wird gezeigt, dass ein gleic Ausdruck erhalten werden kann für eine Summe einer be bigen Zahl von Integralen, deren jedes mit einer rational positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Zahl mu plicirt ist; und zweitens eine Untersuchung der notwendi Bedingungen, damit der algebraische Ausdruck für die Sum der Integrale in dem Theorem des ersten Abschnittes, näml das Glied auf der rechten Seite, sich auf eine constante reduc Der von Abel gegebene Beweis wird hier wesentlich verk und vereinfacht. Ein Anhang enthält ein algebraisches Lem und ein (hoffentlich vollständiges) Verzeichnis der Fehler in Originalabhandlung. Cly. (M.)

A. Cayley. Addition to Mr. Rowe's Memoir. Phil. T CLXXIII. 751-758.

Es ist ein Hauptresultat in Riemann's Theorie der Abel's Integrale, dass Abel's y das Geschlecht der Curve ist, die d die Gleichung $X(x,y) = 0$ dargestellt wird, welche die irratio Function y, von der die Integrale abhängen, bestimmt. Daher sich a posteriori beweisen lassen, dass der Ausdruck für y in That gleich dem Geschlecht der Curve $X(x,y) = 0$ ist. Im liegenden wird dieses bewiesen mit Hülfe der Formeln, die

/erfasser in der Abhandlung: „On the higher singularities, ılane curve", Quart. J. VII. (1866) gegeben hat.

Cly. (M.).

AYLEY. A memoir on the Abelian and Theta- ıctions. Sylv., Am. J. V. 137-180.

ın Teil der Vorlesungen, die Herr Cayley im Jahre 1882 ɜr Universität zu Baltimore gehalten hat. Das hier Mit- te bezieht sich auf das Abel'sche Theorem und dessen Be- and schliesst sich eng an die Theorie der Abel'schen Func- ı von Clebsch und Gordau an. H. St.

.PPELL. Sur les fonctions abéliennes. C. R. XCIV. 2-1704.

)as Theorem von Liouville über doppelt-periodische Func- ı, dass die Summe der Werte der Variablen, für welche doppelt-periodische Function in einem Elementarparallelo- n null und unendlich wird, bis auf Vielfache der Perioden be ist, wird auf die zu den Abel'schen Integralen gehörigen :h periodischen Functionen ausgedehnt. Wir bemerken, sich das Resultat ohne Schwierigkeit aus Riemann's Theorie bel'schen Functionen ergiebt (Riemann's Ges. Werke p. 133 . H. St.

FORSYTH. On a theorem of Jacobi's. Quart. J. XVIII. -327.

:s wird der von Jacobi herrührende, von Clebsch und Jordan ·er Theorie der Abel'schen Functionen zum Beweis des chen Theorems verallgemeinerte Satz nach Abel's Methode ɜen. H. St.

AWSON. Solution of a question (6640). Ed. Times XVI 91-92.

Sind $\varphi_1(x)$, $\theta(x, y)$ und $\varphi_2(x)$ rationale Functionen a[illegible] und ist die Function

$$u = \{\varphi_1(x)\,\theta(x, y) + 1\}^2 - \varphi_2(x) = (x - y_1)(x - y_2)\dots(x - y_n),$$

so ist

$$\int \frac{\psi(y_1)\,dy_1}{\varphi_1(y_1)\cdot[\varphi_2(y_1)]^{\frac{1}{2}}} + \dots + \int \frac{\psi(y_n)\,dy_n}{\varphi_1(y_n)\cdot[\varphi_2(y_n)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{1}{x}\Big| \frac{\varepsilon\psi(x)}{\varphi_1(x)[\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}} \cdot \log \frac{\varphi_1 x\theta(x, y) + 1 - [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}}{\varphi_1 x\theta(x, y) + 1 + [\varphi_2(x)]^{\frac{1}{2}}},$$

wo $\varepsilon = \mp 1$ und das Zeichen $\frac{1}{x}\Big| f(x)$ die Coefficienten von $\frac{1}{x}$ [illegible] der Entwickelung von $f(x)$ bedeuten möge. $\psi(x)$ kann rati[onal] oder irrational sein; wenn $\psi_1(x)$ rational ist, und $\varphi_1(x) = x$-[illegible] so hat man das Abel'sche Theorem. Beim Beweise wird [an]genommen, dass $u = 0$ keine gleichen Wurzeln habe.

M.

R. Rawson. Solution of a question (6659). Ed. Ti[mes] XXXVI. 31-33.

Es sei

$$F(x, y) = (x - y_1)(x - y_2)\dots(x - y_n),$$
$$\psi(x, z) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m,$$

und $f(x)$ eine rationale Function von x, deren Dimension klei[ner] als n, dann ist der Coefficient von $\frac{1}{x^{m-1}}$ in dem Integral

$$f(x)\int \frac{\psi(x, y)}{F(x, y)}\,dy$$

gleich

$$\int \left\{ \frac{f(y_1)\,\psi(y_1, y)\,y_1^m}{\frac{dF(y_1, y)}{dy_1}} + \dots + \frac{f(y_n)\,\psi(y_n, y)\,y_n^m}{\frac{dF(y_n, y)}{dy_n}} \right\} dy + C.$$

Hiervon wird eine Anwendung gemacht auf den Beweis Abel'schen Theorems für die Summe von n ultraelliptischen [In]tegralen. M.

ː. Beziehungen zwischen den Periodicitätsmoduln ıbel'schen Integrale. Hoppe Arch. LXVIII. 196-216.

ı denselben Methoden, mit deren Hülfe Herr Königs- ı der 5[ten] Vorlesung seines Buches: „Vorlesungen über ·ie der hyperelliptischen Integrale" Beziehungen zwischen ɔdicitätsmoduln der allgemeinsten hyperelliptischen In- welche in gegebenen Punkten wie gegebene Functionen werden sollen, aufgestellt hat, werden hier analoge n zwischen den Periodicitätsmoduln der allgemeinen n Integrale gewonnen. Da aber die Fläche im Unend- unkte aus mehreren Blättern besteht, von denen einige andere in Verzweigungspunkten zusammenhängend sein so muss man hier die Annahme machen, dass im Un- itspunkte die Function auf einigen Blättern, auf denen ıtig ist, und ebenso in einigen von den in der Unend- egenden Verzweigungspunkten unendlich werden soll.

M.

ÖMILCH. Ueber Reihenentwickelungen für ge- hyperelliptische Integrale. Schlömilch Z. XXVII,

dem Doppelintegral

$$\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)\cos^2\vartheta+(1-k^2x^2)\sin^2\vartheta}$$

das hyperelliptische Integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^\mu(1-k^2x^2)^{1-\mu}} \qquad (0<\mu<1)$$

Entwickelung gewonnen:

$$\Sigma\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\,(n-\mu)_n\left[l\left(\frac{2}{k'}\right)-s_{2n}+t_n\right]k'^{\,n},$$

$\iota = \frac{1}{2}$, $t_n = l_2 - s_{2n}$ mit Legendre's Darstellung des

elliptischen Integrals F′ übereinstimmt. Folgerungen für klei machen den Schluss. M.

M. Krause. Ueber die Modulargleichungen der hyp elliptischen Functionen erster Ordnung. Klein Ann. 489-496

Fortsetzung der Abhandlung in demselben Journal, S. bis 428; siehe F. d. M. XIII. (1881) p. 374. Es wird zunä ein Problem gelöst, welches die naturgemässe Verallgemeiner des von Herrn Dedekind in seiner bekannten Arbeit über elliptischen Modulfunctionen (Crelle J. LXXXIII. 255, s. F. d IX. (1877) 353) gelösten Fundamentalproblems ist, nämlich: sollen die notwendigen Bedingungen dafür aufgestellt wer dass:

$$\varkappa^2 = K^2,\ \lambda^2 = \Lambda^2,\ \mu^2 = M^2$$

ist, wo

$$\varkappa^2 = \frac{\vartheta_{23}^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_4^2 . \vartheta_3^2},\quad \lambda^2 = \frac{\vartheta_2^2 . \vartheta_{23}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_4^2},\quad \mu^2 = \frac{\vartheta_3^2 . \vartheta_{01}^2}{\vartheta_{34}^2 . \vartheta_2^2}$$

für die Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$, und K, Λ, M die entsprechen für $\tau'_{11}, \tau'_{12}, \tau'_{22}$. Hierauf geht der Herr Verfasser zu seinen sprünglichen Untersuchungen zurück und zeigt, dass alle Pot summen $\Sigma_i \varphi(\tau_{11}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon^\alpha$ eindeutige Functionen der Grös $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ sind. Daraus folgt dann der Satz: „Die Grös $\varphi(\tau_{13}^{(i)}, \tau_{12}^{(i)}, \tau_{22}^{(i)})_\varepsilon$ sind Wurzeln algebraischer Gleichungen Grade $1+n+n^2+n^3$, deren Coefficienten sich rational aus Grössen $\varphi(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22})_\varepsilon$ zusammensetzen lassen.“ Nachdem die Existenz von Modulargleichungen erwiesen ist, ergeben leicht ihre Haupteigenschaften. M.

M. Krause. Ueber Multiplicationsgleichungen der hyp elliptischen Functionen erster Ordnung. Klein Ann. 54-58.

Es wird hier für die hyperelliptischen Functionen er Ordnung in dem Falle, wo der Grad der Transformation

grade Primzahl ist, die Existenz von Gleichungen nachgewie-n, welche den Multiplicationsgleichungen in der Theorie der iptischen Functionen ganz analog sind. M.

. Krause. Die Modulargleichungen der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung für die Transformation fünften Grades. Klein Ann. XX. 226-230.

Es wird ein anderes neues Repräsentantensystem als in der heren Arbeit des Herrn Verfassers (Klein Ann. XVI. 83; s. F.d.M. II. (1880) 375) eingeführt, das sich näher an die Repräsentantensteme der elliptischen Functionen anschliesst und den Vorzug bietet, ass die Argumente und die Moduln der transformirten Thetafuncionen sich einfacher durch die entsprechenden Grössen der ursprünglichen Thetafunctionen ausdrücken lassen. Alsdann wird ieses angewendet, um eine Reihe von Modulargleichungen für ie Transformation fünften Grades aufzustellen. M.

. Weierstrass. Zur Theorie der Jacobi'schen Functionen von mehreren Veränderlichen. Berl. Ber. 1882. 505-509.

. Weierstrass. Note sur la théorie des fonctions de Jacobi à plusieurs variables. Darb. Bull. (2) VI. 136-141.

Der Herr Verfasser leitet eine der Gleichung

$$(1)\quad \begin{cases} \sigma(u+u_1)\,\sigma(u-u_1)\,\sigma(u_2+u_3)\,\sigma(u_2-u_3) \\ +\sigma(u+u_2)\,\sigma(u-u_2)\,\sigma(u_3+u_1)\,\sigma(u_3-u_1) \\ +\sigma(u+u_3)\,\sigma(u-u_3)\,\sigma(u_1-u_2)\,\sigma(u_1-u_2) = 0 \end{cases}$$

nz analoge Relation $S=0$ für σ-Functionen mehrerer Argunte $\sigma(u,u',\dots,u^{(\varrho-1)})$ her, die auf folgende Weise definirt rden. In der ungraden ϑ-Function von ϱ Argumenten

$$\vartheta_1(v,v',\dots,v^{(\varrho-1)})$$

rden für $v, v', \dots, v^{(\varrho-1)}$ von einander unabhängige homogene eare Functionen der Veränderlichen $u, u', \dots, u^{(\varrho-1)}$ substituirt d dann wird

$$\sigma(u, u', \ldots, u^{(\varrho-1)}) = Ce^{\psi(u, u', \ldots, u^{(\varrho-1)})} . \vartheta_1(v, v', \ldots,$$

gesetzt, wo ψ eine ganze und homogene Function zweit von $u, u', \ldots, u^{(\varrho-1)}$, und C eine willkürliche Const zeichnet. Am Schlusse bemerkt der Herr Verfass ebenso wie durch die Gleichung (1) eine ihr formell g Function $\sigma(u)$ mit den bekannten Eigenschaften gewor den kann, man auch wohl in ähnlicher Weise die Exist transcendenten ganzen Function von ϱ Variabeln beweis die der allgemeinen Relation $S = 0$ genügt.

Herr J. Molk hat von dieser Mitteilung in Darb eine Uebersetzung geliefert.

ELLIOTT. Propriétés et applications de certain tions analogues à la fonction Θ. Ann. d. l'Éc. 79-119, 425-436.

Die Arbeit enthält die Ausführung und Erweiterun reits besprochenen Untersuchungen über das von Cle Gordan zuerst behandelte „erweiterte" Umkehrproblem XII. (1880) 364 u. 369.). H.

K. A. POSSE. Ueber die ϑ-Function von zwei V lichen und über das Problem von Jacobi. Di burg. (Russisch).

Von den drei Wegen, die zur Lösung des Jacobi's kehrproblems führen, nämlich: den Jacobi-Göpel-Rosenh den Weierstrass'schen und den Riemann'schen, wählt fasser dieser Dissertation den ersten und den letzten combinirt sie, da die elementaren Hilfsmittel der Rosenh Methode ihm nicht hinreichend zu sein scheinen, um drücke der Moduln $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$ der ϑ-Function durch stimmten Integrale streng zu beweisen. Demgemäss zerf Arbeit in zwei Teile nebst einem Anhange, in welchem drücke der Zähler und Nenner der Näherungsbrüche, bei der Entwickelung einer Quadratwurzel aus einem

a Grades in einen Kettenbruch ergeben, durch die ϑ-Func-weier Veränderlichen gegeben werden. Der erste Teil ist -Function gewidmet: nachdem dieselbe durch eine Reihe t ist, werden aus dieser Definition die Functionalgleichun-ergeleitet, und dieselben für das Auffinden der algebraischen onen zwischen ϑ-Quadraten und ϑ-Producten und auch ihrer llen Derivirten zu Grunde gelegt, was nach der Methode lermite erreicht wird. Da bei der Coefficientenbestimmung lie von Rosenhain ohne Beweis gegebenen Formeln, die die der Functionaldeterminanten der ϑ-Function für Nullwerte ariabeln geben, gebraucht werden, so werden dieselben auf dem von Weber angedeuteten Wege durch Transfor-n zweiten Grades der ϑ bewiesen. Keine geringe Rolle n bei allen diesen Entwickelungen die Eigenschaften der kteristiken der ϑ (die Bezeichnungsart der ϑ ist die von ann); weshalb dieselben in einem bosonderen Paragraphen nmengestellt werden. Zuletzt werden zwei neue Veränder-eingeführt, in denen

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}^2(v_1 v_2)}{\vartheta^2(v_1 v_2)} = \frac{(\alpha_0-x_1)(\alpha_0-x_2)}{\sqrt{\alpha_{01}\,\alpha_{02}\,\alpha_{03}\,\alpha_{04}}},$$

$$\frac{\vartheta\begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}^2(v_1 v_2)}{\vartheta^2(v_1 v_2)} = \frac{(\alpha_1-x_1)(\alpha_2-x_2)}{\sqrt{\alpha_{01}\,\alpha_{12}\,\alpha_{13}\,\alpha_{14}}}$$

. w. gesetzt werden, und es wird bewiesen, dass die rechten en dieser Gleichungen in die algebraischen zwischen den Quo-ten von ϑ-Quadraten stattfindenden Gleichungen, für diese tienten eingesetzt, denselben Genüge thun; dann wird mit fe der Ausdrücke der Derivirten von ϑ-Quotienten durch he bewiesen, dass zwischen beiden Systemen der Veränder-en eine ultraelliptische Beziehung besteht.

Da aber, wie schon erwähnt, es schwer ist, auf diesem ge die Abhängigkeit der ϑ-Moduln von den Periodicitätsmoduln ultraelliptischen Integrale (wegen der doppelten Zeichen der adratwurzel) genau zu bestimmen, so kehrt in diesem Moment

der Verfasser seinen Weg um, um im zweiten Teile seiner Dis tation Riemann zu folgen, mit Berücksichtigung der Arbeit Prym, wobei jedoch die Verwandlung der betreffenden Riemar schen Fläche in eine einfach zusammenhängende etwas an als dort durchgeführt ist, um die Resultate mit den von We strass gefundenen vergleichbar zu machen.

Da nun auf diesem Wege die Haupteigenschaften der zwei ultraelliptischen Integralen erster Gattung abhänge ϑ-Function gefunden worden sind, und die algebraischen Relatio zwischen den ϑ-Quotienten festgestellt sind, werden die C stanten durch die Wurzeln des unter der Quadratwurzel stel den Polynoms eindeutig bestimmt. Durch Vergleichung der gewonnenen Resultate mit den im ersten Teile gefundenen, w den zuletzt die Ausdrücke der Periodicitätsmoduln der ultrael tischen Integrale durch die Werte der ϑ und ihrer Derivi für die Nullwerte der Argumente erhalten, die der bekann Formel in der Theorie der elliptischen Functionen analog sind

Ty.

J. Thomae. Ueber Integrale zweiter Gattung. Kronecke XCIII. 69-80.

Wie Riemann gezeigt hat, lässt sich die Function

$$\frac{d\log(v_1, v_2, \ldots, v_p)}{d\xi}, \quad v_\nu = u_\nu(\sigma,\xi) - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} u_\nu(s_\mu, z_\mu),$$

durch Integrale zweiter Gattung darstellen in der Form:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma,\xi;\ s_\mu, z_\mu) + C.$$

Wenn die Anfangswerte der Integrale t gegeben sind, so bl noch C zu bestimmen, das von $s_1, z_1, s_2, z_2, \ldots, s_p, z_p$ unabhän jedoch eine Function von σ, ξ und den Klassenmoduln ist. zeichnet man mit

$$s_{1,\xi},\ z_{1,\xi};\ s_{2,\xi},\ z_{2,\xi};\ \ldots\ s_{p,\xi},\ z_{p,\xi}$$

diejenigen p Wertepaare, wofür

$$[u_1(\sigma,\xi), u_2(\sigma,\xi), \ldots, u_p(\sigma,\xi)] \equiv [\Sigma u_1(s_{\mu,\xi}), \ldots,\ \Sigma u_p(s_{\mu,\xi}, z_{\mu,\xi})]$$

› ergiebt sich für C sofort der Wert

$$C = -\sum_{\mu=1}^{\mu=p} t(\sigma, \xi, s_{\mu,\xi}, z_{\mu,\xi}),$$

›s ist C durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung stellt. In dem Vorliegenden wird nun diese Summe durch ›llere Integrale und durch algebraische Functionen darge- Nachdem der allgemeine Fall behandelt worden ist, wird ⁿall zweiblättriger Flächen unabhängig vom allgemeinen ›ollständig ausgeführt. Die Schwierigkeiten des allgemeinen › lassen sich für $p = 3$ überwinden, wie der Verfasser › zeigen wird. M.

›YM. Untersuchungen über die Riemann'sche Theta- ›mel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. pzig. Teubner.

RAZER. Theorie der zweifach unendlichen Theta- hen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. pzig. Teubner.

›YM. Kurze Ableitung der Riemann'schen Theta- mel. Kronecker J. XCIII. 124-131.

YM. Ein neuer Beweis für die Riemann'sche Theta- mel. Acta math. III. 1-15.

YM. Ableitung einer allgemeinen Thetaformel. a math. III. 18-40.

RAZER und F. PRYM. Ueber die Verallgemeinerung · Riemann'schen Thetaformel. Acta math. III. 41-77.

RAZER. Ueber Thetafunctionen, deren Charakteri- ›en aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. . Schrift. 1883.

›ie vorstehenden Abhandlungen sind, obwohl verschiedenen ›ingen angehörend, als Ganzes aufzufassen und zu be- en. Den Mittelpunkt derselben bildet eine für die Theorie ›etafunctionen fundamentale Formel, welche Herrn Prym

1865 in Pisa von Riemann zur Bearbeitung mitgeteilt word war. Diese „Riemann'sche Thetaformel" ergiebt sich allerdin für eine Variable ohne Schwierigkeit aus der von Jacobi in sei „Theorie der elliptischen Functionen, aus den Eigenschaften d Thetareihen abgeleitet." (Ges. Werke. I. p. 506) zu Grunde g legten Formeln, und lässt sich ebenso für p Variable aus ei von Herrn Frobenius gegebenen Formel (Borchardt J. LXXXI p. 201 Gl. (5), siehe F. d. M. XII. (1880) 385) ableiten. W ihren Namen rechtfertigt, ist die Bedeutung, welche die Gleichu gewinnt durch die überraschend einfache und übersichtliche For die Riemann ihr gegeben hat, eine Form, die sich in gleich Masse zur Verallgemeinerung wie zur Specialisirung eignet. D Untersuchungen des Herrn Prym und Krazer beziehen sich erste auf die Herleitung der Riemann'schen Thetaformel, zweitens a die Verallgemeinerung derselben, drittens auf die durch Speci sirung aus ihr folgenden Thetarelationen.

Die Herleitung der Riemann'schen Thetaformel ist enthalt in No. I. p. 1-21, No. III. u. IV.

Bezeichnet man die Thetafunction mit p Variabeln $u_1, u_2, \ldots$ durch

$$(1) \qquad \vartheta(u) = \Sigma\ldots\Sigma e^{\Sigma a_{\mu\mu'} m_\mu m_{\mu'} + 2\Sigma m_\mu u_\mu}$$

und die entsprechende Thetafunction mit der zweiteiligen Ch racteristik

$$(2) \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \ldots & \varepsilon'_p \end{bmatrix} = \varepsilon,$$

wo bei allen ε und ε' der Nenner 2 unterdrückt ist, und di und ε' in allen möglichen Combinationen die Werte 0 und 1 a nehmen können, mit $\vartheta_\varepsilon(u)$, versteht man ferner unter

$$u_\mu^{(1)},\ u_\mu^{(2)},\ u_\mu^{(3)},\ u_\mu^{(4)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots$$

vier Systeme von je p unabhängigen Variabeln und verbin dieselben mit vier entsprechenden Systemen $v_\mu^{(1)}, v_\mu^{(2)}, v_\mu^{(3)},$ durch folgendes zuerst von Jacobi (l. c.), dann von Rosenh benutzte gleichzeitig orthogonale und involutorische System

$$u_\mu^{(1)}+u_\mu^{(2)}+u_\mu^{(3)}+u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(1)},$$
$$u_\mu^{(1)}+u_\mu^{(2)}-u_\mu^{(3)}-u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(2)},$$
$$u_\mu^{(1)}-u_\mu^{(2)}+u_\mu^{(3)}-u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(3)},$$
$$u_\mu^{(1)}-u_\mu^{(2)}-u_\mu^{(3)}+u_\mu^{(4)} = 2v_\mu^{(4)},$$

\uflösung von gleichem Bau ist, so hat die Riemann'sche
·mel die Gestalt

$$\begin{cases} \vartheta(2u^{(1)}).\vartheta(2u^{(2)}).\vartheta(2u^{(3)}).\vartheta(2u^{(4)}), \\ = \frac{1}{2^p}\cdot\sum_\varepsilon \vartheta_\varepsilon(2v^{(1)}).\vartheta_\varepsilon(2v^{(2)}).\vartheta_\varepsilon(2v^{(3)}).\vartheta_\varepsilon(2u^{(4)}), \end{cases}$$

Summation der rechten Seite über die sämmtlichen 2^{2p}
.gen Thetacharakteristiken ε auszudehnen ist. Für diese
giebt Herr Prym drei Beweise. Der erste derselben
p. 1 ff.) hat ein historisches Interesse, insofern er noch
n vorgelegt wurde und dessen Zustimmung fand, gleich-
ıber auch ein functionentheoretisches Interesse, insofern
ht auf einem von Riemann in seinen Vorlesungen 1861/62
ilten Princip der Zerlegung einer periodischen Function
t der Periode $2\pi i$, enthalten in der Identität

$$f(x) = \frac{f(x)+f(x+\pi i)}{2} + \frac{f(x)-f(x+\pi i)}{2}.$$

:cessive Anwendung dieses Princips auf die linke Seite
) führt zu einer Gleichung der Form (R), mit dem Unter-
dass jedes Glied der rechten Seite noch mit einem be-
n Factor C_ε multiplicirt erscheint. Die nähere Unter-
ʒ der 2^{2p} Constanten C_ε zeigt dann, dass dieselben sämmt-
ı gleichen Wert A haben, der $= \frac{1}{2^p}$ gefunden wird. Einen
kürzeren Beweis der Gleichung (R) enthält No. III.
ɪe geht aus von der auf der rechten Seite in (R) stehen-
mme. Betrachtet man dieselbe als Function der p Varia-
$^{1)} \dots u_p^{(1)}$ und setzt dieselbe $= \Phi(2u^{(1)})$, so ergeben sich
:se Function zwei Functionalgleichungen, welche zeigen'
$(2u^{(1)})$ bis auf einen von den $u_\mu^{(1)}$ unabhängigen Factor
h mit der Function $\vartheta(2u^{(1)})$ ist. Da das Entsprechende

für die Systeme $u^{(2)}$, $u^{(3)}$, $u^{(4)}$ gilt, so ergiebt sich die re
Seite in (R) als identisch mit dem Product der vier Thetaf
tionen der linken Seite bis auf einen Factor C, der $= 1$ er
telt wird.

Die zwei ersten Beweise der Formel (R) beruhen auf f
tionentheoretischen Betrachtungen und der dadurch bedin
Anwendung von unbestimmten Coefficienten; sie bringen
innere Wesen der Formel und den Zusammenhang ihrer be
Seiten nicht zum Ausdruck. Von besonderem Interesse ist d
der dritte ganz elementare Beweis (No. IV). Derselbe verb
das bereits von Jacobi (l. c.) bei den Thetafunctionen mit e
Variabeln angewandte Princip der gleichzeitigen Transform
der Variabeln und der Summationsbuchstaben durch Gleichu
der Form (3) mit dem Princip der Einschiebung eines Fac
der ähnlich dem Dirichlet'schen discontinuirlichen Factor bei
stimmten Integralen die durch die Transformation eingetre
Beschränkung der Summation wieder aufhebt. Bildet man
lich das Product F der vier Thetafunctionen auf der linken
in (R) mit Hülfe der Summen (1), wobei die Summationsb
staben m_μ der vier Thetafunctionen durch obere Indices (1),
(3), (4) zu unterscheiden sind, und führt alsdann statt
Systeme von je p Variabeln $u_\mu^{(1)}$, $u_\mu^{(2)}$, $u_\mu^{(3)}$, $u_\mu^{(4)}$ die Systeme
$v_\mu^{(1)}$, $v_\mu^{(2)}$, $v_\mu^{(3)}$, $v_\mu^{(4)}$ aus den Gleichungen (3) ein, und gleich
statt der Summationsbuchstaben $m_\mu^{(1)}$, $m_\mu^{(2)}$, $m_\mu^{(3)}$, $m_\mu^{(4)}$ neue Sum
tionsbuchstaben $n_\mu^{(1)}$, $n_\mu^{(2)}$, $n_\mu^{(3)}$, $n_\mu^{(4)}$ ein, die mit den ersteren d
dieselben linearen Relationen (3) verbunden sind, wie die V
beln v mit den u, so erhält man eine neue Summe F,
bildet mit den Grössen v und n, die äusserlich genau mi
für u und m gebildeten Summe F übereinstimmt. Wäh
aber bei der ursprünglichen Summe an Stelle der vier Gr
$m_\mu^{(1)}$, $m_\mu^{(2)}$, $m_\mu^{(3)}$, $m_\mu^{(4)}$ jede aus sämmtlichen positiven und nega
ganzen Zahlen gebildete Variation zur vierten Klasse mit W
holung zu setzen war, ist, wie die Relationen zwischen d
und n zeigen, in der neuen Summe an Stelle der vier Gr
$n_\mu^{(1)}$, $n_\mu^{(2)}$, $n_\mu^{(3)}$, $n_\mu^{(4)}$ sowohl jede aus ganzen wie jede aus h

en gebildete Variation zur vierten Klasse mit Wiederholung etzen, für welche $s_\mu = n_\mu^{(1)} + n_\mu^{(2)} + n_\mu^{(3)} + n_\mu^{(4)}$ eine grade Zahl Die letzte Beschränkung der Summationsbuchstaben lässt aufheben, wenn man hinter den äusseren Summenzeichen n Factor einschaltet, der stets von selber verschwindet, so- i s_μ eine ungrade Zahl ist. Man erhält so an Stelle von F' : neue Summe F'', die sich identisch erweist mit der rechten e in (R).

Die zweite Reihe der Untersuchungen bezieht sich auf die allgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel und bildet den alt von No. I. p. 25-48, No. V. und No. VI. Die Formel (R) für Producte von je vier Thetafunctionen und für zweiteilige rakteristiken, die verallgemeinerte Formel gilt für Producte je n Thetafunctionen und für r-teilige Charakteristiken. An le des orthogonalen, involutorischen Systems (3) tritt das emeine, orthogonale, nicht notwendig involutorische System

$$(4)\qquad \begin{cases} c_{11}x^{(1)} + c_{12}x^{(2)} + \cdots + c_{1n}x^{(n)} = r.y^{(1)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_{n1}x^{(1)} + c_{n2}x^{(2)} + \cdots + c_{nn}x^{(n)} = r.y^{(n)}, \end{cases}$$

rin die $c_{\mu\mu'}$ n^2 ganze Zahlen bedeuten, die den Bedingungen ügen

$$c_{1\mu}c_{1\mu'} + c_{2\mu}c_{2\mu'} + \cdots + c_{n\mu}c_{n\mu'} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } \mu' \gtrless \mu, \\ r^2 \text{ wenn } \mu' = \mu. \end{cases}$$

hrend die Bedingung $c_{\mu\mu'} = c_{\mu'\mu}$ nicht notwendig ist.

Operirt man nun genau wie oben, indem man zwei Systeme n Variabeln $u_\mu^{(1)}, \ldots, u_\mu^{(n)}$ und $v_\mu^{(1)}, \ldots, v_\mu^{(n)} (\mu = 1, \ldots, p)$ und eierlei Summationsbuchstaben $m_\mu^{(1)}, \ldots, m_\mu^{(n)}$ und $n_\mu^{(1)}, \ldots, n_\mu^{(n)}$ durch die Gleichungen (4) verbindet, so gelangt man zu einer ar allgemeinen Formel (Gl. Θ No. V. p. 35 oder Gl. (9) No. I. 44), welche die Riemann'sche Formel (R) als speciellen Fall thält, aber noch nicht die einfache Structur derselben zeigt. ese Structur wird durch den Charakter der Gleichungen (3) lingt. Um diesen Charakter auf die Gleichungen (4) zu über- gen und zu der wahren Verallgemeinerung der Formel (R) zu angen, muss man das System (4) der Bedingung unterwerfen,

dass die n auf der linken Seite stehenden Formen einander c gruent seien nach dem Modul r, wenn man allgemein Formen

$$a_1 x^{(1)} + \cdots + a_n x^{(n)} \text{ und } b_1 x^{(1)} + \cdots + b_n x^{(n)}$$

mit ganzzahligen Coefficienten a und b einander congruent n nach dem Modul r, sobald

$$a_1 \equiv b_1 \;\; a_2 \equiv b_2 \ldots a_n \equiv b_n \pmod{r}.$$

Diese Bedingung für (4) involvirt, dass $2r$ durch n teilbar sie giebt für (4) ein ganz bestimmtes System, das verschieden je nachdem n grade oder ungrade, und das für $n = 4$ in Jacobi'sche System (3) übergeht.

Ist $n = 2\nu$, also grade, so kann man unbeschadet der gemeinheit $r = \nu$ setzen und das System (4) geht über in (s No. VI. p. 66.)

$$(O_2) \quad \begin{cases} (1-r)x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + x^{(r)} = r \cdot y^{(1)} \\ x^{(1)} + (1-r)x^{(2)} + \cdots + x^{(r)} = r \cdot y^{(2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x^{(1)} + x^{(2)} + \cdots + (1-r)x^{(r)} = r \cdot y^{(r)}, \end{cases}$$

und die zugehörige Thetaformel lautet (l. c. p. 72.):

$$(\Theta_2) \quad \nu^p \cdot \vartheta(ru^{(1)}) \cdots \vartheta(ru^{(2r)}) = \sum_{\varepsilon} \vartheta_\varepsilon(rv^{(1)}) \cdots \vartheta_\varepsilon(rv^{(2r)}) \cdot e^{\frac{-2}{r}\sum_{\mu} \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}$$

wo ε die aus den Elementen

$$\frac{\varepsilon_1}{r} \frac{\varepsilon_2}{r} \cdots \frac{\varepsilon_p}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon'_1}{r} \frac{\varepsilon'_2}{r} \cdots \frac{\varepsilon'_p}{r}$$

gebildete r-teilige Charakteristik bezeichnet, und die Summa über sämmtliche r^{2p} Charakteristiken auszudehnen ist, die erhält, wenn man die Zahlen ε und ε' alle Werte $0, 1, \ldots,$ durchlaufen lässt.

Aehnlich sind die Formeln für ein ungrades n (Gl. und (Θ_1) l. c.). Die dritte Reihe von Untersuchungen (N p. 49-111) bezieht sich auf die Herstellung verschiedenar Thetarelationen aus der Formel (R) und die vorbereitenden S über zweiteilige Charakteristiken. Es werden die Riemann's Sätze über die Zerlegung einer Charakteristik in zwei a bewiesen, und ein „Fundamentalsystem" von $2p+1$, resp. 2

akteristiken $a_1, a_2, \ldots, a_{2p+1}, 0$ besprochen, aus dem sich die **ntlichen** 2^{2p} Charakteristiken nach einem einfachen Schema **mmensetzen** lassen.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\vartheta_\varepsilon(2u) \cdot \vartheta_{\varepsilon+\varrho}(2v) \cdot \vartheta_{\varepsilon+\sigma}(2w) \cdot \vartheta_{\varepsilon-\varrho-\sigma}(2t) = x_\varepsilon,$$
$$\vartheta_\eta(2u') \cdot \vartheta_{\eta+\varrho}(2v') \cdot \vartheta_{\eta+\sigma}(2w') \cdot \vartheta_{\eta-\varrho-\sigma}(2t') = x'_\eta,$$
$$c_{\varepsilon\eta} = c_{\eta\varepsilon} = (-1)^{\varepsilon|\eta},$$

$$\varepsilon|\eta = \sum_x (\varepsilon_x \eta'_x - \varepsilon'_x \eta_x),$$

giebt die Riemann'sche Thetaformel (R) Relationen der Form . I. p. 84)

$$(S) \qquad 2^p \cdot k'_\eta = \sum_\varepsilon c_{\eta\varepsilon} \cdot x_\varepsilon,$$

die Summen der rechten Seite über sämmtliche 2^{2p} Charak**stiken** ε auszudehnen ist. Die 2^{2p} in (S) enthaltenen Gleichun**stellen** ein System dar, welches orthogonal und involutorisch und die Grundtypen der verschiedenartigen Thetarelationen **ert.** Das System (S) nimmt eine ungemein übersichtliche Ge**lt an**, wenn man die Charakteristiken ε und η in gewisser **eise**, die Herr Prym die natürliche nennt, anordnet. Aus (S) **geben** sich durch Addition Gleichungen der Form (l. c. p. 88)

$$(S') \qquad 2^{p-m} \cdot \sum_a c_{\zeta a} \cdot x'_{\eta a} = c_{\eta\zeta} \cdot \sum_b c_{\eta b} \cdot x_{\zeta b},$$

η und ζ beliebige Charakteristiken, und wo die Summe der **ken** Seite über sämmtliche $r = 2^m$ Charakteristiken eines zur **hl** m gehörigen, vollständigen Systemes a, die der rechten **ite** über sämmtliche $s = 2^{p-m}$ Charakteristiken eines durch ζ **d** das System a bestimmten, zur Zahl $2p-m$ gehörigen, voll**ndigen** Systems b auszudehnen ist. Das System der Gleichun**n** (S') ist äquivalent mit dem System der Gleichungen (S) und **thält** das letztere als speciellen Fall ($m = 0$). Das System **r** $r \cdot s$ Gleichungen (S') zerfällt in s Gruppen von je r Gleichun**n**, welche die Grössen x' und x in bestimmter Weise trennen, **mlich** so, dass in einer solchen Gruppe die linke Seite jeder **leichung** immer dieselben r Grössen x' enthält, während irgend **ei** rechte Seiten dieser Gleichungen niemals jene Grösse

gemein haben, aber die rechten Seiten zusammengen die sämmtlichen 2^{2p} Grössen x jede einmal enthalten. Zur lichen Herstellung der Systeme (S') wäre eine Untersu über die Beziehungen der Charakteristiken unter einande forderlich.

Die Systeme (S) und (S') werden nun weiter unter erstens unter der Bedingung, dass die den ungraden Ch teristiken entsprechenden Grössen x' sämmtlich den Wert haben, in welchem Falle die Gleichungen zu den Addi theoremen und den Thetarelationen führen, welche die H Frobenius (Borch. J. Bd. 89, s. F. d. M. XII. (1880) p. 385.) Nöther (Clebsch Ann. Bd. XVI., s. F. d. M. XII (1880) p. 389) gestellt haben, zweitens unter der Bedingung, dass auch di graden Charakteristiken entsprechenden x' mit Ausnahme $(2p+1)p$ derselben von gewisser Beschaffenheit verschwinde welchem Falle die Gleichungen zu dem Additionstheorem fü das Herr Weierstrass (Crelle J. Bd. 64. p. 27.) für die den hy elliptischen Integralen entsprechenden, speciellen Thetafuncti zuerst aufgestellt hat.

An die bisher besprochenen allgemeinen Untersuchu schliessen sich zwei Arbeiten von Herrn Krazer an (No. II u. welche die Systeme (S) und (S') für zwei specielle Fälle gehender untersuchen, nämlich die Fälle $p = 2$, $r = 2$ $p = 1$, $r = 3$. Der erste Fall hat es also mit dem zuerst Göpel und Rosenhain behandelten Problem zu thun. Auf G einer Reihe von Sätzen über die Zerlegung der zweite Charakteristiken ergeben sich aus dem Systeme (S) Gleichu von denen jede vier Grössen x und vier Grössen x' enthält, Anlass zur Unterscheidung von Vierersystemen erster und zw Art von Charakteristiken giebt. Die Bedingung, dass di sechs ungraden Charakteristiken entsprechenden Grössen x seien, liefert eine Zerspaltung der den zehn übrigen Grös entsprechenden Gleichungen und führt zu den den Rosen schen Sechsersystemen entsprechenden Relationen zwischen Grössen x. Das durch Specialisirung der Variablen gew System von Thetarelationen ist alsdann noch auf die ge

von unabhängigen Gleichungen zu reduciren. Dies Problem in doppelter Weise gelöst, indem das eine Mal in Verallzinerung des Rosenhain'schen Verfahrens, vier Functionen, n Charakteristiken ein beliebiges Vierersystem zweiter Art n, das andere Mal, in Verallgemeinerung des Göpel'schen ahrens vier Functionen, deren Charakteristiken ein Vierersm erster Art bilden, als Ausgangspunkt dienen. Hierbei ert sich ein bis dahin nicht bemerkter Parallelismus zwischen Untersuchungen von Göpel und Rosenhain. Den Schluss et das Additionstheorem der Thetafunctionen für $p = 2$.

Die zweite Abhandlung (No. VII) steht im Zusammenhang den Untersuchungen der Herren Klein und Bianchi (Clebsch ı. XVII. 234, siehe F. d. M. XII. (1880) 352) über die Normaln dritter Stufe des elliptischen Integrals erster Gattung (nach rn Klein's Bezeichnung). Alle dreiteiligen Charakteristiken sen sich durch neue Normalcharakteristiken ausdrücken, und ist die Aufgabe, die zwischen den zugehörigen neun fundantalen Thetafunctionen bestehenden Relationen aufzustellen l in ihrer Abhängigkeit von einander zu untersuchen. Alle se Relationen sind enthalten in der obigen Formel (Θ_2), gelet für $p = 1$, $r = 3$. Aus ihr ergeben sich, wenn man die ks und rechts auftretenden Producte von je sechs Thetafuncnen resp. mit x' und x bezeichnet, die den Gleichungen und (S') entsprechenden Systeme von je neun Gleichungen. le der Gleichungen (S') enthält drei der Grössen x und drei r Grössen x', wobei die den drei x und die den drei x' zuhörigen Normalcharakteristiken je ein „Dreiersystem“ bilden, h. ein System von drei Charakteristiken, deren Summe der arakteristik (0) congruent ist. Durch Specialisirung der Varian erhält man zweierlei Thetarelationen, die linear in den oducten von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen $\vartheta_\varepsilon(v)$, letzteren vom zweiten Grad in den Producten von je drei ber $\vartheta_\varepsilon(0)$. Die Relationen der zweiten Art lassen sich auf i noch von einander abhängige Gleichungen zurückführen, deren Hilfe sich die Quotienten der Producte von je drei zu m Dreiersystem gehörigen Functionen $\vartheta_\varepsilon(0)$ rational aus-

drücken durch eine und dieselbe Grösse z. Nunmehr lassen sich die Relationen der ersten Art auf achtzehn noch von einander abhängige Gleichungen zurückführen in doppelter Weise, einmal indem man drei Thetaproducte zu Grunde legt, die alle neun Normalcharakteristiken enthalten, das andere Mal, in dem man von drei Thetacuben ausgeht, deren Charakteristiken ein Dreiersystem bilden. Im ersten Falle sind die drei Thetaproducte, im letzten die drei Thetacuben verbunden durch eine homogene Gleichung dritten Grades von der Form

$$\Phi_1^3+\Phi_2^3+\Phi_3^3-K\,.\,\Phi_1\Phi_2\Phi_3 = 0.$$

(Die Normalcurve des Integrals dritter Stufe bei Herrn Bianchi l. c. p. 240.) Mit Hülfe dieser Gleichung kann man die Quotienten der Producte von je drei zu einem Dreiersystem gehörigen Functionen $\vartheta_\varepsilon(v)$ algebraisch ausdrücken durch ein und dieselbe Grösse Z. H. St.

A. Buchheim. On the extension of certain theories relating to plane cubics to curves of any deficiency. Lond., M. S. Proc. XIII. 180-185.

Bei ebenen Curven dritten Grades fliessen aus der Darstellung der Coordinaten eines Punktes durch elliptische Functionen eines Parameters ohne Weiteres auf Punktgruppen bezügliche Theorien. In der vorliegenden Abhandlung werden diese Theorien und zwar besonders die Theorie der Steiner'schen Polygone und die Sylvester'sche Theorie der derived points auf ebene und räumliche Curven beliebigen Geschlechts ausgedehnt, was mit Hülfe der Abel'schen Functionen gelingt. Auf Clebsch's Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie, sowie auf Brill und Nöther's Theorie der adjungirten Curven wird besonders Bezug genommen. Scht.

D. Kugel- und verwandte Functionen.

K. Heun. Kugelfunctionen. Göttingen. Vandenhoeck.

:OLAS. Étude des fonctions de Fourier (première euxième espèce). Ann. de. l'Éc. Norm. Suppl. (2) XI. 3-90.
ferat im nächsten Bande.

:ALAN. Sur les fonctions X_x de Legendre. Second ıoire. Belg. Mém. XLIV. 1-102.

rtsetzung der Arbeit, die im vorigen Bande p. 394 be- n ist. Sie enthält mehr als 200 Formeln. Eine Inhalts- ist daher unmöglich. Besonders hervorzuheben sind:

$$\int_0^{\pi} \frac{A+B\sqrt{-1}\cos x}{(B-A\sqrt{-1}\cos x)^2}\,dx = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} dx \int_0^{\pi} d\omega \cos\left[\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}\cos\omega}\right] = 2\pi.$$

und b Wurzeln von $\frac{dX_n}{dx} = 0$, so hat man:

$$\int_a^b X_x\,dx = 0.$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d(X_n+X_{n+1})}{\sqrt{1-2zX+z^2}} = 2\,\frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zx^2+z^2}+1-zx} = \sum_1^{\infty} \frac{dX_n}{dx}\,\frac{z^{n-1}}{n(n+1)},$$

$$\log\frac{z-x+\sqrt{1-2zx+z^2}}{1-x} = \sum_1^{\infty} X_n\,\frac{z^{n+1}}{n+1},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}\log\frac{z^2-x+\sqrt{1-2z^2x+z^4}}{1-x}$$

$$= 2\sqrt{2}\log\{(1+z)^{1+z}(1-z)^{1-z}\}.$$

$$_n = \Sigma(-1)^{\frac{n+q}{2}}\,\frac{1.3.5\ldots(n-q-1).1.3.5\ldots(n+q-1)}{1.2.3\ldots q.1.2.3\ldots(n-q)}$$

$$_n = \Sigma\,\frac{1.2.3\ldots n}{(1.2.3\ldots\lambda)^2.1.2.3\ldots(n-2\lambda)}\,(x^2-1)^{\lambda}(2x)^{n-2\lambda}$$

$$^{+1}\ \frac{\log(1+x)\,dx}{(1-2zx+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{1-z^2}[\log 2-(1-z)\log(1+z)]$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \Sigma X_n x^n,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-z^2\sin^2\theta}} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty z^{2n}\int_{-1}^{+1}\frac{X_{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2}\sum_0^\infty\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 (X_{2n+1}-X_{2n-1}).$$

Nach einer brieflichen Mitteilung von E. Heine an den V fasser sind manche der Resultate nicht nur neu, sondern a von Wichtigkeit für die Theorie der Kugelfunctionen.

Mn.

B. Hansted. Généralisation de la fonction X_n de L gendre. Teixeira J. IV. 53-61.

Herr Hansted untersucht die Functionen P_n und Q_n, wel die particulären Integrale der Gleichung

$$(x-a)(x-b)y''+[2x-(a+b)]y'-n(n+1)y=0$$

sind. Er zeigt, dass P_n, wie die Legendre'sche Function X_n, d Coefficient von t^n in der Entwickelung nach den Potenzen v t der Quadratwurzel eines Polynoms zweiten Grades in t i Er weist ferner nach, dass zwischen P_{n+1}, P_n und P_{n-1} ei Relation existirt, welche der zwischen X_{n+1}, X_n und X_{n-1} anal ist. Den Schluss der Arbeit bildet der Nachweis einer analoge Relation für Q.

Tx. (O.)

G. Leonhardt. Integraleigenschaften der adjungirte Kugelfunctionen. Klein Ann. XIX. 578-587.

Der Verfasser knüpft an die im vorigen Jahre (cf. F. d. M XIII. (1881) p. 399ff.) besprochene Arbeit des Herrn C. Ne mann über Kugelfunctionen an und erweitert einige Resulta derselben. Aus den von C. Neumann aufgestellten Entwickelunge der einfachen Kugelfunctionen in Reihen, die nach Kugelfun tionen fortschreiten, ergeben sich analoge nach zugeordnet Kugelfunctionen fortschreitende Reihen für die adjungirten Kug functionen. Mit Hülfe derselben wird der Werth des Dopp integrals

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} L_q(\cos\gamma)\, K_{\varrho j}(\mu) \cos(j\varphi)\, d\mu\, d\varphi$$

ttelt, wo

$$\cos\gamma = \mu\cdot\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu_1^2}\,\cos(\varphi-\varphi_1)$$

während die Bedeutung von L_q $K_{\varrho j}$ dieselbe ist, wie bei mann. Daraus folgt durch Anwendung des Additionstheorems Kugelfunctionen der Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} L_{qj}(\mu)\, K_{\varrho j}(\mu)\, d\mu\,,$$

ches Integral Herr C. Neumann nur für $j = 0$ ermittelt hatte. analogen Integrale, in denen das Product zweier adjungirter oder zweier adjungirter K unter den Integralzeichen steht, ben keine Bedeutung.

Ausserdem wird (analog der allgemeinen Kugelfunction, der genannten Laplace'schen Function) der Begriff der „allgemeinen gelfunction" eingeführt:

$$\mathfrak{Y}_q(\mu,\varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} K_{qj}(\mu)\,[\alpha_j\cos(j\varphi) + \beta_j\sin(j\varphi)],$$

α_j, β_j willkürliche, nur von j abhängige Constanten sind. Für se Function gilt die Formel

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} L_q(\cos\gamma)\,\mathfrak{Y}_\varrho(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi$$

$$= \frac{4}{q^2-\varrho^2}\,[\mathfrak{Y}_\varrho(\mu_1,\varphi_1)\cos(q\pi i) - \mathfrak{Y}_q(\mu_1,\varphi_1)\cos(\varrho\pi i)].$$

ie Einführung der Function $\mathfrak{Y}_q(\mu,\varphi)$ gestattet eine Kürzung er Aufgabe, die elektrische Verteilung auf einem Conoide läche, die durch Rotation eines Kreisbogens um seine Sehne tsteht,) zu bestimmen. Die von Herrn C. Neumann gegebene ntwickelung der Dichtigkeit dieser Verteilung ist nämlich, wie n Schluss der vorliegenden Arbeit gezeigt wird, nichts Anderes s eine Entwickelung nach allgemeinen Kugelfunctionen.

Wn.

M. Gegenbauer. Das Additionstheorem derjenigen Fu tionen, welche bei der Entwickelung von $e^{\alpha x i}$ u den Näherungsnennern regulärer Kettenbrüche treten. Wien. Ber. LXXXI. 491-502.

Ableitung des folgenden, mit Recht als sehr allge bezeichneten Additionstheorems der Bessel'schen Functi erster Art:

$$(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi)^{-\frac{\nu}{2}} J^{\nu}(\sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\varphi})$$
$$= 2^{\nu}\,\Pi(\nu-1)\sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty}(\varrho+\nu)(\alpha\beta)^{-\nu} J^{\varrho+\nu}(\alpha)\, J^{(\varrho+\nu)}(\beta)\, C_{\varrho}^{\nu}(\cos\varphi)$$

Wegen der Bezeichnung vergl. die Abhandlung des Verfa über die Functionen C im gleichen Bande der Wiener Sitzu berichte. Gr.

Achter Abschnitt.

Reine, elementare und synthetische Geometrie.

Capitel 1.

Principien der Geometrie.

Cantor. Ueber unendliche lineare Punktmannichfaltigkeiten. Klein Ann. XX. 113-122.

Die früheren Untersuchungen des Verfassers (siehe F. d. M. I. (1880) 404) werden hier auf das ebene n-dimensionale Ge-st ausgedehnt. Gegenstand der Betrachtung ist vorzugsweise e Abzählbarkeit der Punktmengen. Die gewonnenen Resultate rden zur Ableitung interessanter Sätze im Gebiet der anschau-hen Mannigfaltigkeiten benutzt. So wird z. B. gezeigt, dass, nn man aus dem drei-dimensionalen Raume die durch Coordi-ten von algebraischem Wert bestimmten Punktmengen weglässt, r Rest des Gebietes noch stetigen Zusammenhang hat, woraus eiter folgt, dass auch in einem unstetig gedachten Raume noch etige Bewegung möglich ist. Dies gilt für alle Räume, deren imensionenzahl $\geqq 2$ ist. Schg.

. **Bertini. Sui sistemi lineari.** Lomb. Rend. (2) XV. 24-29.

Ein lineares System

$$U = L_1 u^1 + L_2 u^2 + \cdots + L_{s+1} u^{s+1} = 0,$$

wo die u^i homogene Functionen gleichen Grades von $n+1$ Vari-beln x sind, während zwischen den x keine lineare Relation be-steht, stellt eine Gruppe von Mannigfaltigkeiten von n Dimen-sionen im Raume von $n+1$ vor, deren Basis von den Punkten gebildet wird, für welche die u^i sämmtlich verschwinden. Da gilt der Satz: „Eine willkürliche Mannigfaltigkeit dieser A kann nur dann r-fache ausserhalb der Basis gelegene Punkte enthalten, wenn die u^i einen gemeinsamen r-fach zählenden Fact enthalten.“ Und ebenso kann dieselbe nur dann zerfallen, wenn entweder die u^i einen gemeinsamen Factor haben oder homogene Functionen von zwei andern homogenen Functionen gleichen Grades sind. V.

V. Schlegel. Quelques théorèmes de géométrie à n di-mensions. S. M. F. Bull. X. 172-207.

Die Arbeit bildet die Fortsetzung einiger in des Verfassers „Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde“ (erst 1883 erschienen) enthaltenen Untersuchungen (siehe das Referat über Stringham's ähnliche Arbeit, F. d. M. XII. (1880) 408). Es werden darin zuerst die Sätze von den Mittellinien und dem Schwerpunkte des Dreiecks und Tetraeders auf das vierdimen-sionale Fünfzell (Pentaedroid) und die n-dimensionalen Gebilde derselben Reihe ausgedehnt. Einen weiteren Ausgangspunkt bildet das vollständige Viereck. Ihm entspricht im dreidimen-sionalen Gebiete das „vollständige Hexaeder“, im vierdimensio-nalen das „vollständige Achtzell“ (Oktaedroid). Auf diese und die entsprechenden Gebilde im n-dimensionalen Gebiet werden Begriffe und Sätze des vollständigen Vierecks ausgedehnt. Der Umstand, dass sich als Anfangsglied dieser Reihe im Gebiet der Geraden die Figur der harmonischen Punkte herausstellt, giebt Anlass, auch die Eckencomplexe höher dimensionirter Gebilde unter den Begriff harmonischer Punktgruppen zu bringen, und ent-sprechende Formeln und Sätze über dieselben aufzustellen. Eine dritte Reihe von Sätzen und Begriffen, betreffend die Gebilde

it, Oktaeder, Sechzehnzell (Hexadekaedroid) geht aus der n durch das Gesetz der Reciprocität hervor. Aus den über n-dimensionale Gebilde gewinnt man rückwärts durch tion der betreffenden Figuren neue Sätze der ebenen und nensionalen Geometrie. Die Untersuchung bewegt sich in nfachsten Methoden der Ausdehnungslehre.

Schg.

ıPPE. Innere Winkel aller regelmässigen linear renzten Figuren von vier Dimensionen. Hoppe Arch. ΓIII. 110-112.

·gänzung der in Bd. LXVII. 420-422 enthaltenen Resultate sen Band Abschn. VI. Cap. 3. p. 212) durch Berechnung ,eren Winkels im regelmässigen Fünfzell (Pentatop). Neben- ;iebt sich das auch von Stringham gefundene Resultat, dass ;ulären Gebilde höherer Dimensionen keine Fünfecke mehr ächen enthalten können.

Schg.

ɔPPE. Ueber die Stellung der Ebene in der Vier- nensionengeometrie. Hoppe Arch. LXVIII. 378-389.

·wei Ebenen im vierdimensionalen Raume haben im All- nen nur einen Punkt gemeinsam, bilden also nicht direct Winkel mit einander. Der Verfasser zeigt aber auf ana- ıem Wege, dass es zwei Winkel giebt, durch welche die seitige Stellung dieser Ebenen ausgedrückt werden kann. rste (Raumwinkel) ist der kleinste Winkel, den zwei diese ɪn enthaltende euklidische Räume durch Drehung um die ɪn mit einander bilden können, der zweite (Flächenwinkel) r Winkel, den die Ebenen bilden, wenn die beiden Räume hrer vorher beschriebenen Stellung durch Drehung um ihre ttebene zur Deckung gebracht werden. Beide Winkel wer- ·erechnet und in ihren Beziehungen zu einander untersucht.

Schg.

R. HOPPE. Die regelmässigen linear begrenzten Fi jeder Anzahl von Dimensionen. Hoppe Arch. LXVIII.

Es sind dies die Analoga zu den regulären Körp Raume, die aufgesucht werden sollen. Ein solcher n-di naler regulärer Körper ist durch $(n-1)$ Zahlen $k_1, k_2, \dots$ charakterisirt. Für $n=3$ ist k_1 die Kanten- (Ecken-) einer Seitenfläche, k_2 die einer „Eckfigur" des Körpers, d Figur, die eine zum Radius einer Ecke senkrechte Ebe der Ecke ausschneidet. Ein solcher Körper wird mit $(k_1,$ zeichnet. Analog erhält man für $n=4$ als „Seite" ein P (k_1, k_2), als „Eckfigur" ein Polyeder (k_2, k_3). Dies ist der (k_1, k_2, k_3) etc. Aus der Definition des Regulären wird ein tümlicher Algorithmus abgeleitet, der mit Hülfe des erw Euler'schen Satzes die Bedingungen für die überhaupt mö regulären Körper aufzustellen erlaubt. So muss z. B. für die Grösse

$$N = \frac{2}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{2}}$$

positiv und eine ganze Zahl sein, was durch die Combina (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5,3) erfüllt wird. Für $n=4$ man vier, für $n=5$ drei reguläre Körper. Aus dem le Umstande wird gefolgert, dass für höhere n in der Reihe die Zahl 4 nur am Anfang oder am Ende stehen kann, un aus, dass nur drei Typen möglich sind:

$$(3, 3, 3, \dots 3, 3, 3),$$
$$(4, 3, 3, \dots 3, 3, 3),$$
$$(3, 3, 3, \dots 3, 3, 4).$$

Sie entsprechen dem Tetraeder, Würfel, Oktaeder im R Weiter wird nachgewiesen, dass diese drei Typen auch w immer existiren. Am Schluss werden noch metrische Rela für den Mittelpunkt, die Radien, den Inhalt und die Umgr dieser Körper entwickelt. (Vgl. die hierhergehörigen A von Schlegel, Stringham u. A.). M

UDEL. Vom Körper höherer Dimension. Pr. Kaiserstern.

m ersten Teile dieser Arbeit werden die beiden mit dem ck (Tetraeder) und Viereck (Hexaeder) beginnenden Reihen ensionaler Gebilde aufgestellt, der zweite enthält Unterungen über den Euler'schen Polyedersatz, im dritten sucht Verfasser die Frage nach den regulären Gebilden des vierasionalen Raumes zu beantworten, und gelangt dabei bis zur ellung der elf ursprünglich sich darbietenden Möglichkeiten der Ausscheidung von fünf derselben. Den Schluss bildet Bemerkung, dass von den sechs wirklich vorhandenen Gebilden beiden einfachsten die Specialfälle der im ersten Abschnitt ndelten Gebilde sind. Ein Anhang beweist die Sätze 1) dass netrische Körper mittelst Durchgangs durch den vierdimenalen Raum zur Deckung gebracht werden können, 2) dass sich kreuzende Ebenen im vierdimensionalen Raume jederzeit n Punkt gemeinsam haben. Schg.

STUDY. Ueber Distanzrelationen. Schlömilch Z. XXVII. 40-160.

Es wird eine Anzahl von Sätzen über Pyramiden und Kreisenzen, die sich vereinzelt bei Baltzer, Darboux, Frobenius, vidio finden (siehe F. d. M. IV. (1872) 383, VI. (1874) 381, I. (1876) 531), aus der gemeinsamen Quelle einiger elemener Sätze abgeleitet, meist unter Anwendung der Determinantenthode. Die Arbeit ist ausserdem den Vorarbeiten insofern ch Allgemeinheit überlegen, als alle Sätze sogleich für n-dimenoale Gebilde bewiesen werden. Im Anfang ist eine grössere zahl von neuen geometrischen Sätzen und Formeln mitgeteilt, aus derselben Quelle fliessen. Schg.

STOLZ. Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes. Innsbr. Ber. XII. 74-89.

Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass das „Axi… des Archimedes“: „Eine Grösse kann so oft vervielfältigt werd… dass sie jede andere ihr gleichartige übertrifft“, nicht bewies… werden kann, wenn man nur voraussetzt, dass zwei Grössen d… Systems vergleichbar sind, nach den Regeln der ganzen Zahl… addirt und subtrahirt werden können, und dass jede Grösse i… gleiche und mit ihr gleichartige Teile zerlegt werden kann. Ei… Beispiel eines den letzteren Bedingungen genügenden Grösse… systems, für welches gleichwohl obiges Axiom nicht gilt, liefer… die von du Bois-Reymond aufgestellten Unendlich der reell… Functionen. (Clebsch Ann. XI. 147, siehe F. d. M. IX. (1877) 3… Herr Stolz zeigt nun, dass das Axiom als Folgerung erschein… wenn man dem Grössensystem noch die Eigenschaft der Stetig… keit (im Sinne von R. Dedekind) beilegt. Was den Grössen… begriff selbst anlangt, so hat, seit derselbe durch H. Grassman… auf die Vergleichbarkeit zweier Objecte basirt worden ist, d… Frage nach den Methoden der Vergleichung ein erhöhtes Interess… gewonnen. Herr Stolz giebt eine kritische Uebersicht der Wege, welche die griechischen Geometer eingeschlagen haben, um geo… metrische Gebilde zu vergleichen, und zeigt u. a., dass der obe… erwähnte Grössenbegriff auch die „Verhältnisse“ umfasse, welch… von der alten Geometrie in einen für die Darstellung nachteilige… Gegensatz zu den „Grössen“ gebracht wurden. Schg.

P. Cassani. I nuovi fondamenti della geometria. Batt. G. XX. 143-166.

Mit Berücksichtigung der Arbeit von Tilly (siehe F. d. … XI. (1879) 354) giebt der Verfasser eine vereinfachte und leicht… verständliche Darstellung seiner in zwei früheren Arbeiten (Sagg… di Geometria rigorosa, 1871 und Nuove proposte, siehe F. d. … IX. (1877) 387) niedergelegten Untersuchungen über die Grun… lagen der Geometrie. Schg.

STORY. On the non-Euclidian trigonometry. Am. J. IV. 332-336; V. 180-211.

STORY. Note on the non-Euclidian trigonometry. opkins Circ. 1882. 211.

ıyley hatte bei seiner Ableitung der Grundformel der nicht-schen Trigonometrie (Clebsch Ann. V. 630-634, s. F. d. M. ;72) 241) als Fundamental-Kegelschnitt den Kreis, und für ısconstanten besondere Werte angenommen. Der Verfasser diese Untersuchung in der ersten der oben genannten Ab-ıngen auf beliebig angenommene Fundamentalgrössen aus eigt am Schluss die Uebereinstimmung seiner specialisirten l mit der von Cayley gefundenen, die übrigens auch für : Fundamental-Kegelschnitte als den Kreis gilt. Ausserdem t sich eine einfache Ableitung für die Formeln der nicht-ischen ebenen aus denen der gewöhnlichen sphärischen oometrie.

n der zweiten Abhandlung bestimmt der Verfasser die ;en und kleinsten Abstände zwischen Punkten, Geraden und en der nicht-euklidischen Geometrie, erörtert die speciellen der parallelen und senkrechten Richtung, und giebt Formeln den Inhalt des Parallelogramms und Parallelepipedons. Es sich dabei heraus, dass der Abstand zweier Gebilde bis inen constanten Factor unabhängig ist von dem Wege der ıng. Bei der schliesslichen Anwendung der gewonnenen tate auf die Geometrie der Kugel wird in ähnlicher Weise m Schluss der ersten Abhandlung der Zusammenhang zwi-den Formeln der nicht-euklidischen sphärischen und denen ewöhnlichen sphärischen Trigonometrie dargelegt.

Schg.

---

ox. On the application of quaternions and Grass-ınn's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform ace. Cambr. Trans. XIII. 69-143; Cambr. Proc. IV. 194-196.

)ie vorliegende Arbeit will, im Anschluss an Grassmann, rein algebraischen Calcül aufstellen, dessen Gesetze mit

den im wirklichen Raume geltenden übereinstimmen. Ein derartiger Calcül unterscheidet sich von der gewöhnlichen Algebra dadurch, dass mehr als eine unabhängige Einheit vorhanden ist. Es seien A und B unabhängige Einheiten derart, dass zwischen ihnen keine Relation von der Form $A = xB$ stattfinden kann, wo x eine gewöhnliche (reelle oder imaginäre) algebraische Grösse ist. Dann werden A und B Punkte genannt, und jeder Ausdruck von der Form $pA+qB$, wo p, q positive, negative oder imaginäre Zahlen sind, wird ebenfalls ein Punkt oder ein Vielfaches eines Punktes genannt. Die Grössen $pA+qB$, $2(pA+qB)$, $3(pA+qB)$ etc. werden nicht als verschiedene Punkte, sondern als verschiedene Vielfache desselben Punktes betrachtet. Der Punkt $pA+qB$ variirt mit dem Verhältnis $p:q$, und alle Punkte, die in jenem Ausdrucke enthalten sind, bilden eine einfach unendliche Reihe, die gerade Linie. Sind A, B, C verschiedene Grössen, die durch keine lineare Relation verbunden sind, so bilden alle Punkte, die in dem Ausdruck $pA+qB+rC$ enthalten sind, eine doppelt unendliche Reihe, die eine Ebene genannt wird. Diese Definition lässt sich in derselben Art auf mehr Dimensionen ausdehnen. Es lässt sich nun zeigen, dass aus diesen Definitionen alle descriptiven oder projectiven Eigenschaften von Curven, dieselben als Orte von Punkten angesehen, die gewissen Gleichungen genügen, direct folgen.

Den Begriff der Entfernung kann man auf drei verschiedene Arten einführen. Es seien, P, Q, R einfache, nicht vielfache Punkte, so dass $pP+qQ = rR$, und es sei $\alpha =$ Entfernung PR, $\beta =$ Entfernung RQ, $\gamma =$ Entfernung PQ, so dass $\alpha+\beta = \gamma$. Dann muss eins der folgenden Systeme von Relationen bestehen:

$$\text{(I)} \qquad r^2 = p^2+q^2+2pq\cosh\frac{\gamma}{k}, \quad p\sinh\frac{\alpha}{k} = q\sinh\frac{\beta}{k};$$

$$\text{(II)} \qquad r = p+q, \qquad p\alpha = q\beta;$$

$$\text{(III)} \qquad r^2 = p^2+q^2+2pq\cos\frac{\gamma}{k}, \quad p\sin\frac{\alpha}{k} = q\sin\frac{\beta}{k}.$$

[cosh und sinh bezeichnen darin den hyperbolischen, cos und sin den gewöhnlichen Cosinus und Sinus].

Den Relationen (I), (II), (III) entsprechen drei verschiedene n von Geometrie, nämlich (I) die nicht-euklidische Geometrie Lobatchewsky und Bolyai, (II) die gewöhnliche Geometrie, die sphärische Geometrie.

Die verschiedenen Arten der Multiplication von Punkten findet ., wenn man das distributive Princip zu Hülfe nimmt. Es ebt sich, dass die allgemeinsten Bedingungen folgende sind:

$$P^2 = Q^2 = \beta$$

constant, und ausserdem ist

$$P.Q + Q.P = 2\beta \cosh \theta \text{ in (I)},$$
$$P.Q + Q.P = 2\beta \qquad \text{in (II)},$$
$$P.Q + Q.P = 2\beta \cos \theta \text{ in (III)}.$$

rch Einführung weiterer specieller Annahmen kann man verledene Arten der Multiplication erhalten. Diese sind 1) Grassan's äussere Multiplication, die (für zwei Punkte) identisch ist der äusseren Multiplication der Quaternionen. 2) Grassmann's ere Multiplication, die (für zwei Punkte) identisch ist mit der alaren Multiplication der Quaternionen. 3) Die associative aternionen-Multiplication, die folgende Gesetze befolgt:

$$Q.P^{-1} = \cosh\theta + i \sinh\theta, \quad i^2 = 1 \text{ in (I)},$$
$$Q.P^{-1} = 1 + i\theta, \quad i^2 = 0 \text{ in (II)},$$
$$Q.P^{-1} = \cos\theta + i \sin\theta, \quad i^2 = -1 \text{ in (III)},$$

i in jedem Falle eine specifische Constante ist, die der Verdungslinie der Punkte P und Q eigenthümlich ist.

Weiter wird die Addition und Multiplication dreier Grössen i rachtet. Es wird gezeigt, dass, wenn i_1 und i_2 zwei specifische nstante sind, die zwei unter dem Winkel θ gegen einander eigten Linien angehören, und wenn

$$ri = pi_1 + qi_2,$$

s dann

$$r^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cos\theta,$$

ner

$$i_2 i_1^{-1} = \cos\theta + Q.\sin\theta$$

wo

$$Q^2 = -1:$$

kann als der Punkt angesehen werden, in dem sich die Linien neiden.

Aus diesen Formeln ergeben sich, mit Hinzunahme des as ciativen Princips, für den Fall I die folgenden Relationen zwisch den Seiten und Winkeln eines Dreiecks:

$$\cosh a = \cosh b . \cosh c - \sinh b . \sinh c . \cos A,$$

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C},$$

und andere ähnliche. Auf dem angedeuteten Wege kann m alle Eigenschaften der verschiedenen Arten des Raumes dur rein algebraische Methoden erhalten. Die hauptsächlichsten Unt schiede zwischen den drei möglichen Fällen werden dabei st scharf hervorgehoben.

Geht man zur Geometrie von drei Dimensionen über, so si sieben verschiedene imaginäre Grössen nöthig. Dieselben si im Falle (I) identisch mit den Symbolen, die in Hamilto Biquaternionen auftreten. Sind I, J, K die gewöhnlichen Quat nionensymbole, so stellt der Ausdruck

$$XI + YJ + ZK + \sqrt{-1}(LI + MJ + NK)$$

eine Linie oder eine Kraft im Raume dar, falls

$$XL + YM + ZN = 0.$$

Ist die letztere Gleichung nicht erfüllt, so stellt der obige A druck ein System von Kräften vor.

Weiter werden einige Anwendungen auf die Theorie Schraubenbewegungen gemacht. Die Gleichung des Cylindro wird:

$$(p_\alpha - p_\beta)(\omega^2 - z^2)xy = (1 + p_\alpha p_\beta)(x^2 + y^2)\omega z.$$

Dasselbe ist also eine Fläche vierter Ordnung, wie dies Lindemann gezeigt ist. Für Punkte nahe dem Anfangspu wird die Gleichung

$$(p_\alpha - p_\beta)xy = z(x^2 + y^2);$$

dieselbe fällt mit der Gleichung des Cylindroids im gewöhnli Raume, wie sie zuerst von Ball aufgestellt ist, zusammen. Fe wird gezeigt, dass die Eigenschaften der beliebig im Raume theilten Kräfte abgeleitet werden können aus den Eigensch von Kräften, die in demselben Punkte angreifen, falls man

die Componenten X, Y, Z die imaginären Grössen $X+L\omega$, $-M\omega$, $Z+N\omega$ setzt, wo $\omega^2=-1$ in (I), $\omega^2=0$ in (II), $=1$ in (III) ist.

Zum Schluss wird gezeigt, wie man das System imaginärer [..]ssen für Räume von höheren Dimensionen erhalten kann aus [..] commutativen Producten niederer Systeme.

Glr. (Wn.).

SCHLEGEL. Geometrische Anwendungen der Grassmann'schen Ausdehnungslehre. Pr. Waren.

Die Arbeit liefert Ergänzungen zu des Verfassers „System [..]r Raumlehre", indem verschiedene Sätze aus der Geometrie [..]r Geraden und des Kreises auf einfache Weise darin abgeleitet [..]rden, z. B. das Stuart'sche Theorem, Satz des Pappus, Sätze vom [..]scal'schen und Brianchon'schen Sechseck, vom Kreise der mitt[..]ren quadratischen Entfernungen, Feuerbach'schen, Höhenpunkt[..] [..]d Schwerpunktkreis etc. Ein Anhang enthält u. a. den Nach[..]eis, dass ein neuerdings von Lipschitz aufgestellter algebrai[..]her Calcül mit gewissen Operationen der Ausdehnungslehre [..]entisch ist (s. F. d. M. XII. (1880) 303); ferner neues Material [..]s dem Briefwechsel zwischen St. Venant, Cauchy und Grass[..]ann, betreffend die zwischen den beiden letzteren s. Z. schwe[..]nde Prioritätsangelegenheit, endlich ein Verzeichnis von Arbeiten [..]nderer Autoren auf dem Gebiete der Ausdehnungslehre.

Schg.

[..]ÖKLEN. Ueber die Rechnung mit Vectoren. Corr. Bl 1882.

Vergleichende Zusammenstellung der von Argand, Hamilton, [..]cheffler und Möbius aufgestellten Grundbegriffe und Operationen [..]er Streckenrechnung, nebst einem Excurs über das Hankel'sche [..]ermanenzprincip und dessen Beurtheilung durch neuere Autoren. [..]uch die einschlägigen Arbeiten von Grassmann, Bellavitis, Leibniz [..]nd Gauss sind in der Einleitung berücksichtigt. Schg.

Capitel 2.

Continuitätsbetrachtungen (Analysis situs).

A. Cayley. On the geometrical forms called trees. J. Hopkins Circ. 1882. 202-203.

Von den von C. Jordan in der Theorie der Verschlingungen eingeführten „Zahlcentra, resp. Doppelzahlcentra" einer Verschlingung (knot, tree) werden einige neue Eigenschaften mitgeteilt. Herr Sylvester vergleicht in einem Zusatz die in dieser Richtung von Jordan, Cayley und ihm gefundenen Resultate und macht auf ihre Bedeutung in der organischen Chemie aufmerksam. My.

O. Simony. Ueber jene Gebilde, welche aus kreuzförmigen Flächen durch paarweise Vereinigung ihrer Enden und gewisse in sich selbst zurückkehrende Schnitte entstehen. Wien. Ber. LXXXIV. 1881. 257-258.

O. Simony. Ueber eine Reihe neuer Thatsachen aus dem Gebiete der Topologie. Clebsch Ann. XIX. 1881. 110-12

O. Simony. Ueber eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. Wien. Ber. LXXXV. 1882. 907-928.

Die beiden erstgenannten Arbeiten sind inhaltlich identisch und beziehen sich auf die Herstellung und die Eigenschaften von Gebilden, die entstehen, wenn man etwa zwei rechteckige Papierstreifen kreuzförmig über einander legt, (die sich deckenden Teile verklebt), die vier bandförmigen Fortsätze zu je zwei nach vorheriger Drehung je des einen von beiden um ein Multiplum von 180 Grad vereinigt, und endlich die so entstehende Fläche durch einen, den Mittellinien der beiden ursprünglichen Streifen folgenden, in sich zurücklaufenden Schnitt umformt. die vier bandförmigen Fortsätze auf zwei wesentlich verschiede

in obiger Weise zu je zweien vereinigt werden können, so hen so „Flächen erster und zweiter Klasse". Die ersteren len nach ihrem Flächeninhalte in vier Gruppen, deren nata für alle möglichen Multipla-Paare von 180 Grad auflt werden. Complicirter sind die Flächen zweiter Klasse. ie leichter zu erfassen, werden die Begriffe einer „Doppelndung" zweier Flächen, sowie die „Verknüpfung", „Verigung", „Doppelknoten" einer Fläche aufgestellt und durch en erläutert. (Diese Begriffe können auf den allgemeinen von $2n$ bandförmigen Fortsätzen ausgedehnt werden). Mittelst gelingt es dann wieder, die allgemeine Schematisirung der er in Untergruppen zu je vier zerfallenden Flächen zweiter se zu erledigen, und die Resultate in Worte zu fassen.

Die dritte Arbeit schildert dagegen die Gebilde, die aus n unverdrehten, biegsamen Ringe (in praxi am besten von anisirtem Kautschuk mit sehr dünner Wandung), am einfachvon kreisförmigem Querschnitt, erhalten werden, wenn man (massiv gedachten) Ring mittelst eines ihn bis zur Mittellinie hsetzenden, in sich selbst zurücklaufenden Schnittes umformt. e Gebilde hängen ab sowohl von dem Multiplum von 360 Grad, welches sich die Axe des schneidenden Instrumentes dreht, von der Anzahl der Umläufe des letzteren. Als weitere akteristische Merkmale treten noch auf, einmal das Multiplum 360 Grad, welches die Verdrehung des resultirenden Gebildes ebt, sodann die Verschlingung desselben. Um die letztere haulich zu machen, wird der Begriff einer aus r einfachen en a_1^{ter}, $a_2^{ter}, \ldots, a_r^{ter}$ Art durch geeignete Zusammensetzung ehenden (positiven resp. negativen) „Knotenverbindung 1)^{ter} Ordnung" mit den „Windungszahlen" $a_1, a_2, \ldots, a_r$ get. Die Anschauung wird durch zahlreiche Figuren untert. Dadurch wird es wieder möglich, die obigen Gebilde zu natisiren, was für eine grosse Reihe von Werten der Drehungs-Umlaufszahlen geschieht. Aus diesen numerischen Schematen auf dem Wege der Induction eine Anzahl von allgemeinen n gefolgert, die sich mit Hülfe eines einfachen Algorithmus, lie Zusammensetzung der verschiedenen Knoten als eine Art

Multiplication auffasst, verhältnismässig einfach ausspre lassen.

Bis jetzt darf man wohl schon behaupten, dass diese Un suchungen des Herrn Verfassers, die noch weiter fortge werden sollen, eine wertvolle Ergänzung und Fortbildung Tait'schen Knotentheorie (cfr. F. d. M. IX. (1877) 392) bil Hoffentlich gelingt es dem Herrn Verfasser auch, seiner in duell-experimentellen Ableitung dieser complicirten Knotengeb und namentlich seinen allgemeinen Folgerungen eine allgem theoretische Begründung zu substituiren. My.

O. Simony. Gemeinfassliche, leicht controlirbare Lös der Aufgabe: In ein ringförmig geschlossenes B einen Knoten zu machen" und verwandter merkw diger Probleme. Dritte Aufl. Wien. Gerold. 1881.

Enthält der Hauptsache nach die in einer früheren Abh lung (cfr. F. d. M. XII. (1880) 410) dargelegten Entwickelun in populärer Form. Das dort angegebene Verfahren, Kn resp. knotige Verbindungen herzustellen, indem man ein n fach verdrehtes, geschlossenes, streifenförmiges Band längs Mittellinie durchschneidet, findet hier noch in doppelter W eine Erweiterung. Einmal werden solche Bänder auch l Linien durchschnitten, die der Mittellinie (in einem gewissen stande) parallel sind. Dies findet z. B. seine Anwendung der Aufgabe, einen ringförmig geschlossenen Streifen so h stellen, dass ein einziger Längsschnitt zwei ringförmig geschlo Streifen erzeugt, von welchen der eine ebenso breit, aber do so lang ist. Man theile nämlich den zuvor offenen Streifen zwei Parallelen zur Mittellinie in drei gleiche Teile, und ver das eine Ende vor seiner Vereinigung mit dem andern 180 Grad. Das allgemeine Resultat lässt sich im Wesentl dahin angeben, dass, so lange der Abstand der Parallelen der Mittellinie nicht ganz verschwindet, der bez. Längss immer zwei Streifen liefert. War die Gesammttorsion des ge

Streifens eine ungrade, d. h. von der Grösse $(2k+1).180$ Grad, tehen beide daraus hervorgehende Streifen in einer Verung $(k+1)^{\text{ter}}$ Art, und der längere ist auf dem kürzeren einem Knoten k^{ter} Art aufgeknüpft. War dagegen die urngliche Gesammttorsion eine gerade, d. h. von der Grösse 180 Grad, so sind die beiden neuen Streifen von gleicher ge, und stehen in einer Verbindung k^{ter} Art mit einander. lererseits werden diese Processe auf körperliche, unverdrehte ge, am einfachsten von kreisförmigem Querschnitte, übertragen, em man durch den Ring einen in seiner Mittellinie fortlaufen- Schnitt führt und dabei das schneidende Instrument um die tellinie in einem oder mehreren Umläufen um ein ganzes lfaches von 180 Grad dreht. Auch so entstehen Knoten und rbindungen. Anhangsweise und in Noten berührt der Herr rfasser auch die Frage nach der Auflösung resp. Bildung von oten (ohne Zuhülfenahme von Schnitten) mit Hülfe eines vierensionalen Raumes, und citirt hierher gehörige und verndte Arbeiten. Der Standpunkt des Verfassers selbst ist dabei reservirter. Die Tatsache, dass binnen Jahresfrist diese dritte flage nötig wurde, beweist das Interesse des Publikums für Titelfrage; ob der Herr Verfasser mit seiner Lösung den vartungen dieses Publikums entsprochen hat, sei dahingestellt.

My.

Hess. Ueber Polyeder-Kaleidoscope. Marb. Ber. 1882. 9-12.

Es sind dies dreiflächige Ecken, deren auf der Innenseite egelnde Flächen den direct-symmetrischen Mittelebenen der ulären Polyeder entsprechen. Irgend ein Punkt im Innern Ecke erzeugt durch Spiegelung die Ecken eines gleicheckigen eciell regulären) Polyeders. Schneidet man den Radiusvector ses Punktes senkrecht mit einer Ebene, so stellen die Spiegelder des so ausgeschnittenen Dreiecks die Oberfläche eines chflächigen Polyeders dar. Umgekehrt bringe man ein passend geschnittenes Dreieck mechanisch in passender Lage in eine

solche (von Herrn Krüss in Hamburg wirklich hergestellte) E hinein, und versehe das Dreieck noch mit einer Oeffnung, kann man bequem in das Innere der durch die Spiegelung zeugten Polyeder hineinsehen. Die drei vorgelegten Mode haben zu Seitenflächen drei benachbarte, direct-symmetris Mittelebenen eines regulären Tetraeders, Oktaeders, Ikosaed Das letztere Modell erzeugt z. B. auch die Kepler-Poinsot'sch Sternpolyeder. Mr.

J. Pitsch. Ueber halbreguläre Sternpolyeder. Zeits f. d. Realschulw. VII. 162-163.

In seiner bekannten, inhaltsreichen Abhandlung über ha reguläre Polyeder (VI. Jahrgang, 2. Heft obiger Zeitschrift) ha der Verfasser die Ansicht ausgesprochen, es müsse auch derartiges Sternpolyeder mit fünfseitigen Ecken geben. Nunm ist er in der Lage, das Netz dieses Körpers und das des gehörigen Umhüllungspolyeders wirklich zu construiren. Ind ist seiner Angabe zufolge auch mit diesen beiden neuen Individ die Reihe der halbregulären Sternpolyeder noch nicht geschlossen: in der Tat konnte Hess mit Hülfe der in sei „Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung" aufgestellten das Problem allgemein lösenden Formeln dem Pitsch'schen zeichnisse noch einige weitere Ergänzungen hinzufügen. Gr.

Capitel 3.

Elementare Geometrie (Planimetrie, Trigonomet Stereometrie).

H. Köstler. Vorschule der Geometrie. Halle a. S. L. N

Dieses kleine nur 24 Seiten starke Buch enthält die in elementaren Geometrie gebräuchlichen Definitionen und

tionen, erstere unter dem Titel: Formenlehre, letztere unter Titel: Constructionslehre. Am Schlusse befinden sich Reions- und Uebungsaufgaben. Mz.

F. Hertter. Zeichnende Geometrie. Für die planimetrische Repetition mit besonderer Berücksichtigung des geometrischen Zeichnens.

Erste Abteilung: Drei- und Viereck. Kreislehre mit Ausschluss der Proportionen. Geradlinige Ornamente.

Zweite Abteilung: Proportionalität, Aehnlichkeit, Kreissecanten, Stetige Theilung, Gleichheit, Tactionsproblem, Gothische Ornamente. Stuttgart. Metzler'sche Buchhandlung.

Der Inhalt ist durch den Titel genügend bezeichnet. Der fasser äussert das Bestreben, die Geometrie dem Schüler mundechter zu machen, indem er das Zeichnen innig mit dem geotrischen Unterricht verbindet und ferner die gezeichneten guren farbig belebt zur Darstellung bringen lässt. Das für die nd des Schülers bestimmte Heft enthält keine Figuren, demben sind jedoch Orientirungstafeln für den Lehrer beigegeben. r Schüler soll die Zeichnung selbst nach dem Texte entstehen sen, nicht mechanisch abzeichnen. Das Material ist sorgsam d geschickt zusammengetragen. Das Buch dürfte jedem Lehrer, r mit der zu Anfang ausgesprochenen Ansicht des Verfassers ereinstimmt, willkommen sein. Rg.

. Fialkowski. Zeichnende Geometrie (Constructions-Lehre) mit entsprechenden Beispielen der Anwendung auf das Projections-, dann Bau-, Maschinen-, Situations- und auf das figurelle Zeichnen. Mit 1800 Figuren auf 138 Tafeln. Dritte verbesserte und erweiterte Auflage. Wien, Leipzig. J. Klinkhart.

In den ersten Capiteln werden alle diejenigen Constructio der Planimetrie gelehrt, welche für die verschiedenen Zwe der Technik Bedeutung haben. Andererseits wird das eige liche Projectionszeichnen nicht behandelt, sofern man nicht Darstellung der regulären Körper in einer Ansicht, abgeleitet Kreispolygonen, hierher rechnen will. Das technische Mater ist reichhaltig. Gelehrt wird u. A. die Construction der gebräu lichsten Bogen in der Architektur, Malerei und Bildnerei; ge metrische Profilconstructionen für Gurt- und Pfeilergesimse, Säul ordnungen, Situations-Zeichnen, die Construction der für d Maschinenbauer wichtigen Rollcurven, Eilinien etc. Die Brau barkeit des Buches beweisen die wiederholten Auflagen. Math matische Constructionen, die übrigens ohne Beweis gegeben we den, muss man mit Vorsicht zur Anwendung bringen. So wi auf pag. 39 in 421 bei der ersten Construction eines regulär Siebenecks nicht gesagt, dass eine Näherungsmethode vorlieg andere evidente Constructionen sind dagegen zuweilen mit de Zusatz „mathematisch richtig" versehen. Die Einhüllende all Kreise von constantem Halbmesser, deren Mittelpunkte auf ein Ellipse liegen, hält der Verfasser pag. 138 irrtümlich für ei Ellipse.

Rg.

W. Holl. Lehrbuch der Geometrie. Stuttgart. W. Ko hammer.

Das Buch ist für Mittelschulen, einklassige Realschulen, Fo bildungsschulen und niedere landwirtschaftliche Lehranstalt bestimmt, und enthält die Lehre von den geometrischen Rau grössen in Verbindung mit Zeichnen und Rechnen. In ein besondern Hefte befinden sich die Auflösungen zu den Aufgab des Lehrbuchs, und zwar sowohl jedesmal das Facit als au die verlangte Construction angegeben. Der Herr Verfasser wesentlich praktische Gesichtspunkte im Auge; in jedem Pa graphen findet man zuerst Belehrung, wobei Beweise in m lichster Kürze angedeutet sind, hierauf Zeichnen und dann Re nen in Bezug auf den jedesmal vorliegenden Gegenstand. M

wol annehmen, dass dies Buch an der passenden Stelle gute Dienste thut; und es ist jedenfalls ein Vorzug, dass in auf einem kleinen Raum ein verhältnismässig grosses Matebewältigt ist. Mz.

DANGSCHAT. Geometrie für Mittelschulen. Danzig. F. Axt.

Dieses für Mittelschulen und ähnliche Unterrichtsanstalten immte Buch behandelt in gedrängter Kürze die elementare imetrie und Stereometrie. Ein Vorzug des Buches sind die (182 an der Zahl) das Verständnis erleichternden Figuren. Darstellung ist knapp, aber deutlich. In einem Anhange die Formeln für die Berechnung ebener und Raumfiguren mmengestellt. Mz.

H. NISSEN. Lehrbuch der Elementarmathematik. Schleswig. J. Bergas.

Dieses für den Unterricht in Schullehrer-Seminarien und alschulen, sowie für den Selbstunterricht bestimmte Buch hat r Teile: I. Teil: Arithmetik und Algebra, 1882; II. Teil: Planitrie, 1877; III. Teil: Ebene Trigonometrie, 1882; IV. Teil: reometrie und sphärische Trigonometrie, 1880. Vom I., III. d IV. Teil ist die zweite Auflage erschienen. Der umfangchste erste Teil behandelt die elementare Arithmetik, die Logamen, Progressionen, Rentenrechnung; ferner die Algebra bis zu den cubischen Gleichungen einschliesslich. In einem rzen Anhange ist Einiges von den pythagoräischen Zahlen gegt. Die im zweiten Teil gegebene Planimetrie geht bis zur eisberechnung einschliesslich. Im dritten Teil werden zuerst e trigonometrischen Functionen besprochen, wobei auch die endliche Reihe für $\cos x$ hergeleitet wird, dann die Anwendung r Trigonometrie auf das rechtwinklige, nachher auf das schiefnklige Dreieck. Zuletzt sind die wichtigsten Formeln zusammenstellt, und das Kreisviereck behandelt. Der vierte Teil enthält e Stereometrie bis zur Berechnung von Kugel und Kegel ein-

schliesslich, das sphärische Dreieck rein geometrisch und tr
metrisch behandelt. Im Anhange sind Aufgaben aus der m
matischen Geographie, zu deren Auflösung Kenntnis der s
schen Trigonometrie gehört. Das ganze Werk ist mit zahlr
Uebungsbeispielen versehen. Die Darstellung ist durchwe
und der Druck deutlich. M

K. Struve. Elemente der Mathematik. Berlin. P. F

Das vorliegende Buch besteht aus vier Teilen: Erster
Geometrie; zweiter Teil: Allgemeine Zahlenlehre; dritter
Ebene Trigonometrie; und vierter Teil: Rechnen mit besti
Zahlen. Sie sind aus den Jahren resp. 1878, 1879, 187
1882. Im ersten Teil ist die Geometrie bis zur Lehre v
Aehnlichkeit der Figuren und bis zur Kreisberechnung einsc
lich geführt, am Schlusse befindet sich ein Anhang unte
Titel: Die geometrische Aufgabe. Der zweite Teil enthä
Buchstabenrechnung, Potenzen und Wurzeln, Gleichungen
Grades mit einer und mit zwei Unbekannten, quadratische
chungen, Logarithmen und die Hauptaufgaben der Zinse
rechnung. Der dritte Teil enthält die Definitionen der tr
metrischen Functionen, die Erklärung der logarithmisch-tr
metrischen Tafeln, die Behandlung des rechtwinkligen Dre
die Formeln für die trigonometrischen Functionen der Su
und Differenzen von Winkeln, das schiefwinklige Dreieck
einige Aufgaben. Beim zweiten und dritten Teil sind die
tigsten Formeln in Uebersicht zum Zwecke des Einprägen
angestellt. Der vierte ganz für sich bestehende Teil beh
das Rechnen, und ist nach der Angabe des Herrn Verf
für solche Schulen bestimmt, die einen die Elementarmath
umfassenden Lehrgang nicht besitzen. Es finden sich da
notwendigsten Lehren aus der Elementarmathematik, un
Verwendung beim praktischen Rechnen. Die Darstellu
fasslich, die Ausstattung gut. M

IEGER. Leitfaden für den geometrischen Unterricht. reslau. Ed. Trewendt.

Von diesem zum Gebrauch an höheren Unterrichtsanstalten mmten Buche enthält der erste Teil die Planimetrie, der zweite Trigonometrie. Zahlreiche Figuren dienen zur Erleichterung Verständnisses. Im ersten Teil ist die Planimetrie bis zur isberechnung einschliesslich behandelt; der Lehrgang in diesem he enthält nicht allein das Notwendige, sondern ein gewisses gehen in die Sache, eine weitere Ausführung des Gebotenen eicht dem Buche zur Empfehlung. So ist z. B. beim Kreise die re von den Aehnlichkeitspunkten, von der Potenzlinie, von den isbüscheln, der Kreisverwandtschaft und Pol und Polare geen. Der zweite Teil enthält I. Ebene Geometrie, II. Goniotrie, III. Sphärische Trigonometrie. Der Inhalt dieses Teils im Wesentlichen derselbe, wie in andern ähnlichen Büchern, h sei hervorgehoben, dass die Goniometrie mit grösserer Ausrlichkeit dargestellt ist; es sind sogar die allgemeinen Relanen angegeben, welche Sinus und Cosinus vielfacher Winkel durch Sinus und Cosinus der einfachen ausdrücken. Mz.

SCHUMANN. Lehrbuch der Planimetrie für Gymnasien und Realschulen. Dritte Aufl., bearbeitet von R. Gantzer. Berlin. Weidmann.

Dieses wegen seiner Gründlichkeit sehr zu empfehlende Buch thält den Lehrgang der Planimetrie von den Elementen an bis r Berechnung und geometrischen Betrachtung des Kreises einhliesslich. Es ist nicht allein Alles gegeben, was auf Gymnan und Realschulen hierin nur gefordert werden kann, sondern ch Mannigfaches, was zur weiteren Ausführung des Gebotenen ent. Wir erwähnen verschiedene Sätze von Polygonen, den scal'schen Satz u. a. Ferner sind die Elemente der neueren ometrie aufgenommen, also die Conformität, die harmonische ilung an geradlinigen Figuren und die harmonischen Punkte Kreise. Dann kommt die Potenzialität und Aehnlichkeit der eise und das Berührungsproblem des Apollonius von Pergä;

ferner Aufgaben aus der rechnenden Geometrie, so unter andern die Bestimmung der Entfernung der Centra der einem Dreieck ein- und umgeschriebenen Kreise, Berechnungen am Kreisviereck, an regulären Vielecken etc. Dann Auflösung von Aufgaben auf rein geometrischem, später auf algebraischem Wege; Anwendung der unbestimmten Gleichungen auf Geometrie. Neben vielfachem Uebungsmaterial, das im Buch selbst enthalten ist, wird dabei fortgesetzt auf die geeigneten Paragraphen in der Sammlung von Gandtner und Junghans verwiesen. Auch die äussere Ausstattung des Buches ist anerkennenswert.

Mz.

J. Rüefli. Lehrbuch der ebenen Geometrie. Bern. J. Dalp. 1880.

Dieses Buch ist zum Gebrauche an Secundarschulen (Realschulen) und Gymnasien bearbeitet. Es enthält in ausführlicher Darstellung die Planimetrie bis zur Kreisberechnung einschliesslich. Dass ein Teil der Flächenberechnungen der Lehre von der Aehnlickkeit vorangeht, ist auch nach Ansicht des Referenten zweckmässig, und zwar wesentlich aus didaktischen Gründen. Die Proportionalität wird mit aller nur wünschenswerten Gründlichkeit behandelt, insofern hierbei auf Commensurabilität und Incommensurabilität Bedacht genommen ist. Der Kreisberechnung geht eine sehr eingehende Behandlung der ein- und umgeschriebenen regulären Polygone voran. Zahlreiche Beispiele und Constructionsaufgaben sind von Abschnitt zu Abschnitt eingereiht. Die Figuren sind deutlich und instructiv, die Darstellung durchweg klar, so dass das Buch entschieden empfohlen werden kann.

Mz.

J. Henrici, P. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Zweiter Teil. Leipzig. Teubner.

Der Inhalt dieses vorliegenden zweiten Teils ist als Pensum der Secunda, nebst weiteren Ausführungen für Prima, bezeichnet

wird darin die perspectivische Abbildung in der Ebene und Berechnung der planimetrischen Grössen behandelt. Demläss zerfällt das Buch in zwei Abteilungen: in der ersten l die perspectivische Aehnlichkeit und nachher die perspectihe Collineation vorgetragen; in der zweiten werden metrische iehungen zwischen Strecken, Flächen und Bogen, Winkeltionen (sin, cos, etc.) zu bestimmten Teilen des rechten Wins gegeben, woran sich die Berechnung regelmässiger Polygone des Kreises knüpft; dann folgt Goniometrie, ebene Trigonorie und Behandlung von Aufgaben der praktischen Geometrie. Schluss ist eine grosse Zahl von Uebungsaufgaben, die sich den gesammten Inhalt des Buches beziehen, gegeben. Auf er beigefügten Karte ist die Triangulirung des Grossherzogns Baden als Exemplification zur praktischen Geometrie daroten. Grosse Gründlichkeit und Ausführlichkeit zeichnen das ch in allen seinen Teilen aus; dabei ist nicht allein Alles, s sonst auf dieser Unterrichtsstufe behandelt wird, gegeben, ndern auch die neuere Geometrie. Die modernen Anschauunn geometrischer Gebilde sind derartig herangezogen, dass die nze Anlage des Buches sich wesentlich von der ähnlicher cher unterscheidet. Besondere Sorgfalt ist unter Anderm auch r Darstellung der trigonometrischen Functionen nachzurühmen: wird hierbei bis zu ihrer Entwickelung in unendliche Reihen rgegangen. Der Druck und die äussere Ausstattung des Buches dlich lässt nichts zu wünschen übrig. Mz.

Casey. The first six books of the elements of Euclid. Dublin.

Ueber den Zweck der vorliegenden Euklid-Ausgabe spricht h die Vorrede folgendermassen aus: „Während das Buch das vergleichliche Original völlig ungeändert wiedergiebt, soll es gleich die modernen Auffassungen und Entwickelungen, soweit sich auf die Elemente der Geometrie beziehen, vorführen.“

Den im Text besprochenen Sätzen ist überall das Wesentne der Euklid'schen Beweisführung beigefügt; meist ist auch

der Weg angegeben, auf dem man zur Lösung von Au
gelangt. Weiterhin sind zahlreiche andere Beweise der
mitgeteilt. Den Definitionen sind ausführliche Anmerkunge
gegeben, endlich ist die Theorie der Proportionen (Buch
algebraischer Form gegeben.

Der Inhalt ist sodann durch eine grosse Zahl neuer
und Aufgaben erweitert. Die einfachsten von diesen sch
sich unmittelbar an diejenigen Euklidischen Sätze an, aus
sie folgen, während die schwierigeren am Schlusse der ein
Bücher zusammengestellt sind. Von einzelnen Aufgaben
Lösung angegeben, wie von der bekannten über den Neun
kreis etc.

Die Noten am Ende des Buchs enthalten die moderne T
der Parallelen, Legendre's und Hamilton's Beweise des
dass die Summe der Dreieckswinkel gleich zwei Rechten ist
elementaren Beweis für die Construction des regulären S
zehnecks, mechanische Methoden zur Trisection des Wink

Man erkennt daraus, dass das vorliegende Werk me
hält, als irgend eine der früheren Euklid-Ausgaben, und d
namentlich in Bezug auf Einzelnheiten jene Ausgaben a
ständigkeit übertrifft. Csy. (Wn

J. O. Gandtner, K. F. Junghans. Sammlung
Lehrsätzen und Aufgaben aus der Planimetrie.
Weidmann.

Von dieser weit verbreiteten und ziemlich allgemein b
ten Sammlung liegt eine neue Bearbeitung vor, die na
Wunsche des Herrn Gandtner Herr Junghans allein übern
hat. Vom ersten Teil, in welchem Proportionen nicht ang
werden, ist 1879 die vierte Auflage, und vom zweiten
1882 die dritte Auflage herausgegeben. Die Anlage dieser
Teile ist dieselbe. Zuerst kommt ein Verzeichnis der als
angenommenen Sätze und Aufgaben aus der Elementarge
und hierauf folgen in systematischer Ordnung Lehrsät
Aufgaben. Das hier gebotene Material ist ein überaus

Grundlehren der neueren Geometrie (anharmonisches Verhält-, Involution u. s. f.) finden im zweiten Teile eingehende Be-ksichtigung. Nur Einiges möge hiervon erwähnt werden. Die -wart'sche Gleichung, die Sätze von Monge, Menelaus, Ceva, -scal, Brianchon, die Castillon'sche Aufgabe und das Berührungs-oblem des Apollonius. Aber auch sehr vieles Andere, zum -il gar nicht Bekannte, ist in der Sammlung enthalten. Die Be-chnungsaufgaben bieten eine nicht minder grosse Fülle von -bungsstoff; und vor Allem wegen dieser Vielseitigkeit verdient -s auch äusserlich vortrefflich ausgestattete Buch angelegentliche -mpfehlung. Mz.

LIEBER, F. VON LÜHMANN. Geometrische Constructions-aufgaben. Sechste Aufl. Berlin. L. Simion.

Es ist dies ein sehr nützliches Buch zur Einübung und Be-stigung der Kenntnisse in der Planimetrie. Im ersten Abschnitte -erden Dreiecks- und Vierecks-Constructions-Aufgaben gegeben, -so z. B. Aufgaben, wo die Summe oder die Differenz zweier -eiten gegeben ist etc.; und zwar kommen hier sowohl wie -n den beiden folgenden Abschnitten zuerst Aufgaben, die -hne, später solche, die mit Proportionen zu lösen sind. Im -weiten Abschnitte folgen vermischte Aufgaben, z. B. zwischen -en Schenkeln eines Winkels eine Linie nach gegebenen Bedin-ungen zu ziehen, u. s. w. Im dritten Abschnitte werden Kreis-aufgaben gegeben, darunter das Apollonische Berührungsproblem, und sogar die Malfatti'sche Aufgabe. Der vierte Abschnitt ent-hält Verwandlungs- und Teilungs-Aufgaben, der fünfte solche Aufgaben, die durch algebraische Analysis zu lösen sind. Am Schlusse folgen Aufgaben, bei welchen die Coordinatenmethode angewandt wird, dann Aufgaben zur Einübung der stetigen Teilung, welche von Herrn H. Emsmann herrühren, und endlich mannig-fache geometrische Oerter. Anzuerkennen ist die Ordnung und Uebersichtlichkeit, welche das ganze Buch beherrscht.

Mz.

G. Tarry. Propriétés générales de trois figures sem-
blables. Mathesis II. 73-77.

Mn.

J. Albers. Die Seitenproportionalen eines Dreiecks und die Proportionaldreiecke desselben. Hoppe Arch LXVIII 53-72.

In dieser Arbeit, welche durchweg elementare Geometrie behandelt, werden folgende Definitionen gegeben: Wenn man in irgend einem Dreieck ABC den Winkel $ACD = ABC$ macht, also einen Dreieckswinkel in einem Endpunkte an die gegenüberliegende Seite legt, wobei Punkt D sich auf AB befindet, so heisst CD Seitenproportionale des Dreiecks. Ebenso kann man auch Winkel $BCE = BAC$ machen (E liegt wieder auf AB) und hat eine zweite Seitenproportionale CE. Ferner wird das Dreieck CDE, welches gleichschenklig sein muss, Proportionaldreieck von ABC genannt. Auf diese Gegenstände bezieht sich nun die vorliegende Arbeit. Mz.

E. Hain. Ueber das gleichseitige Dreieck. Hoppe Arch LXIX. 44-54.

Der Herr Verfasser betrachtet zuerst ein beliebiges Dreieck ABC, welches als Axendreieck genommen wird, und in Bezug auf dasselbe die trimetrischen Coordinaten eines Punktes. Wer dann für dieses Dreieck gewisse Sätze und Formeln gefunden sind, so werden durch Specialisirung Sätze für ein gleichseitiges Dreieck erhalten. So unter Anderm: „Die Verbindungsgerade der Spiegelbilder des Umkreiscentrums eines Dreiecks bezügli dessen Seiten mit den Gegenecken schneiden sich im Mittelpun des Feuerbach'schen Kreises.“ Und dann weiter: „Fällt m von einem beliebigen Punkte in der Ebene eines gleichseitig Dreiecks auf die Seiten desselben Lote, und verlängert man d selben über den Fusspunkt um sich selbst, so treffen sich Verbindungsgeraden der Endpunkte dieser Verlängerungen

n Gegenecken in einem Punkte.“ In dieser Weise folgen noch
dere Sätze. Mz.

PICART. Solution d'un problème de géométrie.
Nouv. Ann. (3) I. 33-39.

In einem gleichschenkligen Dreieck OAB sei der Basis-
nkel bei A gleich dem n-fachen des Winkels an der Spitze O,
an soll das Verhältnis der Basis AB zur Seite OA finden. Diese
ufgabe behandelt der Herr Verfasser, indem er den Winkel
i A in n gleiche Teile teilt; ferner Seite AB mit x, die Teilungs-
nien der Reihe nach mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet (wo also x_n
it OA zusammenfällt) und die Relationen aufstellt:

$$xx_2 - x_1^2 = \frac{xx_1^2x_2}{R^2}, \quad x_1x_3 - x_2^2 = \frac{x_1x_2^2x_3}{R^2}, \text{ etc.}$$

$$x_{n-2}x_n - x_{n-1}^2 = \frac{x_{n-2}x_{n-1}^2x_n}{R^2},$$

i welchen zu beachten, dass $x_n = R$, $x_1 = x$.

Aus diesen $n-1$ Relationen geht durch Elimination von
$_2, \ldots, x_{n-1}$ die gesuchte Gleichung für $\frac{x}{R}$ hervor.

Die letzte der angegebenen Relationen wird zu diesem Zweck
ls Differenzengleichung behandelt und integrirt. Es kommt
ann:

$$\frac{1}{x_n} = Ca^n - C'a^{-n},$$

wo C, C', a drei Constante sind, die in der Beziehung stehen:

$$CC'(a^2 + a^{-2} - 2) - \frac{1}{R^2} = 0.$$

Schliesslich wird gezeigt, dass $a + \frac{1}{a}$ aus den beiden Glei-
ungen eliminirt werden muss:

$$a + \frac{1}{a} = 2 - \frac{x^2}{R^2},$$

$${}^{-1} + \frac{1}{a^{n-1}} - \left(a^{n-2} + \frac{1}{a^{n-2}}\right) + \left(a^{n-3} + \frac{1}{a^{n-3}}\right) - \cdots + (-1)^{n-1} = \frac{x}{R},$$

wo also der Ausdruck von $a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}$ etc. durch $a+\frac{1}{a}$ vo her ermittelt sein muss. Am Schlusse der Arbeit wird noch e örtert, warum die Analysis zur Bestimmung des Wertes v $\frac{x^2}{R^2}$ auf eine Gleichung vom Grade $2n-2$ führt.

Mz.

E. Hain. Zur Construction reciproker Punkte d Dreiecks. Hoppe Arch. LXVIII. 442-444.

Der Herr Verfasser betrachtet ein Axendreieck ABC und der Ebene desselben einen Punkt P, dessen Entfernungen v den Seiten des Dreiecks BC, CA, AB resp. proportional p_a, p_b, p_c seien; dann heissen diese Grössen die trimetrisch Coordinaten von P in Bezug auf ABC. Wenn nun ein ande Punkt Q die Coordinaten $\frac{1}{p_a}$, $\frac{1}{p_b}$, $\frac{1}{p_c}$ hat, so wird er der re proke Punkt des Punktes P genannt. Wenn ferner in diese Coordinatensystem

$$a_1x_a+b_1x_b+c_1x_c=0,$$
$$a_2x_a+b_2x_b+c_2x_c=0$$

die Gleichungen zweier Geraden $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ sind, so heiss diese Geraden reciprok, falls $a_1a_2=b_1b_2=c_1c_2$. Es werden n die bekannten Constructionen erwähnt, durch welche zu eine gegebenen Punkte P der reciproke Q, und zu einer gegeben Geraden $\mathfrak{G}_1$ die reciproke $\mathfrak{G}_2$ gefunden werden. Darauf wi eine neue Construction von Q und $\mathfrak{G}_2$ angegeben, welche auss der Construction des Punktes J (Centrum des dem Dreieck AB eingeschriebenen Kreises) nur das Ziehen von geraden Linie verlangt.

Mz.

H. Schubert. Elementarer Beweis des Feuerbach'sche Satzes. Pr. Hamburg. Hoffmann Z. XIII. 19-21.

Der vorliegende Beweis des interessanten Feuerbach'sch Satzes, dass der durch die Mitten der Seiten eines Dreiec

nde Kreis *F* jeden die drei Seiten des Dreiecks tangirenden **s *K*** berührt, bedient sich ganz elementarer Betrachtungen, so **derselbe** auf dem Gymnasium schon in Secunda vorgetragen **den** kann. Der Gedanke, welcher dem Beweise zu Grunde t, ist der, die Existenz eines Punktes nachzuweisen, welcher **chzeitig** auf dem Kreise *F*, auf dem Kreise *K* und auf der Verlungsgeraden der Mittelpunkte dieser beiden Kreise liegt. Die **stellung** des Beweises ist klar und durchsichtig. Hz.

M. Taylor. On a six-point circle connected with **a triangle.** Mess. (2) XI. 177-179.

Es seien AD, BE, CF die Höhen des Dreiecks ABC; ferner **n** Fc, Da, Eb, sowie $E\beta$, $F\gamma$, $D\alpha$ Lote, die resp. auf die **ten** BC, CA, AB gefällt sind. Dann liegen die Punkte γ, b, α, c, β auf einem Kreise. Dies ist der Sechspunktekreis Herrn H. M. Taylor.

Ferner steht jedes der einander gleichen Dreiecke abc, $\alpha\beta\gamma$ dem Dreieck ABC in dem Verhältnis

$$\sqrt{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C + \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C} : 1.$$

Ist endlich φ der Winkel über der Sehne $a\alpha$, dessen Scheiteiner der Punkte a, b, c, γ ist, so ist

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm \operatorname{tg} A . \operatorname{tg} B . \operatorname{tg} C.$$

Glr. (Wn.).

. C. Rowe. Note on Mr. H. M. Taylor's six-point circle. Mess. (2) XII. 36.

Anderer Beweis, dass die im vorhergehenden Referat defiten sechs Punkte a, γ, b, α, c, β auf einem Kreise liegen.

Glr. (Wn.).

Heppel, L. A. Kittudge, W. J. C. Miller. Solutions of a question (6667). Ed. Times XXXVI. 73-74.

Lösung der Aufgabe, ein Quadrat zu construiren, wenn die **tände** dreier Ecken desselben von einem festen Punkte ge-

geben sind. Der Inhalt des Quadrats wird, wenn a, b, c je Abstände, und Δ der Inhalt des aus den Seiten a, $b\sqrt{2}$, c construirten Dreiecks ist,

$$\frac{1}{2}(a^2+c^2)\pm 2\Delta.$$

Die Aufgabe lässt sich auf ein Rechteck ausdehnen. Ist m das Verhältnis der Seiten des Rechtecks, $b' = \frac{(m^2+n^2)}{n}$ $c' = \frac{m}{n}c$, Δ der Inhalt des Dreiecks mit den Seiten a, b', c', ist der Flächeninhalt des Rechtecks

$$\frac{1}{m^2+n^2}\{mn(a^2+c^2)\pm 4n^2\Delta\}.$$

Wn.

W. E. Heal. Solution of a problem. Analyst IX. 92.

Sind $2a$, $2b$, $2c$, $2d$ die Seiten eines Vierseits, h und k die Abstände der Mittelpunkte zweier Gegenseiten, so ist

$$h^2 - k^2 = 2(a^2 - b^2 + c^2 - d^2)$$

Jn. (Wn.)

D. Edwardes, C. Morgan, G. F. Walker. Solutions of a question (6403). Ed. Times XXXVI. 89.

Ist $ABCD$ ein einem Kreise einbeschriebenes Viereck und sind H, K, L, M die Höhenschnittpunkte der von den Seiten und Diagonalen des Vierecks gebildeten Dreiecke, so ist 1) das Viereck $HKLM$ congruent $ABCD$; 2) sind die Punkte A, B, C, D die Höhenschnittpunkte der von den Seiten und Diagonalen von $HKLM$ gebildeten Dreiecke; 3) die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte schneiden sich in einem Punkte und werden dort halbirt; 4) dieser Punkt ist zugleich der Mittelpunkt der Centrale der um beide Vierecke beschriebenen Kreise.

Wn.

CHSE. Ueber eine Eigenschaft des vollständigen recks. Hoppe Arch. LXVIII. 425-427.

nige bekannte Sätze vom vollständigen Viereck werden emeinert, indem für die unendlich entfernte Gerade der eine beliebige Gerade substituirt wird. Die Beweise wer- ırch metrische Relationen geführt. Mz.

---

re Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über ieck und Viereck von D. EDWARDES, G. EAST- ›D, J. O'REGAN, G. HEPPEL, W. A. WHITWORTH, GALE, E. BUCK, J. YOUNG, CH. LADD, T. R. TERRY, RUTTER, G. M. REEVES, S. CONSTABLE, M. BAKER, I. WILLIS, W. H. BLYTHE, W. B. GROVE, R. KNOWLES en sich Ed. Times XXXVI. 34, 40, 101, 106, 108, 115; XVII. 35, 50, 83-84, 113, 124. Wn.

TALAN. Question (65.) Mathesis II. 85-88, 245-248.

R der Radius des umschriebenen, *r* der Radius des einbe- enen Kreises eines regulären Polygons, ϱ der Radius des , welcher mit dem Polygon gleichen Umfang hat, so ist

$$\frac{1}{3}(r+2R) > \varrho > \sqrt[3]{rR^2}.$$

Mn. (Wn.).

LER. Vervollständigung der Steiner'schen elemen- geometrischen Beweise für den Satz, dass der is grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ıe Figur gleich grossen Umfanges. Gött. N. 1882.

r Steiner'sche Beweis beruht auf der Voraussetzung, dass Figur grössten Inhalts giebt. Die Vervollständigung hat fasser bereits in Hoffmann Z. X. 245 (siehe F. d. M. XI.

(1879) 374) gegeben. Das Gegenwärtige ist eine Vereinfach davon. Ein beliebiges Vieleck von n Seiten wird durch h stens n-malige Parallelverschiebung und Halbirung successiv ein solches von kleinerem Umfang und grösserem Inhalt ändert, das $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$ Symmetrieaxen hat und schli lich regelmässig wird. Das regelmässige lässt sich dann dem Kreise vergleichen, und es folgt, dass es für jedes Vie einen Kreis von kleinerem Umfang und grösserem Inhalt g Vom Vieleck wird nach einer Steiner'schen Methode auf ein liebig begrenztes Flächenstück übergegangen.

H.

E. Rouché. Sur la méthode des isopérimètres. Nouv. (3) I. 325-330.

Es handelt sich hier um reguläre Polygone von consta Umfang $= 2$, deren Seitenzahl sich immer verdoppelt. M wird der Radius des dem Polygon umschriebenen, mit α Radius des dem Polygon eingeschriebenen Kreises bezeic wenn das Polygon n Seiten hat; mit ϱ_k, α_k die analogen Grö bei einem Polygon von $n.2^k$ Seiten. Nun hat Herr D. A bewiesen, dass die Brüche

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1-\alpha}, \quad \frac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}, \dots, \frac{\alpha_m-\alpha_{m-1}}{\alpha_{m-1}-\alpha_{m-2}}$$

sämmtlich kleiner als $\frac{1}{4}$ sind, und dass dasselbe von Brüchen

$$\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho-\varrho_1}, \quad \frac{\varrho_2-\varrho_3}{\varrho_1-\varrho_2}, \dots, \frac{\varrho_{m-1}-\varrho_m}{\varrho_{m-1}-\varrho_{m-2}}$$

gilt. Hiervon ausgehend, gelangt der Herr Verfasser zu Ungleichheit:

$$\varrho_1-\frac{1}{3}(\varrho-\varrho_1)<\frac{1}{\pi}<\alpha_1+\frac{1}{3}(\alpha_1-\alpha).$$

Es wird nun weiter gezeigt, wie sich dies zur appro tiven Bestimmung von π verwerten lässt, und darauf auf sam gemacht, dass diese vervollkommnete Methode die

um mehr als die Hälfte gegen die sonstige Methode ab-
kt. Mz.

SCHIAPPA MONTEIRO. Sobre a divisão em partes eguaes
a distancia entre dois pontos e da circumferencia
mpregando o compasso ordinatio. Teixeira J. IV. 39-52.

Mascheroni hat bekanntlich zuerst eine Anzahl geometrischer
structionen nur mit Hülfe des Zirkels auszuführen gelehrt. In
vorliegenden Aufsatz behandelt Herr Monteiro dieselben Auf-
en, speciell die Teilung einer Geraden in eine beliebige An-
l von Teilen, die Teilung des Kreisumfangs in fünf, acht,
, zwölf etc. Teile allein mittelst des Zirkels. Die benutzten
hoden sind von denen von Mascheroni verschieden.

Tx. (Wn.).

BAKER. Alhazen's problem. Its bibliography and
n extension of the problem. Sylv. J. IV. 327-332.

Siehe Abschn. I. Cap. 1. B. p. 24.

OREL. Solution of a question (5592). Ed. Times XXXVI. 49.

Lösung der Aufgabe, einen Kreis zu construiren, von dem
Punkt des Umfanges gegeben ist, sowie zwei andere Punkte
den Abständen $\frac{1}{m}r$ und $\frac{1}{n}r$ vom Mittelpunkte.

Wn.

W. B. GROVE, D. EASTWOOD, J. YOUNG, M. BAKER. D. EDWARDES, MATZ. Solutions of a question (6572). Ed. Times XXXVI. 62-63, 110-111.

Zieht man von den Endpunkten A und B des Durchmessers
nes Halbkreises die Tangenten AP, BP an einen zweiten Kreis,
r den ersten, sowie dessen Durchmesser AB berührt, so ist

$AP \pm BP = AB \pm PQ$, wenn PQ das von P auf AB gefällte Lot ist. Von den beiden Zeichen gilt das obere oder untere, je nachdem der zweite Kreis den ersten von innen oder von aussen berührt.

Wn.

S. Constable, B. Easton, Wolstenholme. Solutions of a question (6720). Ed. Times XXXVI. 103-104.

AB und AC seien zwei feste Tangenten eines Kreises (oder auch eines Kegelschnitts), DE und FG seien zwei beliebige andere Tangenten, die AB in D und F, AC in E und G schneiden. Dann liegt der Schnittpunkt von EF und DG in der Verbindungslinie der Berührungspunkte der festen Tangenten.

Wn.

Morel, T. R. Terry, G. Heppel. Solutions of a question (6700). Ed. Times XXXVI. 82.

Einem Kreise ist ein Dreieck ABC einbeschrieben, ein zweites $A'B'C'$ in denselben Punkten umschrieben. Fällt man von einem Punkte μ der Peripherie auf die sechs Dreiecksseiten die Lote μP, μQ, μR, $\mu P'$, $\mu Q'$ $\mu R'$, so ist

$$\mu P . \mu Q . \mu R = \mu P' . \mu Q' . \mu R'.$$

Wn.

H. Schubert. Ueber die Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel. Hamb. Mitt. 1882. 18-20.

Man denke sich zwei Spiegel S und S' und zwischen ihnen einen leuchtenden Punkt B; durch B lege man die zu beiden Spiegeln lotrechte Ebene, und beschreibe um den Durchschnitt M dieser Ebene mit den beiden Spiegelebenen den Kreis mit dem Radius MB, so müssen auf diesem die Bilder von B sein. Sind A und A' die Punkte, in denen der Kreis die Spiegel S und S' trifft, C und C' die Gegenpunkte von A und A' auf diesem Kreise, so muss ein durch wiederholte Reflexionen erhaltenes Bild B_k zwischen

nd C' sein, wenn es das letzte sein soll. Geometrische Be-**htungen** führen dann den Herrn Verfasser zu folgender Regel: **nn** zwei Spiegel sich unter dem Winkel α schneiden, und **nn** dieser Winkel durch den leuchtenden Punkt in die beiden **le** φ und φ' zerlegt wird, so findet man die Zahl der ent-**henden** Bilder auf folgende Weise. Man dividire das Supple-**nt** von φ durch α. Geht die Division auf, so merke man sich **n** Quotienten; geht sie nicht auf, die nächst höhere ganze **hl**. Darauf verfahre man ebenso mit φ'. Die Summe der **den** gemerkten Zahlen ist immer die Zahl der Bilder. Zu **chten** ist noch, dass in einigen Fällen die beiden zwischen **nd** C' fallenden letzten Bilder sich decken. Mz.

Nowosielski. Einige Eigenschaften des Systems zweier oder mehrerer Kreise. Jahresbericht des Gymnasiums in Sambor (Galizien). Polnisch.

Dn.

R. Nehls. Ueber graphische Rectification von Kreisbögen und verwandte Aufgaben. Hamburg, Jenichen.

Von den vier Grössen: Kreisbogen, Sehne, Centriwinkel und **adius** sind zwei gegeben; die beiden andern durch Construction **u** finden. Das Rectificationsmittel besteht in der Summirung **ner** Reihe kleiner Sehnen, die Abschätzung des Fehlers geschieht **rch** die Arcusreihe. Einige andere Curven werden in Betracht **ezogen**. H.

Weitere Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis von J. Hammond, B. Easton, Curtis, W. S. McCay, G. Eastwood, E. Rutter finden sich Ed. Times XXXVII. 50, 95-96, 96.

Wn.

J. Hoüel. Remarques sur l'enseignement de la trigonométrie. Bord. Mém. (2) V. 197-209.

Siehe F. d. M. VII. (1875) p. 322. O.

F. Bendt. Ebene und sphärische Trigonometrie. Leipzig. J. J. Weber.

In der Form von Fragen und Antworten wird der elementare Cursus der ebenen und sphärischen Trigonometrie behandelt. Auch sind bei der ebenen Trigonometrie Aufgaben beigefügt, welche den praktischen Nutzen dieser Disciplin darthun. Im Anhang sind die wichtigsten hierher gehörenden Formeln zusammengestellt. Die Darstellung ist sehr leicht verständlich, der Druck übersichtlich und gut. Mz.

G. Reidt. Die trigonometrische Analysis planimetrischer Constructionsaufgaben. Leipzig. Teubner.

Der Herr Verfasser erklärt selbst im Vorwort, dass die vorliegende Schrift sich die Aufgabe stellt, ein ausgedehnteres Material auf dem im Titel angegebenen Gebiet zu liefern, als man gewöhnlich findet, und zwar soll dieses Material nach den Arten der Behandlung geordnet sein. Der Inhalt ist dem entsprechend. Zuerst wird die Methode erklärt, und es werden Strecken mittels gegebener Winkel gesucht, dann folgt die Analysis mit Hülfe unbekannter Winkel; hierauf Aufgaben mit zusammengesetzten Winkeln; dann Construction von Winkeln durch schiefwinklige Dreiecke und endlich Construction von Winkeln aus unentwickelten Gleichungen. Ausser vereinzelten Andeutungen und durch Beifügung der resultirenden Gleichungen gegebenen Fingerzeige sind keine näheren Angaben über die Auflösungen beigegeben. Nach Ansicht des Referenten ist dies jedenfalls ein sehr nützliches Buch für die oberste Klasse höherer Unterrichtsanstalten. Mz.

J. Hübner. Ueber eine neue Ableitung der Formeln für $\frac{\sin}{\cos}(\alpha+\beta)$. Cas. XI. 214-215. (Böhmisch).

Unter Zugrundelegung des bekannten Satzes von Ptolemäus, s Viereck betreffend, wird die Ableitung der fraglichen Forln kurz ausgeführt. Std.

---

oTT, J. O'Regan. Solutions of a question (6696). Ed. Times XXXVI. 53.

Ist

$$m\sin(\vartheta+\varphi) = \cos(\vartheta-\varphi),$$

ist auch

$$\frac{1}{1-m\sin 2\vartheta} + \frac{1}{1-m\sin 2\varphi} = \frac{2}{1-m^2}.$$

Wn.

. Cayley. Note on the formulae of trigonometry. J. Hopkins Circ. 1882. 241.

Sind a, b, c die Seiten eines ebenen Dreiecks, und A, B, C eren bez. Gegenwinkel, so ist bekanntlich

$$a = c\cos B + b\cos C, \text{ u. s. w.}$$

ier kann man nun

$$\cos A+i\sin A = \frac{x}{w},\quad \cos B+i\sin A = \frac{y}{w},\quad \cos C+i\sin C = \frac{z}{w}$$

etzen, woraus

$$2\cos A = \frac{x}{w}+\frac{w}{x}, \text{ etc.}$$

olgt, und dann erhält man

$$-2ayzw + by(z^2+w^2) + cz(y^2+w^2) = 0$$

d zwei ähnliche Gleichungen. Eine analoge Betrachtung wird r das sphärische Dreieck angestellt. Mz.

Weill. Sur un triangle dont les côtés sont exprim par des nombres entiers, premiers entre eux et da lequel le rapport de deux angles est un nombre enti S. M. F. Bull. X. 55-59.

Ist *ABC* ein Dreieck, in welchem der Winkel *B* das (n+ fache des Winkels bei *A* ist, so ziehe man *BD* so, dass Win *DBA* dem Winkel bei *A* gleich wird, und hierauf *DE* para zu *AB*; dann ist *BDE* ein Dreieck, in welchem der Winkel *D* gleich dem n-fachen des Winkels *EDB* ist. Wenn nun a_n, b_n die Seiten dieses letzteren Dreiecks, ferner a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} des erstern sind, so zeigt sich, dass

$$a_{n+1} = \frac{a_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{c_n^2-a_n^2}; \quad b_{n+1} = \frac{c_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{c_n^2-a_n^2};$$
$$c_{n+1} = \frac{b_n(b_n^2+c_n^2-a_n^2)}{b_n^2}.$$

Von diesen Formeln geht nun der Verfasser aus, um ganze Zal für die Seiten der in Rede stehenden Dreiecke zu finden. Zah theoretische Betrachtungen und die Benutzung der Gleichung

$$\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = 2^{n-1}\cos^{n-1}\varphi - 2^{n-3}.\frac{n-2}{1}\cdot\cos^{n-3}\varphi + \cdots$$

führen dann zu der Lösung

$$a_n = q^n, \quad b_n = c_{n-1}q,$$
$$c_n = p^n - \frac{n-1}{1}p^{n-2}q^2 + \frac{(n-2)\,(n-3)}{1.2}p^{n+4}q^4 + \cdots,$$

wo p und q zwei ganze Zahlen sind, die keinen gemeinsa Teiler haben. Die Reihe beginnt mit

$$a_1 = q, \quad b_1 = q, \quad c_1 = p.$$

Hierauf wird noch von solchen Dreiecken gesprochen, bei wel die Seiten durch auf einander folgende Zahlen gemessen wer Soll z. B. der eine Winkel das Doppelte eines andern im Dre sein, so ist bei consecutiven Zahlen 4, 5, 6 die einzige Lösun

Mz.

L. A. Kittudge, J. O'Regan. Solutions of a ques (5951). Ed. Times XXXVII. 39-40.

Sind A, B, C die Winkel eines Dreiecks, und ist

$$\alpha = \frac{\sin 2B + \sin 2C}{2\cos 2A - 1},$$

ährend β und γ eine analoge Bedeutung haben, so ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 4\alpha\beta\gamma.$$

Wn.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Trigonometrie von E. W. Symons, T. R. Terry, J. W. Russell, H. L. Orchard, D. Edwardes, A. Cohen, R. Knowles, Curtis finden sich Ed. Times XXXVI. 120, 122-123; XXXVII. 28-29, 113-114. Wn.

---

v. Schäwen. Analogien zwischen dem sphärischen und dem ebenen Dreieck. Zeitschr. f. d. Realschulw. 394-401, 469-478.

Die Anzahl derjenigen Sätze aus beiden Trigonometrien, welche nicht nur dem Sinne, sondern auch dem äusseren Ansehen nach sich gegenseitig entsprechen, ist weit grösser, als man gemeiniglich annimmt, und man darf deshalb dem Verfasser Dank wissen, dass er uns mit der hier vorliegenden, umfangreichen Zusammenstellung beschenkt hat. Alle Relationen, deren Richtigkeit erst durch eine eigentliche Rechnung hätte erwiesen werden müssen, sind ausgeschlossen worden; so z. B. die Cosinussätze, denn obwohl für den Radius ∞ zwischen den Gleichungen

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \quad \text{und} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

keinerlei Unterschied besteht, so leuchtet doch die Analogie nicht von vorne herein ein. Mit grosser Geschicklichkeit hat deshalb der Verfasser die einzelnen Ausdrücke so umgeformt, dass in ihnen einzig und allein Sinus und Tangenten vorkommen; ersetzt man darin $\sin a$ und $\tan a$ resp. durch den Bogen oder die Sehne a, so kann man jeder Formel der Raumtrigonometrie sofort die entsprechende der ebenen Trigonometrie dualistisch zur Seite

stellen. Für die Berührungskreise des rechtwinkligen I gilt z. B. folgendes Schema:

$$\operatorname{tang}\varrho_c = \sin\frac{1}{2}(\ a+b-c); \qquad \varrho_c = \frac{1}{2}(\ a+b-$$

$$\operatorname{tang}\varrho_b = \sin\frac{1}{2}(\ a-b+c); \qquad \varrho_b = \frac{1}{2}(\ a-b+$$

$$\operatorname{tang}\varrho_a = \sin\frac{1}{2}(-a+b+c); \qquad \varrho_a = \frac{1}{2}(-a+b+$$

$$\operatorname{tang}\varrho\ = \sin\frac{1}{2}(\ a+b+c); \qquad \varrho\ = \frac{1}{2}(\ a+b+$$

Viele der mitgeteilten Sätze sind früher schon von Meyer Gudermann, dem Berichterstatter u. a. angegeben worde aber sind auch, wenigstens in dieser Form, geistiges Ei des Autors. Namentlich gehört in diese Kategorie ein Betrachtung, welche zum Lexell'schen Theoreme führt. denke auch nicht, dass solche Vergleichungen etwa schab mässig durchgeführt werden könnten; es ist vielmehr dara achten, ob einem rechtwinkligen Dreieck beispielsweise das winklige Kugeldreieck oder jenes andere sphärische Dr zuzuordnen ist, in welchem die Summe zwier Winkel Dritten gleichkommt; für das erstgenannte Dreieck ist z. B. Analogon des Pythagoras nur mittelst der Hyperbelfunctio zu erhalten, bei dem anderen dagegen hat man di

$$\sin^2\frac{1}{2}c = \sin^2\frac{1}{2}a + \sin^2\frac{1}{2}b.$$

Gr.

P. v. Schäwen. Die seitenhalbirenden Tran des sphärischen Dreiecks. Schlömilch Z. XXVII. 1

Der Herr Verfasser giebt in dieser Arbeit einige S das sphärische Dreieck, in denen die seitenhalbirenden salen (Hauptkreisbogen) vorkommen, und welche ihre digen Analoga im ebenen Dreieck haben. Die Beweis sehr einfach durch trigonometrische Rechnung geführt.

A. Bemerkung zur sphärischen Trigonometrie.
XI. 212-214. (Böhmisch).

Berücksichtigung einer von Dostor in Grunert Arch. veröffentlichten Abhandlung werden Formeln für

$$\cos\frac{a}{2},\quad \sin\frac{a}{2},\quad \cot\frac{a}{2}$$

elt, welche in der Praxis bequemer anzuwenden sind. net nämlich α, β, γ sphärische Winkel, a, b, c sphärische und setzt man

$$\sigma = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - 90^\circ,$$

lt man

$$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{\sin(\beta-\sigma)\sin(\gamma-\sigma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{\sin\sigma\sin(\alpha-\sigma)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\cot^2\frac{a}{2} = \frac{\sin(\beta-\sigma)\sin(\gamma-\sigma)}{\sin\sigma\sin(\alpha-\sigma)}.$$

Std.

---

e Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der irischen Trigonometrie von W. H. H. HUDSON, TUCKER, CH. LADD, E. W. SYMONS, T. R. TERRY, IcMURPHY, B. EASTON, J. J. WALKER finden sich imes XXXVI. 44, 120; XXXVII. 82, 96.

Wn.

WALKER. Two constructions for drawing spheres ich four given spheres, and an associated theorem. (2) XII. 173-174.

Verfasser teilt zwei Lösungen der Aufgabe mit, eine a construiren, die vier gegebene Kugeln berührt. Er dann folgenden Satz: Wenn eine Kugel drei gegebene berührt, so besteht der Ort für ihren Mittelpunkt im Allen aus acht ebenen Kegelschnitten und der Ort des Be-

rührungspunktes mit einer der gegebenen Kugeln besteht aus vier kleinen Kreisen; die Ebenen aller zwölf Kreise gehen durch dieselbe Linie, nämlich durch die Radicalaxe der drei Kugeln.

Glr. (Wn.)

H. M. Jeffery. On theorems relating to the regular polyhedra, which are analogous to those of Dr. Matthew Stewart on the regular polygons. (Abstract.) Lond. R. S. Proc. XIII. 105-112.

Die beiden Hauptsätze, die hier bewiesen werden, sind folgende: A) Ein reguläres Polyeder mit n Ecken sei in einer Kugel vom Radius a beschrieben. Von den Ecken und vom Mittelpunkte seien die Lote $p_1, p_2, \dots, p_n$, p auf irgend eine Ebene gefällt (die ausserhalb des Polyeders liegt, wenn m ungrade ist), so gilt für die Summe der m^{ten} Potenzen der von den Ecken gefällten Lote der Satz

$$\Sigma(p_r)^m = \frac{n}{2(m+1)a}\{(p+a)^{m+1}-(p-a)^{m+1}\}.$$

Die Formel gilt für alle fünf regulären Polyeder, wenn $m=1, 2$ oder 3 ist; für Dodekaeder und Ikosaeder auch noch, wenn $m=4$ oder $m=5$, aber nicht weiter.

B) Unter denselben Beschränkungen für m gilt auch folgende Formel, worin v die Entfernung eines beliebigen Punktes vom Mittelpunkte, d_r die Entfernung desselben Punktes von einer der Ecken ist:

$$\Sigma(d_r)^{2m} = \frac{n}{2(m+n)av}\{(v+a)^{2m+2}-(v-a)^{2m+2}\}.$$

Cly. (Wn.)

C. Gusserow. Die Inhaltsermittelung der Körper aus ihren Projectionen. Pr. Berlin.

Nach einigen einleitenden Worten über die Unterrichtsmethode in der Stereometrie, die manches zu Beherzigende enthalte

nirt der Herr Verfasser einen Lehrgang, welcher die Inhalts-ittelung der Polyeder zum Gegenstande hat. Er geht dabei den wesentlichsten Eigenschaften der Körper aus, nämlich, sie allseitig umgrenzt und rücksichtlich ihres Inhalts von Anordnung ihrer Teile unabhängig sind. So wird für alle rper dieselbe Regel der Inhaltsermittelung entwickelt, und da-einerseits die Abstraction des Allgemeinen aus den wesent-ien Eigenschaften des Besondern, und andererseits das Sub-mmiren eines einzelnen Falles unter die allgemeine Regel in rzüglicher Weise geübt. Die allgemeine Inhaltsformel für ein lyeder ergiebt sich, wenn man dasselbe in beliebiger Richtung f eine Grundebene, die im Allgemeinen den Körper nicht neidet, parallel projicirt; dann ist unter jeder Fläche des rpers ein im Allgemeinen schief abgeschnittenes Prisma, und die ebraische Summme derselben (indem nämlich ein Teil dieser men positiv, der übrige negativ zu nehmen, wie die An-nung ergiebt) ist dem Inhalte des Körpers gleich. Aus ser Grundregel wird nun in einfacher und anschaulicher Weise e Inhaltsbestimmung einer Reihe mehr und weniger bekannter lyeder abgeleitet. Mz.

Hromádko. Berechnung des kubischen Inhalts eines chiefen Prismas ohne Anwendung der sphärischen rigonometrie. Cas. XI. 123-137. (Böhmisch).

Std.

C. Paraira. Over de figuur, welke ontstaat, wanneer nen op de sejden van een driehoek parallelogrammen beschrijft. Nieuw Arch. IX. 87-96.

C. Paraira. Een stereometrisch Analogon van het theorema van Pappus. Nieuw Arch. IX. 96-97.

Untersucht wird die Figur, welche entsteht, wenn man über en Seiten eines Dreiecks Parallelogramme beschreibt, über den

Verbindungsgeraden der Ecken wieder Parallelogramme und weiter.

In der zweiten Arbeit wird der folgende Satz bewiesen: „Construirt man über den Seitenflächen einer Pyramide beliebige Prismen, deren Oberflächen jedoch verlängert, sich in einem Punkte schneiden, so ist die Summe ihrer Inhalte immer gleich dem Inhalt eines Prismas, welches mit der Pyramide eine gemeinsame Grundfläche hat, und dessen Kanten gleich und parallel sind der Verbindungslinie der Spitze der Pyramide mit dem gemeinsamen Schnittpunkte der Oberflächen der Prismen."

G.

G. Dostor. Volumes et surfaces de deux corps de révolution. Hoppe Arch. LXVIII. 421-424.

Die erzeugenden ebenen Flächenstücke der zwei Rotationskörper sind begrenzt von einem verlängerten Kreisdurchmesser, einer Tangente und zwei respectiven Bogen des Kreises. Die in Hoppe Arch. LXVII. 254 (s. F. d. M. XIII. (1881) 154) gefundenen Ausdrücke für Volumen und Oberfläche werden auf anderem Wege hergeleitet, dann umgeformt. H.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben aus der Stereometrie von F. Morley, G. Turriff, E. W. Symons, A. L. Selby, E. Rutter, W. J. Sharp finden sich Ed. Times XXXVI. 101, 121-122; XXXVII. 51.

Wn.

Th. Liebisch. Geometrische Krystallographie. Leipzig. Engelmann. 1881.

Das vorliegende Werk ist eine zusammenfassende Darstellung der geometrischen Krystallographie unter sorgfältiger Berücksichtigung der Forschungen von Gauss, Möbius, Bravais, Sohncke, Gadolin, Smith etc., deren einheitliche Darlegung die bisherigen Lehrbücher der Krystallographie entbehrten.

Das erste Capitel enthält nach einleitenden Bemerkungen Definition des Krystalles und eine Reihe hierher gehöriger te über Polyeder, und schliesst mit der Auseinandersetzung fundamentalen Gesetzes der Zonen von Chr. S. Weiss. Im iten Capitel werden die für das Spätere wichtigen projectihen Beziehungen zwischen den Grundgebilden der Geometrie, ppelverhältnisse, harmonische Eigenschaften der vollständigen recke und Vierflache abgeleitet, und wird daran die Bezeichg der Flächen und Kanten durch Indices, d. h. gewisse Abnittsverhältnisse, behufs einfacher Darstellung der die besagten ystallelemente bestimmenden Doppelverhältnisse, geknüpft. Dann gt die Aufstellung der Kanten- und Flächengleichungen als nction der Indices. Das dritte Capitel enthält als einen Auss des Gesetzes der Zonen das Gesetz der rationalen Indices, ch dem alle in einem Krystallcomplexe möglichen Flächen aus gend vier Flächen oder Kanten, welche nicht zu dreien einem schel angehören, arithmetisch abgeleitet werden können. Es aber auch umgekehrt wahr (§ 3), dass alle Flächen mit rationalen dices, welche aus vier gegebenen linear-geometrisch ableitbar d, „im Zonenverbande stehen.“ Im vierten Capitel wird dann ter gefolgert, dass das Doppelverhältnis von je vier Flächen s Büschels im Krystallcomplexe stets eine rationale Zahl sein se. Das fünfte Capitel behandelt die Transformationen bei änderung der bestimmenden Elemente. Einleitend werden im sten Capitel einige Formeln der sphärischen Trigonometrie mmengestellt, und dieselben dann zur Ableitung von Winkeltionen zwischen Krystallkanten und Flächen benutzt. Hierschliesst der erste Abschnitt.

Der zweite Abschnitt kann kurz als eine dem krystallohischen Zwecke angepasste Axonometrie bezeichnet werden. letzten, zehnten Capitel, werden Krystallberechnungen als piele vorgenommen. Damit sind die vorbereitenden Unterungen erledigt, und es wird im dritten Capitel die Krystallohie im engern Sinne begonnen. Zunächst werden die tallographisch möglichen Arten von Symmetrieen, d. h. diegen, welche dem Gesetze der rationalen Indices genügen,

aufgezählt, und dann die sechs sich ergebenden Krystallsysteme einzeln untersucht. Ein besonderes Capitel wird den Zwillingsbildungen gewidmet. Den Schluss des Werkes bildet eine Zusammenstellung der Bezeichnungsmethoden, wie sie von den verschiedenen Autoren benutzt werden. Sehr anzuerkennen sind die sorgfältigen Literaturnachweise, welche zum Teil in kurzen historischen Uebersichten den einzelnen Capiteln angereiht werden.

Rg.

WEBSKY. Ueber eine Methode, den Normalenbogen, um welchen eine Krystallfläche von einer ihr sehr nahe liegenden Zone absteht, und ihre krystallographische Lage zu bestimmen. Berl. Ber. 1882. 967-979.

Mz.

Capitel 4.

Darstellende Geometrie.

G. VERONESE. Sulla geométria descrittiva a quattro dimensioni. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 981-1025.

Diese Arbeit bezweckt, die Eigenschaften des Raumes von vier Dimensionen durch centrische Projection auf einen Raum von drei Dimensionen der Anschauung nahe zu bringen. Die Methoden der Construction sind dieselben, welche in der gewöhnlichen Centralprojection verwendet werden. Die die Elemente des Raumes von vier Dimensionen bestimmenden Elemente des Bildraumes sind: Fluchtpunkt und Spurpunkt für eine Gerade; Fluchtlinie und Spurlinie für eine Ebene und endlich Fluchtebene für einen Raum von drei Dimensionen. Die zu lösenden Elementaraufgaben werden, wie sonst üblich, in projective und metrische eingeteilt und der Reihe nach gelöst. Zum Schlusse wird speciell die orthogonale Projection behandelt.

W. St.

Tilšer. Zur Einführung in die Anfangsgründe der larstellenden Geometrie. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 75-99, 23-586, 581-595, 641-661; Cas. XI. 59. (Böhmisch).

Diese Aufsätze enthalten nicht sowohl eine Methodik der sriptiven Geometrie, als vielmehr allgemeine Reflexionen zur losophie der Wissenschaft überhaupt, ganz im Sinne der beinten „Ikonognosie" des Verfassers. Dem eigentlichen Gegenide näher tritt erst die letzte Abteilung, welche die Verwenig verschieden geformter Buchstabensymbole zur Bezeichnung verschiedenen Bestandtheile eines Raumgebildes erörtert und mpfiehlt. Gr.

Mannheim. Premiers éléments de la géométrie descriptive. Nouv. Ann. (3) I. 385-401, 433-450.

Bekanntlich wird die geometrische Natur eines Körpers durch undriss und Aufriss zur Darstellung gebracht. Beide Projecnen pflegen durch Zeichnung in einer Ebene entworfen und r Durchschnitt der horizontalen und der verticalen Ebene durch ie Gerade (la ligne de terre) markirt zu werden; die Geraden, lche unter der Horizontalebene und hinter der Verticalebene laufen, werden alsdann dadurch von den anderen abgehoben, s sie in der Zeichnung punktirt werden. Herr Mannheim pfiehlt, den Durchschnitt beider Projectionsebenen willkürlich lassen und in der Zeichnung nicht als Gerade auszuwerfen, dieselbe wol für die Stellung des Körpers zu den Projectionsnen, aber nicht für seine eigene geometrische Natur von ang sei. Das Punktiren der Linien kommt dadurch in Weg; denn man kann den Körper stets in solcher Stellung zu Projectionsebenen denken, dass alle seine Teile über der izontalebene und vor der Verticalebene gelegen sind. Einige spiele zeigen die Zweckmässigkeit, in dieser Form die Elente der descriptiven Geometrie zu behandeln.

Schn.

A. Schmidt. Elemente der darstellenden Geometrie. Die orthogonale Projection. Nebst eingeheftetem Atlas von acht Tafeln mit 108 Figuren. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

In dem vorliegenden Buche hat der Verfasser die Methode der darstellenden Geometrie dargelegt, die er seit vielen Jahren mit Erfolg am Wiesbadener Realgymnasium zur Anwendung gebracht hat. Demgemäss ist der Text, dem mündlichen Vortrag sich anschliessend, ziemlich breit; 229 Seiten gr. 8 sind für den Gegenstand wol etwas reichlich, zumal da keine Schattenconstruction aufgenommen ist. Diese und die Elemente der Perspective sollen übrigens einen zweiten Teil bilden. Die Tafeln, wie überhaupt die Ausstattung sind musterhaft.

Rg.

J. Menger. Geometrische Formenlehre in Verbindung mit dem Freihandzeichnen. Für die erste Klasse der Realschulen. Mit 44 Holzschnitten. Unter Mitwirkung des Prof. A. Anděl herausgegeben. Wien. A. Hölder.

J. Menger. Lehrbuch der darstellenden Geometrie für Ober-Realschulen. Wien. A. Hölder.

F. Smolik. Elemente der darstellenden Geometrie. Prag. Tempsky.

Alle drei Bücher behandeln den Lehrstoff im Sinne des von der Oesterreichischen Regierung bezüglich des Unterrichts in der darstellenden Geometrie ergangenen Erlasses. Sie reihen sich den besseren Lehrbüchern an und dürften auch in nicht-österreichischen Schulen Verwendung finden. (Vergl. die Recension des Referenten in Schlömilch Z. XXVII. p. 142 f.).

Rg.

. H. Behse. Die darstellende Geometrie für Real-, Gewerbe- und Werkmeisterschulen, sowie zum Selbstunterricht für Bautechniker und Mechaniker. I. Teil. Die Projectionslehre. Construction der Durchschnittsfiguren. Windschiefe Flächen. Spirallinien und Spiralflächen. Vierte gänzlich umgearbeitete Aufl. Leipzig. G. Knapp. (E. Nowák).

Die wiederholten Auflagen des Buches dürften dessen Brauchbarkeit hinlänglich beweisen. Der Text ist leicht fasslich, die guren sind im Allgemeinen für den Zweck ausreichend. In r 163, einer Abwickelung eines Cylinders, möchte bei einer eren Auflage eine Aenderung angebracht werden, welche die genten in den Endpunkten der Abwickelungscurve gleiche Winkel t der Horizontalen einschliessen lässt. Ebenso genügt die Zeichng der scharfgängigen Schraube (Fig. 195) für ein Lehrbuch der rstellenden Geometrie nicht. Rg.

A. V. Peschka. Darstellende und projective Geometrie. Mit einem Atlas. Wien. Carl Gerold's Sohn.

Von diesem gross angelegten Werke ist bis jetzt der erste nd „Methodik“ erschienen. Referent hat bereits in Schlömilch Z. XVIII. eine ausführliche Recension veröffentlicht, auf welche r verwiesen werden möge.

Die folgenden Capitelüberschriften mögen den Inhalt charakisiren.

Erster Abschnitt. Centralprojection.

I. Capitel. Darstellung des Punktes, der Geraden und der ene.

II. Capitel. Projectivische Beziehungen zwischen Punkt, Gele und Ebene.

III. Capitel. Metrische Eigenschaften (Beziehungen).

IV. Capitel. Projectivische Geometrie.

Zweiter Abschnitt. Klinographische oder schiefe Projection.

V. Capitel. Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen.

VI. Capitel. Metrische Beziehungen in parallel-projecti Darstellung.

VII. Capitel. Affinität. Parallelprojection (affine Gebil Kreises und der Kegelschnitte. Aufgaben.

Dritter Abschnitt. Darstellungsmethoden vermittelst zw Projectionsebenen.

VIII. Capitel. Monge's Orthogonalprojection.

IX. Capitel. Methode der schiefen Projection mittelst auf einander senkrechter Projectionsebenen.

X. Capitel. Orthographische Parallelperspective.

XI. Capitel. Axonometrie.

Vierter Abschnitt. Allgemeines über die Lagenveränder räumlicher Gebilde.

XII. Capitel. Transformation der Projectionen.

XIII. Capitel. A. Transformation der Projectionen in traler Projection.

B. Transformation der Objecte.

C. Transformation der Bildebene.

XIV. Capitel. Transformation in schiefer Projection.

XV. Capitel. Transformation in orthogonaler Projectio

Fünfter Abschnitt.

XVI. Capitel. Die Parallelogramm-Projection. (Die G werden auf zwei Projectionsebenen durch Strahlen projicirt, w den Ebenen selbst parallel sind.)

XVII. Capitel. Collineation der Räume. Reliefperspect

XVIII. Capitel. Centrale Projection mit Zuhülfenahme Grundebene.

Sechster Abschnitt. Gebilde, welche aus einer endlichen A ebener Flächenstücke zusammengesetzt sind.

XIX. Capitel. Das körperliche Dreieck oder das Dreik

XX., XXI., XXII. Capitel. Darstellung der Polyeder, und gegenseitige Schnitte derselben. Rg

---

G. A. V. Peschka. Kotirte Projectionsmethode (k Ebenen) und deren Anwendung. Zweite Aufl. Brünn. B

ɪNN. Handbuch der Linearperspective. Stuttgart.
ɪ.

ɪA. Leitfaden für den Unterricht in der dar-
den Geometrie. Wien. Seidel u. Sohn.

ER. Die Centralprojection als Hülfsconstruction
rthogonalprojection. Wien. Braumüller.

ɪRI. Applicazioni della geometria descrittiva.
. La Teoria delle ombre e del chiaro-scuro ad
elle università, delle Scuole d'applicazione per
gegneri etc. Fascicolo I., Fascicolo II. ed ultimo.
Camilla e Bertolero.

r das vorliegende umfangreiche Werk ist bereits eine
he Recension von Herrn Wiener in Schlömilch Z. (XXII.
er die erste Lieferung und ibid. XXVI. p. 134 über die
eferung) erschienen. Der Inhalt der einzelnen Capitel
lgende:

Erster Teil.

el I. Allgemeines.
el II. Schatten von Punkten.
el III. Schatten von Geraden.
el IV. Schatten von Polygonen und Curven.
el V. Schatten der Polyeder.
el VI. Schatten der krummen Flächen im Allgemeinen.
el VII. Schatten der Developpabeln.
el VIII. Schatten der Kugel und des Ellipsoids.
el IX. Schatten der Umdrehungskörper.
el X. Schatten der Schraubenflächen (und Schrauben-
hen).
el XI. Schatten der windschiefen Flächen.

Zweiter Teil. Vom Helldunkel.

el I. Allgemeines.
el II. Tonskala und Anleitung zum Tuschen.
el III. Helldunkel bei Polyedern.

projection vor den anderen den Vorzug, allgemeiner derjenig Methode, die sich nur einer Projectionsebene bedient. Nunme wendet sich der Herr Verfasser zum Hauptgegenstande, zu d Frage, wie sich von der Centralprojection aus die Abbildung dur reciproke Radien und damit die ganze, von dieser Abbildung beherrschte Geometrie der Kreis- und Kugelsysteme behand lasse. Die Antwort lautet „mittelst der Cyklographie", d. h. m telst der Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise ein festen Ebene, indem jedem Raumpunkte der Distanzkreis d Orthogonalprojection (des Punktes auf die Ebene) zugeordn wird. Der Herr Verfasser giebt ein Selbstreferat über sein unt dem Namen der „Cyklographie" neuerdings erschienenes Buc Da über letzteres in diesem Jahrbuch im folgenden Capitel referir ist, so möge nur einiges Wenige hier hervorgehoben werden Einer Geraden im Raume entspricht ein System von Kreisen mit einerlei Centrale und gemeinsamem Aehnlichkeitspunkt; da räumliche Bild aller Kreise der festen Ebene durch einen, resp zwei Punkte ist ein zur Ebene orthogonal-symmetrischer Kegel resp. eine solche gleichseitige Hyperbel. Das Bild der Kreis mit demselben Orthogonalkreis ist ein gleichseitiges zur Eben symmetrisches Rotationshyperboloid etc. Die Durchdringung curven der hier auftretenden Flächen sind nur Gerade und Kege schnitte. Letztere treten hier einmal als Orte der Centra v sich nach gewissen, sehr mannigfaltigen Bedingungen bewegt den Kreisen auf, andererseits als Centralprojection des Kreis was zu ihren projectivischen Eigenschaften führt.

Zu der Methode der reciproken Radien (Inversion) gela man hierbei so. Zwei Kreise der festen Ebene bestimmen Kreisbüschel, dessen Bild eine gleichseitige Hyperbel ist. D Durchstosspunkt der Hyperbelaxe und der Centrale des Kr büschels liefert durch die entsprechende Hyperbelordinate einen der beiden Potenzkreise der gegebenen: in Bezug auf Potenzkreis als Directrix sind dann die beiden gegebenen Kr Bilder in der Inversion. Durch Drehung der Kreise in der Eb um ihre Durchmesser gelangt man zur räumlichen Inversion, gekehrt beim Rückgang auf eine Dimension zur Involution.

ichnendste Anwendung der Cyklographie dient die vom Herrn fasser noch vielfach erweiterte Figur des Feuerbach'schen ises.

Als Anhang treten noch zwei Ergänzungen zum Vorigen auf: al wird der Dualität in der Cyklographie ihre wichtige Stelle wiesen, sodann die Möglichkeit der Ausdehnung der ganzen achtungen auf den Raum von vier Dimensionen mitgeteilt, i Gebiet, auf dem schon Herr Veronese mit Erfolg vorgeschrit- t war. My.

HAUCK. Perspectivische Studien. (Nachtrag zu dem ufsatze: „Ueber die Grundprincipien der Linear- erspective" in Schlömilch Z. XXVI. 273). Schlömilch Z. XVII. 236-248.

Die vorliegende Arbeit (s. auch F. d. M. XIII. (1881) 457) llt in vier Paragraphen:

I. Die Abbildung von krummflächigen Objecten.

II. Die conform perspectivische Abbildung.

III. De la Gournerie's Restitutionstheorie.

IV. Kritik der Restitutionstheorie.

In den beiden ersten Paragraphen vertritt der Verfasser in ereinstimmung mit de la Gournerie (Traité de Perspective aire, livre V.: Théorie des effets de perspective) die Ansicht, die perspectivische Darstellung krummflächiger Objecte eine ndere Behandlung verlange, indem hier, nicht wie bei Ober- ien mit geraden Kanten das Collineationsprincip, sondern das Conformität dominire. Den Beweis für die Richtigkeit dieser cht findet der Verfasser in der Uebereinstimmung mit der stpraxis und der Unmöglichkeit der nach den strengen Regeln Linearperspective erhaltenen Bilder.

Letztere Wissenschaft bleibt aber auch die Erklärung dafür ldig, dass anerkannt gute Bilder auch von einem falschen, Augenpunkte nicht einmal nahe gelegenen Punkte factisch guten Eindruck machen. Schon de la Gournerie suchte Frage zu beantworten, welches räumliche System in diesem

Falle, von allen möglichen, der Beobachter als das beste in seiner Vorstellung restituire. (Siehe insbesondere Capitel I. und II.). Er war ihm bekannt, dass alle räumlichen Systeme, welche unter Voraussetzung eines oder verschiedener Augenpunkte einem und demselben Bilde angehören, unter sich collinear sind, und er gelangte zu dem Resultate, dass von allen diesen Systemen dasjenige restituirt werde, in dem horizontale Ebenen ebenfalls horizontalen Ebenen des Originals zukämen. Die ausführliche Darlegung dieser Dinge bildet den Inhalt des dritten Paragraphen. Der Verfasser selbst gelangt jedoch im vierten zu einem wesentlich anderen Ergebnis. Herr Wiener hatte in einer Privatcorrespondenz mit dem Herrn Verfasser darauf aufmerksam gemacht, dass für eine Stellung des Auges unterhalb der Abbildung des hintern Randes der begrenzten Bodenfläche die Restitution der Bodenfläche durch das Unendliche hindurch gehen und hinter dem Rücken des Beobachters endigen würde, vorausgesetzt, dass de la Gournerie's Ansicht die richtige sei, was allerdings evident ist. Herr Wiener nimmt daher an, dass die vom Auge ausgeführte Restitution ein dem Original affines System sei, und zwar dasjenige, dessen Affinitätsrichtung die Verbindungslinie des falschen Standpunktes mit dem richtigen sei. Obgleich der Verfasser anerkennt, dass hierdurch viel gebessert sei, kann er sich zu dieser Annahme doch nicht bequemen, da Neigungswinkel von 30—45 Grad für ursprünglich horizontale Ebenen, bei der in unseren Zimmern üblichen Aufhängung der Bilder, nichts Seltenes sein würde. Seine Ansicht geht nun dahin, dass sehr wohl auch vom excentrischen Standpunkte das wirkliche Object restituirt werden könne, indem die Restitution entgegen der de la Gournerie'schen Annahme nicht durch Vermittelung einer sinnlichen Illusion vor sich geht, sondern vielmehr durch eine Handlung des Verstandes, die Bilder in unserer Vorstellung sich so verkörpern, wie wir erfahrungsgemäss die Gegenstände in der Wirklichkeit anzutreffen gewohnt sind.

Rg.

ꞮEUSCHLE. Die Deckelemente. Stuttgart. Metzler.

n Orthogonalprojection fallen für einen Deckpunkt und eine gerade die Projectionen, für eine Deckebene die Spuren zuıen. Eine Gerade, deren Spuren vereinigt liegen, nennt 'erfasser symptotische Gerade. Deckpunkte und Deckgerade n hiernach in der Halbirungsebene des zweiten (oder vierten) ıranten, der „zweiten Medianebene", Deckebenen und symıche Gerade stehen senkrecht zu jener Ebene. Der Verfasser des Weiteren aus, wie in gewisser Weise das Reciprocitätsip in der Orthogonalprojection zur Geltung komme, indem räumliche Reciprocität der Gebilde sich wiederspiegele in · ebenen Reciprocität der Spuren und Projectionen bei der ıe und dem Punkte, und ferner bei der Geraden und der .den als sich selbst dualistisch gegenüberstehender Gebilde. rent hat in einer in Schlömilch Z. (Bd. XXXVIII. p. 137) erınenen Recension, auf die hier verwiesen werden möge, einige ɜnken gegen die Begründung dieser Beziehungen geäussert. Schrift bietet viel Interessantes namentlich in der Benutzung der ‹elemente in der Centralprojection, so dass sie von jedem darstellenden Geometrie Nahestehenden Beachtung verdient.

Rg.

FIEDLER. Geometrische Mitteilungen. III. Das Proılem der Kegelquerschnitte in allgemeiner Form, nebst Bemerkungen zum Problem des Apollonius. Wolf Z. XIV. 190-204. 1879.

FIEDLER. Geometrische Mitteilungen. IV. Neue eleıentare Projectionsmethoden. Wolf Z. XXIV. 205-226. 1879.

FIEDLER. Geometrische Mitteilungen. V. Ein neuer 'eg zur Theorie der Kegelschnitte. Wolf Z. XXV. 217-256.

FIEDLER. Zusätzliche Bemerkungen zu „Geometrische itteilungen. V." Wolf Z. XXV. 403-409.

W. Fiedler. Vom Schneiden der Kreise unter stimmten reellen und nicht reellen Winkeln. V XXVI. 1-4.

Die Mitteilungen III. und IV., auf die wir in Ergänzun Referate F. d. M. XI. (1879) 438 u. 386 nochmals zurückkom hängen durch eine neue Art der Behandlung des Apolloni Problems zusammen, die auf der Durchdringung von Kegeln zw Grades beruht. Zunächst wird in III. in Centralprojection die struction eines ebenen Querschnitts einer Kegelfläche entwickel durch ihren Scheitel und eine ebene Leitcurve gegeben ist. [Construction liefert mittelst der beiden Systeme der converge und der parallelen Gegenaxen direct nicht blos die Bilder der endlichen Aeste, sondern auch die unendlichen Aeste des Bil Obschon dieses Problem elementar ist, so dürfte doch die Beh lung desselben in so vollständiger Weise neu sein und dabe Einfachheit Nichts zu wünschen übrig lassen. Die in ganz anal Weise mögliche Unterscheidung und Bestimmung der Bilder der endlichen Aeste oder der unendlichen Aeste des Bildes auch für Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen führt den Verf dann durch Specialisirung, indem namentlich die Durchdring curve zweier Kegel als in einen unendlich fernen und einen lichen Kegelschnitt zerfallend angesehen wird, zu der Gergo schen Lösung des erweiterten Apollonischen Problems, we in folgender Form auftritt: Gegeben sind drei parallele I zweiten Grades; gesucht wird die Bestimmung eines vi Kegels zweiten Grades, der jeden der drei Kegel einer Erzeugenden berührt, und dessen Spurkegelschnitt zu Spurkegelschnitten der drei Kegel ähnlich und ähnlich legen ist.

In Mitteilung IV. wird gezeigt, in wiefern in der Ce projection die Raumelemente durch das feste Centrum und zwei feste Ebenen, die Bildebene und die unendlich ferne E bestimmt werden. Hiervon ausgehend, gelangt Herr Fi dadurch zu einer neuen Projection, für welche er das Epit „elementar" rechtfertigt, dass er an Stelle der bei der gew

Centralprojection benutzten unendlich fernen Ebene irgend andere Ebene setzt, die die Bildebene in einer gegebenen len und unter einem gegebenen Winkel schneidet. Beiweise wird bei dieser Projection das Bild einer Geraden g olgende Weise bestimmt. Die Gerade g schneide die Bilde in S, die zweite Ebene in U. Das Bild von U in der bene, d. h. der Punkt, wo die Bildebene von der Verbinslinie von U mit dem Projectionscentrum C geschnitten , heisse U'. Dann ist SU' das Bild von g. Diese allzine Centralprojection ist einerseits durch ihre projective emeinheit von Wichtigheit, andererseits auch durch die neuen nen einer daraus entspringenden Orthogonalprojection. Von em neuen Standpunkte aus werden dann die Elemente der tellenden Geometrie mit Heranziehung geeigneter Beispiele ickelt. Weiterhin wird darauf aufmerksam gemacht, wie jedem beliebigen Punkte des Raumes einen Kreis der Bilde dadurch zuordnen kann, dass man von dem Punkte auf Bildebene das Lot fällt und um den Fusspunkt desselben mit Länge dieses Lotes den Kreis beschreibt. Diese Abbildung der kte des Raumes durch die Kreise der Bildebene führt sofort iner grossen Reihe interessanter Anwendungen auf Kreisbel und Kreisnetze, und namentlich auch zu der in der Mitng III. durchgeführten Fassung des Apollonischen Problems einer Kegeldurchdringung. Durch diese Momente können Mitteilungen III. und IV. als Vorläufer von des Verfassers serem, „Cyklographie“ betitelten, Werke, (vgl. das betreffende rat in Abschn. VIII. Cap. 5. A.) angesehen werden. Am Schluss Mitteilung IV. weist Herr Fiedler auf die erste grosse Gruppe Steiner'schen Arbeiten hin, da er damals noch glaubte, dass ner 1825 durch die eben erläuterte Abbildungsmethode zu seinen reichen Resultaten über die Geometrie der Kreise und Kugeln getsein müsse, und dass diese Entwickelungen in seinen gesammel- Werken an das Licht treten würden. Als Herr Fiedler aber erkte, dass dies nicht der Fall sei, zögerte er nicht länger, eine umfassende Durchführung seines Gedankens zu gehen . Referat zur „Cyklographie“), um endlich dem mathemati-

schen Publikum die Methoden ausführlich darzulegen, '
Spuren man schon seit seiner 1860 erschienenen Dissertati
allen seinen darstellend-geometrischen und projectiv-geometri
Publicationen verfolgen kann, und um zugleich die Fruchtba
dieser Methoden für alle Kreis- und Kugelaufgaben zu n
Zunächst setzte er jedoch in zwei kleineren Abhandlungen,
lich der dritten und vierten von den fünf oben dem Titel
zusammengestellten Mitteilungen, theoretisch und durch Beis
erschöpfend auseinander, wie die geometrische Theorie
Kegelschnitte und überhaupt die Grundlage der project
Geometrie auf das Natürlichste aus seiner Centralprojection
vorgehe.

Eine weitere Notiz, betitelt „Vom Schneiden der Kreise u.s.
zeigt, wie die in den Mitteilungen III. bis V. entwickelte Ab
dung der Punkte des Raumes durch die Kreise einer Eb
eine einfache und consequente Anschauungsform für das Sys
der Kreise giebt, die einen gegebenen Kreis unter vorgeschri
nem Winkel schneiden, und wie sich aus derselben Lin
und Zirkelconstructionen zur Lösung aller Winkelschnittprobl
leicht ableiten lassen. Scht.

W. Fiedler. Cyklographie oder Construction der A
gaben über Kreise und Kugeln, und elementare G
metrie der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig. Teub

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. A.

E. Lebon. Solution de la question de géométrie
scriptive proposée au concours d'agrégation de l'ensei
ment special en 1880. Nouv. Ann. (3) I. 269-274.

Es seien gegeben zwei verticale Ebenen, welche sich
einem beliebigen Winkel schneiden. Durch einen willkürli
Punkt ihrer Schnittlinie lege man eine Schaar von Ebenen, w
die beiden ersten in zwei zu einander senkrechten Geraden tr

bestimme die Enveloppe dieser Ebenen. Dieselbe ist ein
el zweiter Ordnung. Rg

PETZOLD. Constructive Lösung der Aufgabe: Eine Gerade zu bestimmen, die zwei durch ihre rechtwinkligen Projectionen gegebene windschiefe Gerade unter vorgeschriebenen Winkeln schneidet. Schlömilch Z. XXVII. 252-253.

Der Inhalt erscheint genügend durch den Titel charakterisirt.
Rg.

UDESDORF. Solution of a question (5527). Educ. Times XXXVI. 64-65.

Lösung der Aufgabe, die Seite desjenigen gleichseitigen ecks zu bestimmen, das durch orthogonale Projection eines ebenen Dreiecks entsteht, oder das ein gegebenes Dreieck orthogonalen Projection hat. Wn.

ROUCHÉ. Sur l'intersection de l'hyperboloïde de révolution et d'une droite. Nouv. Ann. (3) I. 97-99.

J. CARON. Sur l'intersection d'une surface de révolution du second ordre. Nouv. Ann. (3) I. 217-219.

LEBON. Sur l'intersection d'une droite et d'une surface de révolution du second ordre. Nouv. Ann. (3) I. 219-220.

Die erste Arbeit gab Veranlassung zu den beiden anderen. hrend Rouché den Satz beweist: „Wenn zwei einschalige Rotans-Hyperboloide H und H_1 ihre Kehlkreise S und S_1 in einer ene P haben, so ist die Projection ihres Durchschnitts auf eine P parallele Ebene ein Kreis", zeigen die beiden anderen toren, dass dieser Satz für irgend zwei Rotationsflächen eiter Ordnung mit gemeinschaftlichem Hauptkreise richtig bleibt.

Soll nun der Schnitt einer gegebenen Rotationsfläche mit einer Geraden bestimmt werden, so lege man durch diese eine zweite Rotationsfläche derart, wie sie im Satze verlangt wird, am besten einen Kegel (Lebon). Dann hat man in einer Projection die Schnittpunkte als Schnittpunkte des leicht zu bestimmenden Kreises mit der Projection der Geraden. Rg.

V. Jarolímek. Ueber die Projection der Durchdringungscurve zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung auf die Ebene der beiden Drehungaxen. (Mit 5 lithograph. Figuren). Cas. XI. 179-191. (Böhmisch).

Liegen die Axen O und U zweier Rotationsflächen zweiter Ordnung P und R in einer Ebene π, so projicirt sich die Durchdringungscurve der Flächen Σ orthogonal auf die Ebene π bekanntlich in einen Kegelschnitt Σ_1, welcher dem Kegelschnittbüschel angehört, das durch die Schnittcurven von π mit P und R gegeben ist. Die Abhandlung enthält nun die Untersuchung des Kegelschnitts Σ_1, insbesondere seine Classification und die Mittelpunkts- und Axen-Constructionen, wobei die Anwendung imaginärer Elemente von Interesse ist. Schneiden sich die Axen O und U, so ist Σ_1 nur dann eine Ellipse, wenn eine von den Flächen ein abgeplattetes Ellipsoid ist, die andere aber entweder ein eiförmiges Ellipsoid oder eine unendliche Rotationsfläche zweiter Ordnung; sonst ist Σ_1 immer eine Hyperbel, welche wohl auch in ein Linienpaar degeneriren kann. Im Falle $P \backsim R$ ist die Hyperbel Σ_1 gleichseitig; die elliptische Projection Σ_1 kann dagegen nie gleichseitig, d. h. kreisförmig werden. Zwei gleichartige Drehungs-Ellipsoide geben jedesmal eine hyperbolische Projection Σ_1. Σ_1 ist eine Parabel, wenn die Drehungsaxen O und U parallel sind; die Axe derselben ist senkrecht zu O. Der Kegelschnitt Σ_1 ist im Allgemeinen auch dann reell, wenn die ganze Durchdringungscurve Σ der Flächen imaginär ist; nur die elliptische Projection Σ_1 kann auch imaginär werden. Std.

GUIÈRE. Constructions géométriques de la tangente et du rayon de courbure des sections planes du tore. Nouv. Ann. (3) I. 561-566.

Die Ringfläche wird als Enveloppe von Kugeln constanten messers gedacht, deren Mittelpunkte auf einem Kreise liegen. die Kugeln sich bei der Parallelprojection immer als Kreise bilden, führt die obige Annahme zu Constructionen der geschten Elemente ohne Einführung von Hülfsebenen, welche Ringebene eine specielle Lage haben. Rg.

TESAŘ. Kinematische Bestimmung der Contour einer windschiefen Schraubenfläche. Wien. Ber. LXXXVI. 377-388.

Es handelt sich um die Bestimmung der Contour einer Orthoalprojection der bezeichneten Fläche auf eine Ebene, welche Schraubenaxe parallel ist. Der Verfasser bestimmt das Motancentrum C für eine Lage ab der Flächenerzeugenden; dann der Fusspunkt K der von C auf ab gefällten Senkrechten der uchte Berührungspunkt. Sowohl die Curve (K) als der Ort Momentancentra (C) werden analytisch untersucht. Letztere ve besitzt unendlich viele parallele Asymptoten senkrecht zur raubenaxe, deren Abstand von einander gleich der halben raubenhöhe ist.

Schliesslich wird darauf aufmerksam gemacht, dass sich Hülfe eines gefundenen Punktes K die Tangenten für alle der Fläche liegenden Schraubenlinien in den Punkten der zu gehörigen Erzeugenden ohne Weiteres angeben lassen.

Rg.

MÖLLINGER. Lehrbuch der wichtigsten Kartenprojectionen mit besonderer Berücksichtigung der stereographischen, Bonne'schen und Merkatorprojection. Für höhere Lehranstalten sowie zum Selbstunterrichte. Mit 50 in den Text gedruckten Figuren. Zürich. C. Schmidt.

ischen Praxis vorkommenden Projectionsmethoden. Hervor- ɪen ist ein hübscher Beweis für den Fundamentalsatz der : von der stereographischen Abbildung, dass sich zwei ɜn in der Copie unter dem nämlichen Winkel durchschneiden, m Originale selbst. Gr.

OFMANN. Ein elementar-geometrischer Satz als Bei- ɪg zur Theorie des stereographischen Projection. hlömilch Z. XVII. 383-384.

Durch Betrachtung von vier Punkten A, B, C, D, welche in einer e oder im Raume (aber auf einer Kugel) liegen können, t der Verfasser den Satz: „Hält man zwei Punkte A, B auf ɪ festen Kreise K_3, sowie einen ausserhalb K_3 beliebig ge- en Punkt C fest, legt dagegen durch einen auf der Peri- ɜ K_3 beweglichen Punkt D die Kreise K_1, welcher D mit B und C, K_2, welcher D mit A und C verbindet, so schliessen diese ver- lichen Kreise K_1, K_2 einen constanten Winkel ein." Mit dieses Satzes wird in sehr anschaulicher Weise die be- : Eigenschaft der stereographischen Projection nachgewiesen, edem Kreise auf der Kugel wieder ein Kreis im Bilde cht. Rg.

Capitel 5.

Neuere synthetische Geometrie.

A. Allgemeines.

NA. Elemente der projectivischen Geometrie. ɪ von Trautvetter. Stuttgart. Cotta.

Werk ist bis auf einige von dem Verfasser selbst Aenderungen eine Uebersetzung des italienischen Es soll dazu dienen, Anfänger auf einem anregenden Wege in die projective Geometrie einzuführen, und

ist in erster Linie für Studirende an technischen Hochschulen bestimmt, wo die graphischen Methoden der Berechnung immer grössere Wichtigkeit erlangen. Der Leser wird nun sogleich in die perspectiven Beziehungen, die Collineation und Reciprocität eingeführt, und dann erst geht der Verfasser auf die harmonischen Gebilde ein, welche mit Hülfe des vollständigen Vierecks definirt werden. Die Sätze über das Doppelverhältnis von vier Elementen eines Grundgebildes werden dann aufgestellt und hierdurch wird die Grundlage gewonnen, die allgemeine Projectivität von Grundgebilden der ersten Stufe zu definiren. Dieser Gang der Entwickelung ist vorzüglich geeignet, dem Studirenden sogleich die Schönheit und Fruchtbarkeit der synthetischen Geometrie vor Augen zu führen, ohne ihn erst durch lange einleitende Betrachtungen und Definitionen zu ermüden. Nachdem die besonderen Fälle der projectiven Beziehungen, wie Aehnlichkeit und Involution, besprochen worden sind, werden die projectiven Gebilde am Kreise studirt und dieselben nach dem Vorgange Steiner's durch Collineation auf die Kegelschnitte übertragen. Von besonderem Werte sind die vielen Constructionsaufgaben und die historischen Notizen. W. St.

M. Pasch. Vorlesungen über neuere Geometrie.
Leipzig. Teubner.

Nachdem F. Klein bewiesen hat, dass die projective Geometrie unabhängig ist von dem Parallelentheorem und die Einführung der Coordinaten in die Geometrie keine Massbestimmungen erheischt, hat eine systematische auf der unmittelbaren Anschauung beruhende Entwickelung der projectiven Geometrie in dem nicht-euklidischen Raume bisher nicht stattgefunden. Diese Lücken in der mathematischen Literatur hat der Verfasser mit grossem Erfolge ausgefüllt. Er erblickt in der Geometrie nichts weiter als einen Teil der Naturwissenschaft, und geht von beobachteten Thatsachen aus. Demgemäss wird eine gerade Linie oder eine Ebene nicht weiter erklärt oder definirt, sondern es werden die Grundeigenschaften dieser Gebilde, wie sie etwa de

bachtung entsprechen, in einer Reihe von Grundsätzen aus-
prochen. Mit Hülfe derselben werden dann auf dem Wege
nger Beweisführung die abgeleiteten Sätze oder Lehrsätze
unden. Nachdem zunächst von eigentlichen Punkten, Geraden
Ebenen gesprochen wurde, werden Strahlenbüschel, Ebenen-
chel und Strahlenbündel definirt; die Elemente dieser Gebilde
construirbar, ohne den Träger zu kennen, welcher überhaupt
t zu existiren braucht. Aus dem letzten Falle ergiebt sich
Definition der uneigentlichen Elemente, welche durch Mass-
mmungen unerreichbar sind, aber in der projectiven An-
uung dieselbe Bedeutung haben, wie die eigentlichen Elemente.
perspective Beziehung, die Reciprocität und die Congruenz
Figuren werden ausführlich erörtert. Letztere führt auf
„absolute Polarsystem“, von welchem die Massverhältnisse
ngen. Von besonderem Interesse ist die Herstellung des
ppelverhältnisses“ von vier Elementen eines einfachen Grund-
ldes; es wird zur Herleitung der projectiven Coordinaten
vendet. W. St.

WENCK. Die synthetische Geometrie der Ebene.
Leipzig-Heidelberg. C. F. Winter.

Das Buch ist für Anfänger bestimmt, welche sich diejenigen
ntnisse in der neueren oder synthetischen Geometrie aneignen
len, die sie haben müssen, um die darauf basirenden Vor-
ge in der höheren Mathematik, der darstellenden Geometrie
graphischen Statik mit Erfolg hören zu können. Diesen
eck erfüllt das Buch vollkommen. In dem ersten Abschnitt
den sehr ausführlich mit Benutzung der Doppelverhältnisse
grundlegenden Begriffe und Sätze über projective und invo-
rische Punktreihen und Strahlbüschel entwickelt. Der zweite
schnitt behandelt das vollständige Viereck und Vierseit, die
mit in Zusammenhang stehenden Involutionen, sowie die auf
Product von drei Strecken- oder drei Sinus-Verhältnissen
üglichen Dreieckstransversalen-Sätze. Der dritte Abschnitt ist
allgemeineren Verwandtschaften der Collineation, der Affini-

tät, der Aehnlichkeit und der Congruenz gewidmet. Eigen lich ist, dass der Verfasser in den nächsten vier Abschnitten Errungenschaften der vorhergehenden drei Abschnitte zun nur für den Kreis verwertet. Es werden also hier die harn schen und polaren Eigenschaften des Kreises, die aus jectiven Punktreihen oder Strahlbüscheln resultirenden Cons tionen des Kreises, die Sätze von Pascal und Brianchon, auch die Theorie der Chordalen und Aehnlichkeitspunkte endlich die Eigenschaften der dem Kreise collinear verwan Figuren entwickelt. Erst der letzte Abschnitt enthält die w tigsten Eigenschaften des allgemeinen Kegelschnitts, und wird der Kegelschnitt zuerst als collinear verwandte Figur Kreises und erst in zweiter Linie als Erzeugnis project Punktreihen und Strahlbüschel aufgefasst. Scht.

G. A. V. Peschka. Darstellende und projective Geomet Mit einem Atlas. Wien. C. Gerold's Sohn.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 4. p. 481.

W. Fiedler. Cyklographie oder Construction der A gaben über Kreise und Kugeln, und elementare G metrie der Kreis- und Kugelsysteme. Leipzig. Teub

Der alte Gedanke des Herrn Verfassers (vgl. das Refera den geometrischen Mitteilungen III. u. IV. p. 489 ff. dieses Ban dass alle Kreissätze und Kreisaufgaben, welche die Bedingu des Berührens oder des Schneidens unter gegebenem oder con tem Winkel mit gegebenen Geraden oder Kreisen enthalten, naturgemäss aus gewissen Grundanschauungen der darstelle Geometrie entwickeln lassen, und dass bei dieser Entwickelun elementare Hülfsmittel angewandt zu werden brauchen, ist in vorliegenden Buche klar und eingehend durchgeführt. Das eignet sich daher einerseits für den Lernenden, indem es ih bequemem, aussichtsreichem Pfade zu den reichen Schätzen

e uns Steiner, ohne uns den Weg zu ihnen zu verraten, hinter-
ssen hat, andererseits auch für den geschulten geometrischen
eoretiker, indem es ihm eine einheitliche, innerlich consequente
ethode zeigt, welche ihm die Resultate von Steiner über Kreis-
genschaften und Kreisaufgaben in neuem Lichte erscheinen
sst, und ihm zugleich die Ueberzeugung erweckt, dass man
it denselben Forschungsmitteln auch zu vielen verwandten Re-
ltaten muss gelangen können.

Die Methode des Verfassers beruht im Wesentlichen darauf,
ss er jedem Punkte A des Raumes denjenigen Kreis in einer
ene (der Bildebene) zuordnet, dessen Centrum der Fusspunkt
von dem Punkte A auf die Bildebene gefällten Lotes ist, und
sen Radius gleich der Länge dieses Lotes ist. Dadurch wer-
t umgekehrt jedem Kreise der Bildebene freilich nicht ein
nkt des Raumes, sondern zwei zu dieser Bildebene orthogonal-
ametrisch liegende Punkte des Raumes zugeordnet, die man
der Peripherie des Kreises durch Angabe des Drehungssinnes
erscheiden könnte. So entsprechen den Punkten einer Geraden
Raumes die sämmtlichen ∞^1 Kreise der Ebene, von denen je
ei den Schnittpunkt der Geraden mit der Bildebene zum äussern
er innern Aehnlichkeitspunkte haben (lineare Kreisreihe), ferner
 ∞^2 Punkten einer Ebene ∞^2 Kreise, von denen je zwei ihren
sern oder innern Aehnlichkeitspunkt auf der Schnittgeraden jener
ene mit der Bildebene besitzen (planares Kreissystem); und man
ennt sofort, dass vermöge dieser Abbildung der Satz, dass durch
ei Punkte im Raume eine Ebene gelegt werden kann, zu den
den Sätzen führt, welche aussprechen, dass von den sechs Aehn-
hkeitspunkten dreier Kreise die drei äussern, sowie immer zwei
nere und ein äusserer in gerader Linie liegen; und zwar er-
lt man den ersten dieser beiden Sätze aus dem Fall, dass die
ei Raumpunkte auf derselben Seite der Bildebene liegen, den
eiten Satz aus dem Fall, dass von den drei Raumpunkten nicht
le drei auf derselben Seite der Bildebene liegen. Ferner er-
nnt man sofort, dass die Gerade, in welcher die ein planares
eissystem erzeugende Ebene die Bildebene trifft, von allen ∞^2
eisen dieses Systems unter demselben Winkel geschnitten wird,

der reell oder imaginär ist, je nachdem der Neigungswinkel j
Ebene gegen die Bildebene grösser oder kleiner als 45 Grad
beträgt dieser Winkel 45 Grad, so wird jene Gerade von
Kreisen des Systems berührt. Umgekehrt füllen die Raumpu
welche die sämmtlichen, eine gegebene Gerade unter gegebe
Winkel ν schneidenden Kreise liefern, die beiden Ebenen
welche die Bildebene in der gegebenen Geraden unter ei
solchen Winkel α schneiden, dass $\operatorname{cotg}\alpha = \cos\nu$ ist. Hier
erscheinen also z. B. die Kreise, welche drei gegebene Ge
unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, als die Bilder
Schnittpunkte dreier Ebenenpaare. Fügen wir noch hinzu,
die Raumpunkte, welche den Kreisen entsprechen, die einen
gebenen Kreis unter gegebenem Winkel schneiden, ein gl
seitiges Rotationshyperboloid bilden, dessen Hauptebene
Bildebene parallel ist, so dürfte das Vorstehende genügen,
dem Leser dieses Referats eine Vorstellung von dem Zusam
hang zu geben, der zwischen der Fiedler'schen Abbildung
Raumpunkte durch die Kreise einer Ebene und den auf Be
rung und Winkelschnitt bezüglichen Kreisaufgaben besteht.
dürfte es die Grenzen eines Referats übersteigen, wenn hier
zugefügt werden sollte, auf welche Weise dieser Zusammen
in dem vorliegenden Buche auch planimetrisch-constructiv
gebeutet ist. Dagegen dürfte hier eine kurzgefasste In
angabe der in den einzelnen Abschnitten des Buches behan
Theorieen und Aufgaben am Platze sein.

Die Einleitung entwickelt die Elemente der Method
Centralprojection vom Standpunkte der darstellenden Geo
aus, um diese Methode dann, soweit es nötig ist, zur constr
den Verwertung des dem Buche zu Grunde liegenden Geda
anwenden zu können. Dieser Gedanke ist also der, dass,
so wie der Distanzkreis in der Centralprojection der Bildkr
Projectionscentrums ist, jeder Kreis in der Zeichnungsebene
kreis eines Punktes im Raume ist. In dieser Einleitung e
sich auch die einfachsten Sätze über Doppelverhältnisse,
nische Gruppen, centrische Collineation, Involution und
metrie.

er erste Abschnitt definirt die Bildkreise der Raumpunkte ie Bildkreis-Systeme der Curven und Flächen. Bei der htung der linearen Kreisreihe (siehe oben) ergeben sich f Aehnlichkeitsstrahlen, Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichken bezüglichen Sätze, sowie auch der Gedanke der Cononen mit Hülfe eines festen Kreises und des Lineals allein. der Einführung des planaren Kreissystems (siehe oben), ugleich alle Kreise darstellt, die eine gegebene Gerade vorgeschriebenem Winkel schneiden, behandelt der Ver- mehrere Kreisaufgaben, welche aus der Beziehung zweier chiefer Geraden zu den Punkten und Ebenen des Raumes rgehen. Das aus den Transversalen zu drei windschiefen len bestehende Hyperboloid führt dann zu den Kegelten, welche auch als Ort der Schnittpunkte entsprechender len in projectiven Büscheln erkannt werden. Den Schluss Abschnitts bilden die auf das planare Kreissystem bezüg- Elementaraufgaben, namentlich also die schon oben antete Aufgabe, die Kreise zu finden, welche drei Gerade vorgeschriebenen Winkeln schneiden.

)en Ausgangspunkt des zweiten Abschnitts bildet die Beung der Gesammtheit der zwei gegebene Punkte enthalten- Kreise, welche als die Bildkreise der Punkte einer gleichen Hyperbel auftreten. Weiterhin ergiebt sich die Theorie 'otenzlinien, Potenzpunkte und Potenzkreise, ferner die Abg durch reciproke Radien, und in engem Zusammenhang die centrische Collineation, beide für Ebene und Raum.

)er dritte Abschnitt zeigt, dass die Raumpunkte, deren Bild- zwei gegebene Kreise unter beliebigem, aber gleichem Winhneiden, wiederum ein gleichseitiges Hyperboloid bilden, dass Kreise sämmtlich zum äussern oder innern Potenzkreise der enen Kreise orthogonal sind, und dass alle Kreise, welche Kreise gleichwinklig schneiden, vier Büschel bilden, welche ehnlichkeitsaxen zu Potenzlinien haben. So gelangt der Ver- zu der Bestimmung aller acht Kreise, welche vier gegebene gleichwinklig schneiden. Der Fall, dass die vier gegebe- Kreise speciell die vier Berührungskreise eines Dreiseits

sind, führt zu den Eigenschaften des Feuerbach'schen Kreis An die Construction der zu vier Kreisen gleichwinkligen Kre schliesst sich die Lösung der allgemeinen Aufgabe, zu drei gebenen Paaren von Kreisen diejenigen zu bestimmen, wel die beiden Kreise jedes Paares gleichwinklig schneiden. Die dritte Abschnitt enthält ferner die Anwendung der centrisch Collineation und der Transformation durch reciproke Radien a Systeme von Kugeln, wobei sich die Aehnlichkeits- und Poten Eigenschaften von Kugeln, sowie die Bestimmung der Kugeln die andere gleichwinklig schneiden, leicht ergeben. Nach ein Ueberblick über die nunmehr ausführbaren Kreis- und Kugel aufgaben behandelt der Verfasser nach seiner Methode ausfüh lich das Apollonische Problem für Kreise und Kugeln, und ma erkennt, dass die bekannte symmetrische Lösung dem Geist dieser Methode nicht fern steht. Schliesslich ergiebt sich da auch die Construction der Kreise, welche drei gegebene Kreis unter vorgeschriebenen Winkeln schneiden, ganz analog der Con struction der acht Apollonischen Kreise.

Der vierte Abschnitt entwickelt die Theorie der Kegelschnitt und der Rotationsflächen zweiten Grades im Zusammenhange m der der Kreis- und Kugelsysteme. Hier finden wir erst d Lösung der Aufgabe, die Kugeln zu bestimmen, welche vier g gebene Kugeln gleichwinklig schneiden. Auch das System d einen Kegelschnitt doppelt berührenden Kreise tritt in dies Abschnitt auf.

Das Schlusscapitel ist der Geometrie der Kreise auf Kugel gewidmet. Um zu zeigen, wie die Ergebnisse der vorh gehenden Abschnitte sich auf die Kreise einer Kugeloberflä übertragen lassen, behandelt der Verfasser ganz ausführlich sphärische Uebertragung der Figur des Feuerbach'schen Sat und der sich daran anschliessenden Sätze.

Die in dem besprochenen Buche niedergelegte Methode ihre hauptsächlichsten Ergebnisse waren seit sehr langer Zei des Verfassers Besitz. Schon in seiner Dissertation (1860) durch die Einführung des Distanzkreises und der Transforma des Centrums in die Centralprojection der Grundgedanke

ches und die Behandlungsform desselben gegeben. Der Grund, um der Verfasser nicht früher mit einer solchen Durchführung es Gedankens hervortrat, war der, dass er bis zum Erscheinen ersten Bandes der Ausgabe von Steiner's Werken durch die iner Akademie annahm, es sei, ebenso wie zahlreiche Ergebe seiner Methode, auch die Methode selbst Steiner bekannt wesen. Erst, als durch das Erscheinen des ersten Bandes von iner's Werken und durch directe Mitteilungen der Herren ser, Schläfli und Weierstrass (Kiepert) constatirt war, dass im hlasse Steiner's keine Spuren dieser Methode zu finden waren, g Herr Fiedler an die Bearbeitung dieses Buches. Ausführ- wird in der Vorrede desselben motivirt, wie der Verfasser gedrungen zu der Ansicht gelangen musste, Steiner, der die m der Centralprojection in den Untersuchungen über Kreise l Kugeln fortwährend angewandt hat, Steiner, der ein nun schwundenes Buch über das Schneiden der Kreise in der ne, der Kugeln im Raume und der Kreise auf der Kugel fasst hat, Steiner, dessen Resultate auf diesem Gebiet sich mtlich naturgemäss aus der Fiedler'schen Methode ergeben, sse auch diese Methode besessen haben. Und wenn die Geotrie der Kreise und Kugeln von Steiner's bahnbrechender tersuchung an bis jetzt mit allen Mitteln der synthetischen und lytischen Geometrie weiter untersucht wurde, der darstellen- n Geometrie bis jetzt aber nur die schliessliche Durchführung r durch andere Methoden begründeten Constructionen zufiel, hat das Fiedler'sche Buch nunmehr auch der darstellen- n Geometrie ihren natürlichen Platz unter den Forschungsthoden in der Geometrie der Kreise und Kugeln erobert, inm dasselbe zeigt, dass sie zu allen bisher erlangten Hauptultaten führt und noch manches Neue hinzuzufügen vermag. rner sei hier hervorgehoben, dass die Fiedler'sche Methode in er Verbindung der elementaren Anschauungen vom Kreise d der gleichseitigen Hyperbel die natürliche Parallele zu der der neueren Analysis mehr hervortretenden Gleichbedeutung r cyklischen und hyperbolischen Functionen zeigt.

Was die Form der Darstellung in dem Buche anbetrifft, so

ist dieselbe durchaus elementar gehalten. Deshalb ist auch a
andere, so zu sagen nicht-perspective Abbildungsrelationen zwisch
den Kreisen der Ebene und den Punkten des Raumes, wie solch
in letzter Zeit mehrfach verwandt sind, nicht eingegangen. Eben
sind die Literatur-Angaben nur in der Einleitung gemacht. Da
Verständnis wird überall durch genaue Figuren unterstützt. Vo
ausgesetzt ist nicht mehr als die Elemente der Geometrie ei
schliesslich der Lehre von Pol und Polare beim Kreise. Es lieg
in der Natur der Methode, dass alle resultirenden Construction
auch die über Kegelschnitte, nur auf das Lineal- und Cirke
postulat basirt sind. Scht.

W. Fiedler. Zu den Elementen der Geometrie der Lag
Wolf Z. XXVI. 4-8.

Der Verfasser behandelt zwei in systematischer Beziehung wichtige Probleme der Geometrie der Lage. Das erste verlangt die Ueberführung der allgemeinen Strahlen- und Ebenen-Involutionen durch Schein- oder Schnittbildung in symmetrische Involutionen, d. h. solche, wo die Doppelelemente reell und rechtwinklig zu einander sind. Das zweite Problem, das namentlich wegen der Theorie der imaginären Elemente, wichtig ist, verlangt die Construction der Involution, welche mit einer gegebenen Vereinigung von zwei projectiven Gebilden erster Stufe die nämlichen Doppelelemente hat. Scht.

G. Battaglini. Sulla memoria del prof R. De Paoli Sui fondamenti della geometria projettiva. Rom. Acc (3) VI. 11.

W. St.

W. W. Johnson. New notation for anharmonic rati
Analyst IX. 185.

Um die sechs verschiedenen Werte des anharmonisch
Verhältnisses von vier Punkten in symmetrischer Weise aus

ken, wendet der Verfasser folgende symbolische Bezeich-
g an:

$$\begin{matrix} P & A \\ B & Q; \end{matrix}$$

dies Symbol bezeichnet das Doppelverhältnis

$$\frac{AP}{BP}:\frac{AQ}{BQ}=x.$$

gleichzeitige Vertauschung zweier Paare von Buchstaben des bols ändert den Wert des Doppelverhältnisses nicht: die tauschung der Buchstaben einer Diagonale ergiebt den reciken Wert $\frac{1}{x}$; die Vertauschung der Buchstaben einer Horitalreihe giebt den complementären Wert $1-x$, während man ch Vertauschung der Buchstaben einer Verticalreihe das conirte Verhältnis $\frac{x}{1-x}$ erhält. Eine cyklische Vertauschung lich von drei Buchstaben bringt, je nach der Richtung, in man auf dem Kreise fortgeht, die beiden übrigen Werte $\frac{x-1}{x}$ l $\frac{1}{1-x}$ hervor. Jn. (Wn.).

PASCH. Bemerkungen über projective Punktreihen. Schlömilch Z. XXVII. 124-125.

Enthält ein Criterium dafür, ob in zwei projectivischen Ge-len erster Stufe auf demselben Träger die Doppelelemente ll oder imaginär sind. Rg.

JEŘÁBEK. Construction von conjugirten und senk-echten Strahlen von projectivischen Büscheln. Čas. XI. 216. (Böhmisch).

SCHLÖMILCH. Zwei projective Sätze. Schlömilch Z. XXVII. 380-381.

A. SACHSE. Beweis der vorigen Sätze. Schlömilch Z. XXVII 381-383.

Wenn man jede der vier Seiten eines Vierseits mit einer in der Ebene desselben beliebig gelegenen Geraden zum Schnitt bringt, den erhaltenen Schnittpunkt immer mit einem und demselben Diagonalpunkte des Vierseits verbindet und den Punkt aufsucht, in welchem diese Verbindungslinie die Gegenseite des Vierseits schneidet, so erhält man auf den vier Seiten des Vierseits vier in gerader Linie liegende Punkte. Lässt man die beliebige Gerade die unendlich ferne Gerade des Raumes sein, so gelangt man zu einem specielleren Satze, den Herr Sachse gefunden und Herrn Schlömilch zur Veröffentlichung mitgeteilt hatte. Letzterer erkannte die Verallgemeinerung und die Uebertragbarkeit in den Raum, und teilte Herrn Sachse den folgenden Satz mit, der in der ersten der vorliegenden Abhandlungen mit seinem Correlat ausgesprochen ist. Wenn man ein ebenes Viereck *ABCD* von einem beliebigen Punkte des Raumes aus auf eine durch eine Diagonale *EF* dieses Vierecks gelegte beliebige Ebene projicirt, und die Projectionen der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* entsprechend mit *A'*, *B'*, *C'*, *D'* bezeichnet, so schneiden sich *AC'*, *A'C*, *BD'*, *B'D* in einem und demselben Punkte, vorausgesetzt, dass der Schnittpunkt von *AC* und *BD* der Diagonale *EF* im Diagonal-Dreieck gegenüberliegt. Der eben ausgesprochene Satz und sein duales Correlat, sowie der oben zuerst ausgesprochene Satz mit seiner dualen Uebertragung werden in der zweiten der vorliegenden Abhandlungen von Herrn Sachse mit Benutzung der Sätze von Ceva und Menelaos, also metrisch, bewiesen. Ein auf die Sätze der reinen Geometrie der Lage gestützter Beweis wäre wohl passender gewesen. Scht.

EM. WEYR. Ueber cyklische Projectivität. Cas. XI. 191-... 265-282 (Böhmisch).

Es wird zunächst die cyklische Projectivität mit *n*-elementigen Gruppen in den Grundgebilden erster Stufe betrachtet, und es werden die Untersuchungen auf Punktbeziehungen auf Kegel...

itten ausgedehnt. Unter Anderem wird die Frage beanttet, wie man zwei projectivische gerade Punktreihen mit der akteristischen Potenz k^2 auf einanderlegen muss, um eine lische Projectivität mit n-elementigen Gruppen zu erhalten. die Entfernung der beiden Gegenpunkte ergiebt sich die ichung $(p-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$U_p \equiv a^{p-1} + (p-2)a^{p-3}k^2 + f_{p,3}a^{p-5}k^4 + f_{p,4}a^{p-7}k^6 + \cdots = 0,$$

bei zu gelten hat

$$f_{p,r} = f_{p-1,r} + f_{p-2,r-1}.$$

Folge dessen ist

$$U_2 = a,$$
$$U_3 = a^2 + k^2,$$
$$U_4 = a^3 + 2ak^2,$$
$$U_5 = a^4 + 3a^2k^2 + k^4,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Zum Schlusse wird die cyklisch projectivische Lage ebener steme behandelt. Std.

SCHUBERT. Lösung des auf die trilineare Verwandtschaft ausgedehnten Projectivitätsproblems. Pr. Hamburg.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 5. D.

. STURM. Ueber die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften. Klein Ann. XIX. 461-487.

Reciproke oder correlative Verwandtschaft zweier Ebenen nnt man bekanntlich diejenige Verwandtschaft, bei welcher dem Punkte der einen Ebene eine Gerade in der andern Ebene tspricht, und den Punkten einer Geraden der einen Ebene die trahlen eines Strahlbüschels entsprechen. Quadratische Verandtschaft zweier Ebenen nennt man ferner, wie ebenso beannt ist, diejenige Verwandtschaft, bei welcher jedem Punkte er einen Ebene ein Punkt der andern Ebene entspricht, den unkten einer Geraden aber die Punkte eines Kegelschnitts entprechen. Beide Verwandtschaften brachte schon Herr Reye

(Schlömilch Z. XI. p. 280, ferner Geometrie der Lage, II. T II. Aufl. 16. Vortrag) dadurch in Zusammenhang, dass er zwisch den auf zwei Ebenen liegenden Punkten und Strahlen nicht ei sondern zwei reciproke Verwandtschaften bestehen liess, u dann jedem Punkte der einen Ebene den Schnittpunkt sei beiden Polaren in der andern Ebene zuordnete, d. h. derjenig beiden Strahlen, welche durch die beiden reciproken Verwan schaften dem angenommenen Punkte entsprechen. So erhält m nicht etwa eine collineare, sondern eine quadratische Verwan schaft, da den Punkten einer Geraden der einen Ebene zw Strahlbüschel entsprechen, welche durch die Schnittpunkte v je zwei demselben Punkte zugehörigen Strahlen einen Keg schnitt erzeugen. Wenn man ferner sieben Paare entspreche der Punkte in zwei quadratisch-verwandten Ebenen annim und dann jedes Paar als Paar conjugirter Punkte einer corre tiven Verwandtschaft auffasst, so erhält man, da eine Correlati zwischen zwei Ebenen von acht Constanten abhängt, z. B. dur acht Paare conjugirter Punkte eindeutig bestimmt ist, ∞^1 solc Correlationen; und je zwei dieser ∞^1 Correlationen sind Stande, eben dieselbe quadratische Verwandtschaft in der ob angegebenen Weise hervorzurufen, weil, wie Herr Reye und H Hirst bemerkt haben, alle ∞^1 Strahlen, die durch jene ∞^1 C relationen einem Punkte einer Ebene entsprechen, sich in ein einzigen Punkte schneiden, also ein Punkt existirt, der dem a genommenen Punkte in allen Correlationen conjugirt ist. Es scheint deshalb der Kegelschnitt, welcher in der erzeugten quadr tischen Verwandtschaft einer Geraden entspricht, einerseits als d Ort der ∞^1 Punkte, die in den ∞^1 erzeugenden Correlationen der G raden entsprechen, andererseits als der Ort der ∞^1 Punkte, die d einzelnen Punkten der Geraden in allen Correlationen conjugirt sin

Herr Sturm betrachtet nun den Fall, dass die beiden Ebene welche Träger von Correlationen sind, identisch seien. Sch Herr Seydewitz und Herr Schröter erkannten für eine einzel Correlation, welche auf zwei zusammenfallenden Träger liegt, dass dadurch zwei ausgezeichnete Kegelschnitte K und von der Beschaffenheit bestimmt werden, dass K der Ort d

:te ist, die mit ihren beiden Polaren incident sind, dass Γ allen diesen Polaren eingehüllt wird, und dass K und Γ sich elt berühren. Die Berührungspunkte mögen U und V heissen, dazu gehörigen Tangenten mögen mit u und v, ihr Schnitt-:t mit W, und endlich die Gerade UV mit w bezeichnet wer-

Dass nun alle Paare von Punkten, die auf den zusammen-nden Trägern zweimal einander conjugirt sind, eine quadra-e Inversion bilden, deren beide Fundamental-Dreiecke sich VW vereinigen, und deren Fundamentalcurve der Kegel-itt K ist, dass ferner auf jeder Linie, welche zwei doppelt ugirte Punkte verbindet, eine Involution von solchen doppelt ugirten Punkten liegt, und endlich, dass alle diese Linien ch W gehen, sind Resultate, welche von Herrn Reye und rn Schröter herrühren. Zu diesen Resultaten fügt Herr Sturm h hinzu, dass diese quadratische Inversion nicht blos aus einer relation, sondern aus einem einstufigen Systeme solcher Cor-tionen besteht, dass dieses System durch W und w als Pol Polare in doppelter Weise und durch drei Punkte von K sich selbst conjugirt definirt ist, dass ferner der Kegelschnitt für alle diese ∞^1 Correlationen derselbe ist, und dass end- der Kegelschnitt Γ zwar immer K in denselben beiden nkten berührt, sonst aber veränderlich ist. Weiterhin unter-ht Herr Sturm auch, welche Oerter die Kegelschnitte K und Γ, Punkte U, V, W, die Geraden u, v, w für alle diejenigen Correlationen bilden, die durch sieben Paare conjugirter kte bestimmt werden. Es ergiebt sich z. B., dass die Punkte eine Gerade bilden, die Strahlen w aber einen Kegelschnitt üllen. Namentlich werden auch die in dem Systeme vor-denen ausgearteten Correlationen, sowie die in den Systemen Kegelschnitte K und Γ liegenden Ausartungen discutirt.

Der quadratischen Verwandtschaft zwischen den Punkten ier Ebenen steht zur Seite eine ebensolche Verwandtschaft chen den auf ihnen liegenden Strahlen. Statt dieser Ver-dtschaft untersucht der Verfasser die dual entsprechende Ver-dtschaft zwischen den Strahlen zweier Bündel, die wiederum einem System von ∞^1 in den Bündeln liegenden Correlationen

in Zusammenhang gebracht wird. Hierbei geht Herr Sturm nament-lich auf den Ort der Schnittpunkte conjugirter Strahlen ein. Im Allgemeinen schneiden sich bei zwei Bündeln, zwischen deren Strahlen eine quadratische Verwandtschaft besteht, nur ∞^1 Paare und ihre Schnittpunkte bilden eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species, durch die alle Flächen zweiten Grades hindurch-gehen, welche von den ∞^1 mit der quadratischen Verwandtschaft in Zusammenhang stehenden Correlationen erzeugt werden. Wenn jedoch die quadratische Verwandtschaft derartig ist, dass sieben Strahlen des einen Bündels ihre conjugirten Strahlen schneiden, so thun es alle Strahlen, und die entstandenen ∞^2 Schnittpunkte bilden eine Fläche zweiten Grades. Herr Sturm bezieht dann auch zwei Ebenen collinear aufeinander, und zwar wieder in doppelter Weise. So gelangt er dadurch, dass er erstens einem Punkte der ersten Ebene die Verbindungslinie derjenigen beiden Punkte zuordnet, welche durch die beiden Collineationen dem angenommenen Punkte entsprechen, und dass er zweitens auch einem Strahle der ersten Ebene den Schnittpunkt der entsprechen-den Strahlen in der zweiten Ebene zuordnet, zu zwei verschiedenen quadratischen Punktstrahlverwandtschaften. Es wird dann, falls die beiden Ebenen identisch sind, das Erzeugnis der Punkte untersucht, welche auf ihren entsprechenden Geraden liegen, so-wie noch andere Curven, die durch eine solche Verwandtschaft hervorgerufen werden. Speciell wird auch noch das ebene Null-system zweiten Grades untersucht, d. h. diejenige Punktstrahl-verwandtschaft, bei welcher jeder Strahl durch den ihm ent-sprechenden Punkt geht. Hierbei ergiebt sich, dass jedes Null-system zweiten Grades auf die von Herrn Ameseder (Wien. Ber. LXXXIII. 385, siehe F. d. M. XIII. (1881) 495) angegebene Weise erzeugbar ist.

Der zweite Teil der Abhandlung behandelt in ähnlicher Weise eingehend zwei in reciproker Beziehung stehende räum-liche Systeme, d. h. zwei Systeme, von denen jedes einem be-liebigen Punkte eine Ebene, den Punkten einer Geraden die Ebenen eines Ebenenbüschels, den Punkten einer Ebene die Ebenen eines Ebenenbündels zuordnet. Dadurch werden jedem

:te sowohl durch die eine, wie durch die andere Collineation, ın einer Ebene liegende Punkte conjugirt, also ∞^1 doppeltıgirte Punkte, nämlich alle diejenigen, welche auf den ıittgeraden der beiden Ebenen liegen. Die ∞^3 Geraden, he so den ∞^3 Punkten des Raumes als die Oerter der ihnen ›elt-conjugirten Punkte zugehören, bilden einen tetraedralen ıplex. An die Untersuchung der durch zwei räumliche Cortionen hervorgerufenen Gebilde schliesst sich die Betrachtung räumlichen cubischen Punktverwandtschaft, welche der Verer, genau analog der Erzeugung der quadratischen Punktrandtschaft zweier Ebenen durch zwei Correlationen, auf ende Weise erzeugt. Man beziehe zwei Räume in drei Weisen prok auf einander, und ordne jedem Punkte des einen .mes den Schnittpunkt seiner drei entsprechenden Ebenen im ern Raume zu. Den Punkten einer Geraden entspricht dann cubische Raumcurve, den Punkten einer Ebene eine cubische ehe. Alle so in jedem Raume entstehenden ∞^3 cubischen chen haben eine gewisse Raumcurve sechster Ordnung und hzehnten Ranges gemein, auf welche schon Herr Cremona merksam gemacht, und mit welcher sich auch Herr Schur beiftigt hat. Die cubische Verwandtschaft ist durch dreizehn ıre entsprechender Punkte, also durch 39 Bedingungen, beamt und kann durch je drei von einander unabhängige Cortionen aus dem zweistufigen linearen Systeme von Correlaıen, das durch dreizehn Paare conjugirter Punkte definirt 'd, erzeugt werden. Weiterhin bezieht der Verfasser einen um auf drei andere collinear, ordnet dann jedem Punkte die rbindungsebene der drei entsprechenden Punkte zu, und gelangt zu einer cubischen Punkt-Ebenen-Verwandtschaft. Dabei er:bt sich z. B. eine Fläche vierter Ordnung als Ort der Punkte, lche in die ihnen entsprechenden Ebenen fallen. Schliesslich ındet sich Herr Sturm zu dem Polarsystem zurück und beıicht die schon mehrfach behandelte Bestimmung desselben ler der zugehörigen Fläche zweiten Grades, wenn drei Punkte ıd die ihnen zugehörigen Polarebenen gegeben sind. Dabei ird namentlich auch die von Herrn Thieme gelehrte Construc-

tion des Polarengebüsches einer Fläche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung discutirt und für $n=2$ specialisirt. Scht.

S. KANTOR. Bemerkung zu Herrn Sturm's Abhandlung: „Ueber die reciproke Verwandtschaft und damit zusammenhängende Verwandtschaften." Klein Ann. XX. 297-299.

Herr S. Kantor spricht davon, dass er sich mit den Gegenständen, die Herr Sturm in der im Titel citirten Abhandlung untersucht, schon seit 2½ Jahren beschäftigt habe, dass er in den Zusammenhang zwischen quadratischen Transformationen und Correlationssystemen etwas tiefer eingedrungen sei, dass er dabei auch zu Nullsystemen beliebigen Grades gelangt sei, dass er ausserdem auch Correlationsnetze auf zusammenfallenden Trägern untersucht habe, und dass er die dabei erscheinenden Oerter schon in seiner Abhandlung: „Zur Theorie der successiven quadratischen Transformationen in der Ebene" erwähnt habe. Der Herr Verfasser fügt hinzu, dass er seine allgemeinen, auf die Systeme linearer Transformationen bezüglichen Untersuchungen in den Denkschriften der Wiener Akademie demnächst veröffentlichen werde. Dies ist inzwischen durch eine grosse, im Juni 1882 vorgelegte Abhandlung geschehen, über welche man auf der folgenden Seite ein Referat findet. Scht.

M. ALLÉ. Beiträge zur Theorie des Doppelverhältnisses und der Raumcollineation. Wien. Ber. LXXXV. 1021-1034.

In seiner Arbeit „Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst" (Clebsch Ann. IX. 183, siehe F. d. M. VII. (1875) 53) benutzt Herr Klein eine Transformation, bei welcher die Punkte einer Kugel einander projectivisch zugeordnet werden. In vorliegender Arbeit betrachtet der Verfasser zunächst vier Punkte der complexen Ebene und die durch ihr Doppelverhältnis definirten conjugirten Kreisschaaren, und im Anschluss daran die obige Raumcollineation. Rg.

NTOR. Ueber die allgemeinsten linearen Systeme
rer Transformationen bei Coincidenz gleichartiger
ger und successiver Anwendung der Transforma-
en. Wien. Anz. 140-141; Wien. Denkschr. XLVI. 83-126.

e vorliegende reichhaltige Arbeit kann als Fortsetzung
Reihe früherer Publicationen des Verfassers, namentlich
gen „Ueber successive lineare Transformationen" (Wien.
XXXII. 139, siehe F. d. M. XII. (1880) 623) angesehen
. Den Ausgangspunkt bildet das Netz von linearen Trans-
onen mit drei festen Grundpunktepaaren aa', bb', cc' (vgl.
te Abhandlung). Von fundamentaler Wichtigkeit erweist sich
ve sechster Ordnung, deren Punkte, mit den Grundpunkten
den, Strahlenpaare einer Projectivität constanter Doppel-
nisse D liefern. Die allen Werten von D entprechenden
bilden ein Büschel, in welchem die Curve $D = -1$,
Punkten also drei Strahlenpaare in Involution zukommen,
zählend vorkommt.
besondere werden das bezeichnete Netz und die durch
e erzeugten Curven für specielle Lagen der Grundpunkte
cht. Sodann wendet sich der Verfasser zur Betrachtung
gemeinsten Netzes linearer Transformationen, sowohl bei
edenen als bei coincidenten Trägern.
der zweiten Abteilung werden die entsprechenden räum-
Probleme in ziemlich derselben Reihenfolge abgehandelt.
nktepaare aa', bb', cc', dd' bestimmen ein Gebüsch linearer
rmationen. Die Geraden, welche die Tetraeder $abcd$,
in projectivischen Punktquadrupeln schneiden, bilden einen
x vierter Ordnung; diejenigen unter ihnen, für welche
ppelverhältnis überdies constant bleibt, eine Congruenz
nter Ordnung, sechster Klasse. Rg.

HUBERT. Einstufige Ausartungen der quadratischen
nsformation der Ebene. Hamb. Mitt. I. 31.

ie Methode, nach welcher der Verfasser in seinem Calcül

der abzählenden Geometrie die Anzahlen für zwei collinea Bündel bestimmte, hat ihn auch zu den Anzahlen für die quadra tische Transformation der Ebene geführt, d. h. zu derjenig Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen, bei welcher jedem Punkt der einen Ebene nur ein einziger Punkt der andern Ebene ent spricht, den Punkten einer Geraden aber immer die Punkte eines Kegelschnitts entsprechen. Da diese Anzahlen durch die An zahlen für gewisse speciellere quadratische Transformationen, deren Constantenzahl durch die Specialisirung um eins kleiner gewor ist, auszudrücken sind, so war es vor allem nötig, diese speciell ren oder ausgearteten Transformationen nebst ihren Eigenschaften aufzufinden. In der vorliegenden Abhandlung sind nun diese aus gearteten Transformationen, deren Verhalten ja auch andern Mathematikern als Anzahl-Geometern interessant sein dürfte, er zeugt und beschrieben. Es wird genügen, wenn hier kurz an gegeben wird, inwiefern jede dieser Ausartungen einerseits spe cieller wird, als die allgemeine, andererseits aber doch die De finition der allgemeinen quadratischen Transformation erfüllt.

Bekanntlich existiren in jeder der beiden Ebenen E und E', welche Träger einer quadratischen Transformation sind, drei Fundamentalpunkte F_1, F_2, F_3, bezw. F'_1, F'_2, F'_3 von der Eigen schaft, dass durch sie alle Kegelschnitte hindurchgehen, welche Bilder von geraden Linien der anderen Ebene sind. Bei der ersten der vom Verfasser betrachteten Ausartungen liegen nun diese drei Fundamentalpunkte auf jeder der beiden Ebenen E und E' in gerader Linie, und alle Punkte von E und von E' entsprechen sich collinear, indem jeder Geraden in der einen Ebene ein in ein Geradenpaar zerfallender Kegelschnitt entspricht, der aus der collinear zugeordneten Geraden und der die drei Fundamentalpunkte enthaltenden festen Geraden besteht. Da die Collineation durch acht Bedingungen bestimmt ist, und die Fest stellung der drei Fundamentalpunkte der einen Ebene fünf Be dingungen erfordert, so ergiebt sich in der That eine Constanten zahl, die um eins kleiner ist, als die Constantenzahl 14 der gemeinen quadratischen Transformation. Die zweite Ausart unterscheidet sich von der allgemeinen nur dadurch, dass in j

zwei Fundamentalpunkte unendlich nahe liegen, so dass egelschnitte, welche dem Strahlenfeld der einen Ebene enten, auf der andern Ebene einander berühren. Bei der Ausartung sind die beiden Fundamentaldreiecke in allner Lage. Jedoch entspricht allen Punkten eines durch bestimmten Fundamentalpunkt F_1 in der einen Ebene gehentrahles ein und derselbe Punkt auf der Geraden $F_2'F_3'$, war so, dass den durch F_1 gehenden Strahlen sich die auf $F_2'F_3'$ projectiv zuordnen. Umgekehrt entspricht einem F_1 liegenden Punkte jeder Punkt eines projectiv zugeordStrahles durch F_1'. Es entsprechen sich also projectiv eits der Strahlbüschel, dessen Scheitel F_1 ist, und die ge-Punktreihe $F_2'F_3'$, andererseits der Strahlbüschel, dessen el F_1' ist, und die gerade Punktreihe F_2F_3, jedoch so, dass incidente Elemente der einen Ebene incidenten Elementen ndern Ebene entsprechen. Dabei ordnen sich den Punkten F_2 die Strahlen $F_1'F_3'$ und $F_1'F_2'$ zu, ferner den Strahlen und F_1F_3 die Punkte F_3' und F_2'. Bei der vierten Ausartung die beiden Fundamentalpunkte F_1 und F_2 in einem Punkt F lich nahe, jedoch so, dass ihre Verbindungsgerade f_3 eine bestimmte Lage hat. Der dritte Fundamentalpunkt F_3 hat allgemeine Lage zu dem Coincidenzpunkte F und dem e f_3, so dass also der Strahl FF_3 im allgemeinen von f_3 ieden ist. Die drei Fundamentalpunkte in E' haben eine allgemeine Lage zu einander. Durch F_3' geht ferner ein zeichneter, im Allgemeinen von $F_3'F_1'$ und $F_3'F_2'$ verschiedetrahl h', dessen Punkte den durch F gelegten Strahlen proentsprechen, und zwar so, dass F_3' dem Strahle f_3 und der tpunkt von h' mit $F_1'F_2'$ dem Strahle FF_3 entspricht. Einem eliebig gegebenen Punkte A entspricht in E' derjenige Punkt, welcher dem Verbindungsstrahle FA projectiv entspricht. in E beliebig gegebenen Geraden entspricht in E' immer us h' und $F_1'F_2'$ bestehende, zerfallende Kegelschnitt. Einem igen Punkte in E' entspricht in E immer ein und derselbe F. Um zu einer beliebig in E' gegebenen Geraden das liegende Bild zu finden, suche man den Schnittpunkt dieser

Geraden mit h' und bestimme denjenigen Strahl durch F, wel diesem Schnittpunkte projectiv entspricht. Dann ist der aus so bestimmten Strahle und dem constanten Strahle FF_3 beste zerfallende Kegelschnitt das gesuchte Bild. Bei der fünften artung liegen die drei Fundamentalpunkte F_1, F_2, F_3 auf e geraden Linie f; die Fundamentalpunkte F_1', F_2', F_3' dagegen ha in E' die allgemeine Lage. Ausserdem liegt in E' ein ausgez neter Punkt Q'. Dem durch Q', F_1', F_2', F_3' bestimmten Ke schnittbüschel sind die Punkte auf f projectiv zugeordnet, und z so, dass den drei in ein Geradenpaar degenerirten Kegelschni des Büschels die drei Punkte F_1, F_2, F_3 entsprechen. Einem liebigen Punkte A in E entspricht in E' der Punkt Q', einem liebigen Punkt A' in E' entspricht in F derjenige Punkt A au welcher dem durch A', Q', F_1', F_2', F_3' bestimmten Kegelsch projectiv zugeordnet ist. Einer beliebigen Geraden in E entsp der ihrem Schnittpunkte mit f zugeordnete Kegelschnitt, und e beliebigen Geraden in E' entspricht die doppelt zu rechne Gerade f. Bei der sechsten Ausartung fallen F_1, F_2, F_3 in e und denselben Punkt F, jedoch so, dass ihre Verbindungsger drei durch F gehende Strahlen f_1, f_2, f_3 sind. In E' liegt ausgezeichneter Kegelschnitt k', dessen Punkte den durch F ge den Strahlen projectiv zugeordnet sind, und zwar sind F_1', F die drei den Strahlen f_1, f_2, f_3 zugeordneten Punkte. E beliebigen Punkte in E' entspricht in E immer der Punkt F, e beliebigen Punkte A in E entspricht in E' immer derjenige k' liegende Punkt, welcher dem Strahle FA projectiv entspr Einer beliebigen Geraden in E entspricht in E' immer der K schnitt k', und einer beliebigen Geraden in E' entspricht i das Geradenpaar, dessen beide Strahlen den beiden Schnittpun von k' mit der gegebenen Geraden entsprechen. Die erste, zw und dritte Ausartung entsprechen sich selbst, wenn man die strichelten Buchstaben mit den nicht-gestrichelten und umgek vertauscht. Dagegen erhält man aus der vierten, fünften sechsten Ausartung durch dasselbe Verfahren je eine neue A artung. Ausserdem liefern die zweite, dritte und vierte Ausart dadurch noch je zwei neue Ausartungen, dass man die Indi

3 der Fundamentalpunkte vertauscht. So ergeben sich im en siebzehn Ausartungen, welche eine um eins kleinere Conenzahl haben, als die allgemeine, quadratische Transformader Ebene. Scht.

I. Schoute. Deux cas particuliers de la transforaation birationnelle. Darb. Bull. (2) VI. 152-168, 174-188.

In Abschnitt I. ist die Transformation durch symmetrische ade bezüglich der Winkelhalbirungslinien eines Dreieckes beчhen, die wegen der drei Involutionen in den Ecken sofort Conjunction nach einem Vierecke zu erkennen ist. Bemerkens- findet Referent nur, dass der Verfasser bemüht war, für die eren Grade die in sich transformirten Curven festzustellen. Abschnitt II. ist die Transformation durch symmetrische (umgte) Kreise bezüglich der Seiten eines Dreiecks durchgeführt. wird als involutorische Transformation fünfter Ordnung ernt, für welche die Ecken, der Höhenschnitt und die Kreiskte doppelte Fundamentalpunkte sind. Jene vier entsprechen als Fundamentalpunkte selbst, die Kreispunkte wechselseitig. werden die allgemeinen Eigenschaften in euklidisches Gewand leidet. In Abschnitt III. ist die zweite Transformation auf erste zurückgeführt mittelst einer Inversion mit dem Höhenitt als Pol und dem Fusspunktsdreiecke als transformirtem ursprünglichen. Das ist nur ein specieller Ausdruck der gemein von Bertini festgestellten Reductibilität an involutorien $T_5(1^3 \ldots 6^2)$. In Abschnitt IV. führt eine auf I. angewandte aue Analogie zu einer Transformation durch symmetrische enen bei einem Tetraeder. Die Transformation hat die Ecken sselben zu Fundamentalpunkten und ist vom dritten Grade. ues findet sich nicht, für 51, 52 cf. des Referenten Note in den R. 17. Mai 1880. In Abschnitt V. liefert beim Tetraeder mit sich E schneidenden Höhen die Anwendung einer Inversion (E als l) auf die vorige Transformation ein Analogon zu II. Aber Ausdruck ist sehr complicirt, und sie hat wohl auch kein bstständiges Interesse, da sie mittelst der Inversion sofort re-

ductibel ist. Beim regulären Tetraeder verdient sie ihrer Ei
fachheit wegen hervorgehoben zu werden. Sie besteht dann i
der Verwandtschaft zwischen einem Punkte O und einem Punkte O
wo die Kugeln $O'ABC$, $O'ABD$, $O'ACD$, $O'BCD$ symmetrisch si
zu den Kugeln $OABC$, $OABD$, $OACD$, $OBCD$ bezüglich der b
treffenden Seitenflächen. Lässt man bei einem willkürlichen T
traeder eine Seitenfläche weg, so ergeben die übrigen (im Triede
eine Transformation durch symmetrische Kugeln. Es wird b
wiesen, dass eine solche bei willkürlichem Tetraeder nicht mö
lich ist. Die Hülfsmittel der Ausarbeitung sind allgemeine u
elementare untermischt. Es wäre wünschenswert gewesen, d
complicirteren Dingen bei den in sich transformirten Curven ni
aus dem Wege zu gehen. Als Vortragsbeispiele in der Tra
formationslehre dürften solche (consequent nach einer Metho
durchgeführten Fälle instructiv sein. Kr.

P. H. Schoute. Over een paar met elkaar samenh
gende involutorische birationeele transformaties.
Nieuw Arch. IX. 117-140.

Die Anregung zu dieser Arbeit gab die Abhandlung
van den Berg, welche im siebenten Teile derselben Zeitsc
enthalten ist (siehe F. d. M. XIII. (1881) p. 538). Anstatt
Rechnung wird hier die Theorie der birationalen Transfor
tionen angewendet. Zuerst wird eine symmetrische Gruppe dr
Geraden hinsichtlich eines Dreieckes betrachtet, dann sym
trische Gruppen dreier Kreise beim Dreieck. Nachher ge
beide Gruppen in einander durch die Verwandtschaft der re
proken Radien über, und werden beide Transformationen a
auf den Raum erweitert. An die Stelle der Geraden treten h
die grössten Kreise in einem sphärischen Dreieck und an d
Stelle der Kreise Kugelflächen. So werden einige Eigenschaf
der Kugel abgeleitet, und allgemeiner die einer Oberfläche zwei
Grades, welche durch die Eckpunkte eines Tetraeders geht.
G.

Ramisch. Ueber sich in einem Punkte schneidende ɔordinirte Linien und über auf einer Geraden liegende ɒordinirte Punkte. Hoppe Arch. LXIX. 54-90.

Die Untersuchungen sind wesentlich kinematischen Charak- und beziehen sich im ersten Teile der Arbeit auf die Orte Schnittpunkte zweier bewegter Curven. Im zweiten Teile l ein Punktpaar betrachtet, welches sich auf zwei Curven in ›tzmässiger Weise bewegt, sowie die Einhüllende ihrer Ver- lungslinie gesucht.

Die Construçtion der Tangenten, bez. der Berührungspunkte ;hieht mit Hülfe der in der Ueberschrift angeführten coordi- en Elemente, und zwar wird definirt: Von vier in einer Ebene enden, sich in einem Punkte O schneidenden Geraden a, b, c, d nen wir, wenn a und d die äussern, b und c die innern Schen- sind, sowohl die ersteren als auch die letzteren dann zu ein- er coordinirt, wenn der Winkel $ab = cd$ ist. Die vierte coor- irte Linie zu gewissen dreien ist bei der ersten der betrach- n Curven die gesuchte Tangente. Die Definition von coor- irten Punkten auf einer Geraden ist der eben citirten für ahlen analog. Mit ihrer Hülfe werden Berührungspunkte be- omt. Rg.

Stéphanos. Sur la relation qui existe entre le problème de la trigonométrie sphérique et la théorie du système de trois formes binaires biquadratiques. S M. F. Bull. X. 134-137.

Die Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben sich, jectivisch verallgemeinert, aus den Relationen zwischen den ppelverhältnissen, welche durch einen Kegelschnitt auf einem ieck und dem zu ihm conjugirten bestimmt werden. Mit fe des Hesse'schen Uebertragungsprincipes aber verwandelt diese Aufgabe in die entsprechende der binären Formen- ›rie: „Gegeben sind drei quadratische Formen a_x^2, b_x^2, c_x^2, che den Seiten des ersten Dreiecks entsprechen, sowie die

zu den Seiten des conjugirten Dreiecks gehörigen drei J schen Formen l_x^2, m_x^2, n_x^2 dieses Systems; gesucht werde sämmtlichen Relationen zwischen den Invarianten dieser Systeme." Der Verfasser stellt dieselben auf und zeigt, w denselben die Formeln der sphärischen Trigonometrie entno werden können.

B. Besondere ebene Gebilde.

A. Milinowski. Elementar-synthetische Geometri Kegelschnitte. Leipzig. Teubner.

Das sehr empfehlenswerte Buch ist namentlich für matik-Lehrer bestimmt, die in der glücklichen Lage sind elementaren Methoden zur Auffindung der Kegelschnitt-l schaften und Kegelschnitt-Constructionen mit ihren Schülern nehmen zu können. Da in der That einerseits eine elem synthetische Geometrie, welche über die Euklidische Geo hinausragt, in mancher Beziehung, namentlich aber wegen das geometrische Anschauungsvermögen stärkenden Kraft, didaktische Nahrung enthält, und da andererseits die Univers vorlesungen ebensowohl wie die meisten der vorhandenen Theorie der Kegelschnitte synthetisch entwickelnden Werke namentlich Schröter's und Reye's, nur von der projectiven wandtschaft ausgehen, so ist das vorliegende Buch jede sehr existenzberechtigt, und dies um so eher, als die Geise „Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung" manch z. B. die Behandlung der Polareigenschaften, der Kegelsc büschel und der Kegelschnittschaaren fast ganz auslässt. einzige Buch wohl, welches ebenso wie das vorliegende, ganze Kegelschnittslehre leicht und anschaulich elementar-sy tisch entwickelt, ist das Buch des Kopenhagener Mathemat Zeuthen. Doch ist dieses Buch, wenigstens in deutscher Aus erst nach dem von Milinowski erschienen, und unterscheidet

erdem von dem letzteren erstens dadurch, dass es andere gangspunkte nimmt, und zweitens auch dadurch, dass es nicht usführlich angelegt ist. Das vorliegende Buch von Milinowski aber nicht blos existenzberechtigt, sondern durch die klar sicher fortschreitende Entwickelung der Begriffe, Eigenften und Constructionen auch ganz dazu geeignet, der eletar-synthetischen Behandlung der Kegelschnittslehre, die bis t noch ziemlich wenig Sympathieen begegnet, neue Freunde gewinnen.

Es fragt sich vor Allem, was der Verfasser hier unter eletar versteht. Es zeigt sich, dass er zu den elementaren fsmitteln ausser der Congruenz und der Aehnlichkeit auch einfachsten Eigenschaften der harmonischen und involutoren Beziehungen, nicht aber die der projectiven Beziehung im gemeinen rechnet. Der Unterschied in den Grundlagen bei vorliegenden Theorie der Kegelschnitte und bei der etwa in ye's Geometrie der Lage entwickelten Theorie ist also im sentlichen der, dass, während Reye aus der harmonischen ziehung die allgemeine projective Beziehung ableitet, und tere dann zum Ausgangspunkt aller weiteren Untersuchungen cht, Milinowski die harmonische Beziehung unmittelbar als lle benutzt. Demgemäss enthält der erste Abschnitt die orie der harmonischen Punkte und Strahlen, die harmonischen polaren Eigenschaften der Kreise und Kreisbüschel, die orie der Involutionen mit Berücksichtigung der imaginären nente, namentlich auch der beiden unendlich fernen imagin Kreispunkte, die Theorie der Aehnlichkeitspunkte, die Eigenften der harmonischen Pole, welche dann auf die Verwandtft der reciproken Radien, oder, was dasselbe ist, auf die isverwandtschaft führen, endlich die den folgenden Unterungen zu Grunde gelegte harmonische Verwandtschaft, d. h. Verwandtschaft, wo zwei Punkte A und A' sich entsprechen, n ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt geht und feste Gerade so schneidet, dass der Schnittpunkt und der e Punkt von A und A' harmonisch getrennt werden. Die im iten Abschnitt entwickelte Theorie der Kegelschnitte beginnt

dann mit dem Satze, dass in jeder harmonischen Verwandts einem Kreise, der den festen Punkt zum Centrum hat, ein Ke schnitt entspricht, dessen einer Brennpunkt dieser feste P ist. Daraus ergeben sich dann leicht einerseits die Theorie Brennpunkte, andererseits die Theorie der Polaren. Bald wird der Kegelschnitt dann auch als harmonisches Bild e beliebig liegenden Kreises betrachtet. Es folgen hierauf an Erzeugungen der verschiedenen Arten von Kegelschnitten, nam lich auch die auf der Constanz eines Abstandsverhältnisses ruhende Erzeugung. An diese schliesst sich die Betrachtung doppelt-berührenden Kreise und der dreipunktig-berühren Kreise. Der Schluss des zweiten Abschnittes ist den Const tionen der Kegelschnitte gewidmet. Die gegebenen Bedingun beziehen sich ausser auf Punkte, die getroffen werden sol und auf Strahlen, die berührt werden sollen, namentlich Axen, Brennpunkte, Leitlinien und Durchmesser.

Im dritten Abschnitte werden die wichtigsten Eigensch der Kegelschnittbüschel (vier gemeinsame Punkte) und Ke schnittschaaren (vier gemeinsame Tangenten) mit reellen und i ginären Grundelementen untersucht. Hat ein Büschel zwei o vier imaginäre Grundpunkte, so lässt es sich durch harmonis Verwandtschaften in ein Kreisbüschel verwandeln, und die Eig schaften des ersteren lassen sich aus denen des letzteren folg Aber auch in dem Falle von vier reellen festen Punkten f die Anwendung der harmonischen Verwandtschaft sofort zu Hauptsatze, dass die Kegelschnitte des Büschels jede Gerad einer Involution schneiden, aus welchem Satze sich dann le die Polareigenschaften des Büschels ergeben. Ausführlich wickelt der Verfasser dann die Eigenschaften von Kegelschnit die sich doppelt berühren, wobei wieder auf diejenigen beson Rücksicht genommen ist, die sich als Verallgemeinerungen Kreisbeziehungen auffassen lassen. So erscheint z. B. das Tact problem des Apollonius als specieller Fall der Aufgabe, e Kegelschnitt zu construiren, der einen gegebenen Kegelschn doppelt und drei gegebene Kegelschnitte einfach berührt, denen jeder K doppelt berührt. Den Schluss des dritten

nitts bildet die Theorie des Polarsystems, die nochmals in ein-ster Weise zu den Polareigenschaften der Kegelschnittbüschel rt, und zwar auch solcher Büschel, deren Elemente imaginär l. Erst im vierten Abschnitt giebt der Verfasser den Begriff Projectivität, und entwickelt daraus kurz einige Kegelschnitt-enschaften, aber nur, um den Leser in die eigentlich projec- Geometrie einzuführen und ihn die Bedeutung derselben für Theorie der Kegelschnitte merken zu lassen. Den Schluss verdienstvollen Werkes bildet eine Reihe von Sätzen und fgaben, welche teils die gegebenen Theorieen erweitern, teils Uebungsstoff zur Anwendung derselben bieten sollen.

Scht.

SCHÖFFLER. Synthetische Theorie der Curven zweiter Ordnung für den Selbstunterricht bearbeitet. Wien. Seidel und Sohn.

Der Verfasser glaubt selbst von seiner Schrift, dass sie den sprüchen des strengen Fachmanns nicht genügen werde. Re-ent muss ihr überhaupt jeglichen Wert absprechen, da die nze Darstellung des Gegenstandes denkbarst verworren ist. Beleg für diese Ansicht greifen wir aus der grossen Anzahl Ungereimtheiten nur die folgenden heraus.

Nachdem in der Einleitung die Auffassung des Unendlichen Sinne der synthetischen Geometrie auseinander gesetzt ist, den die Curven n^{ter} Ordnung als solche definirt, welche von r Geraden in n Punkten geschnitten werden. Die Ansichten r das Imaginäre setzt der Verfasser bei dem Laien, für den Buch bestimmt ist, als bekannt voraus,, denn er sagt gleich auf, dass eine Gerade gegen eine C_2 drei verschiedene Lagen nehmen könne, je nachdem die Schnittpunkte getrennt, zu-menfallend oder imaginär seien, und knüpft daran die Unter-eidung dieser Curven nach ihrem Verhalten zur unendlich en Geraden. Auf Seite 9 ist nun oben zu lesen: „Eine pse ist eine Curve zweiter Ordnung, die keinen unendlich en Punkt hat"; unten: „Dass die Ellipse keinen unendlich

fernen Punkt hat, erkennt man aus der blossen Anschauung. Auf derselben Seite wird weiter gesagt, dass sich die Richtigkeit der oben gegebenen Definitionen bei jeder Construction der Curven zweiter Ordnung nachweisen lasse, und zwar soll das durch Beispiele geschehen. Nun wird plötzlich von Leitlinie und Brennpunkt einer Parabel, dann von conjugirten Durchmessern einer Hyperbel gesprochen. Also auch diese Kenntnisse werden bei dem Laien vorausgesetzt. Wenn eine Gerade durch einen Curvenpunkt nur noch einen zweiten Curvenpunkt enthält, so ist nach der Ansicht des Verfassers die Curve von der zweiten Ordnung. Vielfache Punkte giebt es also für ihn nicht.

Rg.

M. N. Vaněček. Ueber die Transversalen in vollständigen Vielecken und Vielseiten. Prag. Ber. 1881. 274-287.

Enthält die analytische Ableitung von Sätzen über die Abschnitte auf Polygonseiten durch Transversalen etc. Ein Theil derselben findet sich, wie der Verfasser angiebt, bereits in Carnot's „Géométrie de position“, ist aber auch, wie Referent hinzufügt, längst in Elementarbücher, z. B. in Heis und Eschweiler's Planimetrie, übergegangen. Rg.

B. Alvord. The intersection of circles and the intersection of spheres. Sylv. Am. J. V. 25-45.

Der Verfasser erörtert in ausführlicher Weise die verschiedenen Probleme, welche sich bei der Betrachtung der Winkel, unter welchen Kreise und Kugeln einander schneiden, darbieten. Die meisten dieser Probleme sind schon lange hinreichend bekannt. Hervorzuheben ist die Construction der Kreise, welche vier gegebene unter gleichem Winkel treffen, und die Construction der Kugeln, welche fünf gegebene unter demselben Winkel schneiden. Die Anzahl der Lösungen wird bei diesen Problemen bestimmt. W. St.

DA PONTE HORTA. Algumas propriedades das conicas. Teixeira J. IV. 65-86.

Zwei Seiten eines veränderlichen Dreiecks drehen sich um ei gegenüberliegende Ecken eines festen Parallelogramms, hrend die dritte Dreiecksseite derjenigen Diagonale parallel ibt, welche die beiden andern Ecken des Parallelogramms ver-det. Bewegen sich dabei zwei Ecken des Dreiecks auf zwei stossenden Seiten des Parallelogramms, so beschreibt die dritte ke eine Ellipse; bewegen sich jene zwei Ecken auf gegen-erliegenden Parallelogrammseiten, so beschreibt die dritte Ecke ne Hyperbel. Diese Erzeugungsart der Kegelschnitte hatte Herr rta bereits in einer früheren, der Akademie von Lissabon vor-legten Arbeit behandelt. In dem vorliegenden Aufsatze werden ige Folgerungen und Constructionen mitgeteilt. Insbesondere rden die Schnittpunkte der Ellipse mit zwei von benachbarten ken des Parallelogramms ausgehenden Geraden bestimmt.

Tx. (Wn.).

SCHIAPPA MONTEIRO. Note sur la génération d'une conique au moyen du cercle ou d'une autre conique. Teixeira J. IV. 95-108.

Dreht sich eine Transversale um einen festen Punkt, so bil-n die Radien, welche zwei feste Punkte eines Kegelschnitts mit nigen Punkten verbinden, in denen die Transversale den Kegel-hnitt schneidet, zwei projective Strahlenbüschel; und der geo-trische Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen ist da-ein anderer Kegelschnitt. Lässt man ferner um jene festen nkte zwei parallele Sehnen sich drehen, so bilden deren Enden ei projective Punktreihen, und die Sehnen, welche entsprechende nkte verbinden, umhüllen einen Kegelschnitt. Die auf diese erzeugten Kegelschnitte werden in vorliegender Arbeit ein-end behandelt.

Tx. (Wn.).

C. Hossfeld. Construction des Kegelschnitts aus fünf zum Teil imaginären Curvenelementen. Diss. Jena. Neuenhahn.

Der Verfasser stellt zehn Aufgaben auf, welche darin übereinstimmen, dass sie alle die Construction eines Kegelschnitts verlangen, der durch a gegebene Punkte geht und $5-a$ gegebene Strahlen berührt, und welche sich dadurch unterscheiden, dass die gegebenen Elemente teils als reell, teils als imaginär betrachtet werden. Die imaginären Elemente werden als Doppelpunkte elliptischer Punkt-Involutionen eingeführt. Die Betrachtungen sind rein lage-geometrisch und sehr ausführlich.

Scht.

O. Dziobek. Neue Beiträge zur Theorie des Pascal'schen Sechsecks. Berlin. F. Dümmler.

In einer Arbeit „Nuovi teoremi sull' Hexagnammum Mysticum" (Rom., Acc. L. (3) I. 141, s. F. d. M. X. (1878) 390) zeigt Herr G. Veronese, dass ausser dem System der 60 Pascal'schen Linien und 60 Kirkman'schen Punkte noch unendlich viele Systeme von Linien und Punkten existiren, die, wenn auch nicht alle, so doch die meisten Eigenschaften mit dem ersten Systeme gemeinschaftlich haben. Von diesen Systemen folgt immer eins aus den vorhergehenden. In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verfasser, dass diese Systeme Glieder einer continuirlichen Reihe sind.

Sind x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 irgend fünf lineare Ausdrücke in homogenen Dreieckscoordinaten und $\alpha_1, \ldots, \alpha_5$ irgend fünf Constanten, so giebt die Matrix

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 \end{Vmatrix} = 0$$

zehn Grade $[ik]$, welche sich zu dreien in einem Punkte schneiden. Solcher (ikh) Punkte giebt es ebenfalls zehn, welche zu je dreien auf jenen Geraden liegen. Ordnet man dem Punkte (ik) die Gerade (lmn) zu, so sind sie Pole und Polare eines gewissen Kegelschnittes. Fügt man zu den fünf Functionen und Constanten noch

sechste x_6 resp. α_6, so erhält man fünfzehn Linien und zwanzig kte, welche Hesse eine Steiner'sche Figur nennt, weil die nzig Steiner'schen Punkte und fünfzehn Plücker'schen Geraden solche (allerdings speciellen Charakters) bilden.

Der Verfasser knüpft nun seine Untersuchungen an ein System

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \end{matrix} \right\|$$

35 Linien (ikh), 35 Punkten ($ikhl$). Die Zuordnung ist im gemeinen keine polare mehr, jedoch ist die Figur sich in geser Weise selbst reciprok, insofern auf jeder Linie vier nkte liegen und sich in jedem Punkte vier Linien schneiden. fünfzehn Plücker'schen Linien und die zwanzig Steiner'schen nkte, sowie die fünfzehn Cayley'schen Punkte und zwanzig mon'schen Linien bilden in ihrer Gesammtheit ein solches stem.

Es werden dann gewisse Bedingungen eingeführt, wodurch allgemeine Figur derjenigen des Pascal'schen Sechsecks bedend genähert und schliesslich in dieselbe übergeführt wird.

Rg.

Dufau. Théorème de l'hexagone inscrit dans une conique. Nouv. Ann. (3) I. 99-102.

Es wird auf einfachem Wege gezeigt, wie die Polareigenhaft des Kegelschnitts den Pascal'schen Satz und dieser die lareigenschaft nach sich zieht. W. St.

Gräfe. Notiz über das Pascal'sche, resp. Brianchon'sche Sechseck. Kronecker J. XCIII. 184-188.

Die Notiz bezieht sich auf die Reihen von Pascal'schen hsecken, welche von einem Brianchon'schen Sechsecke dadurch vorgerufen werden, dass man in gewisser Weise die Ecken Brianchon'schen Sechsecks oder die Schnittpunkte gewisser

Seiten desselben geradlinig verbindet. Bei den kurz zusammengedrängten und der Symbolik wegen zu einem Referat wenig geeigneten Betrachtungen spielt die Lage des Kirkman'schen Punktes jedes auftretenden Pascal'schen Sechsecks eine Hauptrolle.

Scht.

E. Brassinne. Généralisation du théorème de Brianchon et de l'hexagone de Pascal. Nouv. Ann. (3) I. 318-320.

Ist ein $2n$-Eck einem Kegelschnitt umschrieben und gehen von den n Diagonalen, welche je zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, $n-1$ durch einen Punkt, so geht auch die letzte durch diesen Punkt.	Ist ein $2n$-Eck einem Kegelschnitt eingeschrieben und schneiden sich $(n-1)$ Paare von Gegenseiten in Punkten einer Geraden, so schneidet sich auch das letzte Paar auf dieser Geraden.

Rg.

G. Tarry. Relation générale entre sept points quelconques d'une section conique. Conique d'homologie. Propriétés communes à trois figures homographiques. C. R. XCIV. 941-943.

Der Verfasser stellt an die Spitze dieser Note ein allgemeines Theorem über sieben Punkte eines Kegelschnitts und macht specielle Anwendungen desselben. Dieser Satz sagt folgendes aus. Zwei Dreiecke (ABC) und $(A'B'C')$ seien einem Kegelschnitte einbeschrieben. Durch einen beliebigen Punkt D und irgend einen Punkt H des Kegelschnitts lege man die beiden Kegelschnitte $(HDABC)$ und $(HDA'B'C')$. Sie schneiden sich noch in zwei anderen Punkten, deren Verbindungslinie die Polare des Punktes P, in welchen $\overline{HD}$ den ersten Kegelschnitt noch trifft, bezüglich eines Kegesschnittes ist, für welchen (ABC) und $(A'B'C')$ Poldreiecke sind. Dieser Satz wird nun auf drei collineare Figuren, welche eine besondere Lage zu einander haben, angewendet. Es wird definirt: liegen die drei Tripel der Doppel-

kte dreier collinearer Figuren auf einem Kegelschnitte, so heisst selbe „Kegelschnitt der Homologie“; und für solche drei Figuren I nun eine Reihe von Sätzen mitgeteilt. W. St.

. SCHUMANN. Die Wechselbeziehung zwischen einem Satze von Chasles und von Steiner, nebst einigen laraus fliessenden geometrischen Relationen.

Schlömilch Z. XXVII. 363-368.

Steiner hat bewiesen, dass zwei Tripel (Polardreiecke) eines gelschnitts in einem Kegelschnitte enthalten sind, und Chasles, s ein Paar von je drei Punkten eines Kegelschnitts stets als ipel eines Kegelschnitts aufgefasst werden kann.

Der Verfasser behandelt die Frage analytisch und findet, s die Bedingung dafür, dass ein Paar von je drei Punkten ipel eines Kegelschnitts ist, identisch ist mit der Bedingung, s ein Paar von je drei Punkten in demselben Kegelschnitte thalten ist.

Des Weiteren leitet der Verfasser einen Satz von Poncelet, d zwar, wie er sagt, mit einem Zusatze ab; nämlich den folnden: „Ist ein Dreieck einem Kegelschnitte eingeschrieben und em zweiten umschrieben, so lässt sich von jedem Punkte des ten aus ein Dreieck dem einen ein- und dem andern umzeichn, und alle diese Dreiecke sind Tripel eines und desselben itten Kegelschnitts.“

Aber dieser Satz ist bekannt, vergl. z. B. Steiner-Schröter, gelschnitte. II. Aufl. S. 155.

Als räumliches Analogon des obigen Satzes findet der Verser den folgenden Satz: „Ein Paar von je drei Geraden einer elschaar des Hyperboloids bestimmt in eindeutiger Form die ppirung der Geraden dieser Schaar zu je dreien derart, dass Gruppe von je dreien mit den drei ihnen parallelen der ern Schaar ein Parallelepipedon ergiebt, welches dem Hyperid umgeschrieben und zugleich einer mit ihm concentrischen he zweiten Grades eingeschrieben ist.“ Rg.

C. Pelz. Zum Normalenproblem der Kegelschni
Wien. Ber. LXXXV. 169-174.

Es wird in diesem Aufsatze die Aufgabe gelöst, durc Punkt einer bekannten Normalen des Kegelschnitts di übrigen Normalen der Curve zu construiren. Die Beha des Problems ist synthetisch. Die von Joachimsthal in C XXVI. 155 gegebene Construction wird bewiesen, und e den einige einfache neue Constructionen hinzugefügt.

W. S

H. G. Zeuthen. Bevis for en Konstruktion af Cha
Zeuthen T. (4) VI. 13-16.

Enthält die von Chasles gegebene Construction eines schnitts, wenn zwei conjugirte Halbmesser in Richtun Länge gegeben sind. (Siehe des Verfassers Grundriss et

G

A. Mannheim. Construire les axes d'une ellipse on connait deux diamètres conjugués. Mess. 175-177.

Der Verfasser teilt neue rein geometrische Lösung im Titel genannten Aufgabe mit. Glr. (Wn

---

G. Halphén. Sur un critérium relatif à la théori sections coniques. Nouv. Ann. (3) I. 5-7.

Steiner hat für einen Kegelschnitt, welcher durch drei P und seinen Mittelpunkt gegeben ist, das Criterium angeg welches entscheiden lässt, ob der Kegelschnitt eine Ellipse Hyperbel ist. Der Verfasser stellt sich nun folgende F Der Mittelpunkt sei so gelegen, dass der betreffende Kegels eine Hyperbel ist; wie verteilen sich dann die drei gegel Punkte auf die beiden Zweige der Hyperbel? Zum Sch

die Gattung des Kegelschnittes festgestellt, wenn derselbe
h den Mittelpunkt und drei Tangenten gegeben ist.
W. St.

BRUNO. Sulle coniche che passano per tre punti ati e toccano due rette date. Torino Atti. XVII. 29-34.

Der Verfasser teilt eine von der sonst bekannten Construc- dieses Problems etwas abweichende Construction desselben Sie giebt Gelegenheit zur Aufstellung einiger Sätze über Lage der den vier Kegelschnitten ausser den gegebenen menten gemeinsamen Punkte und Tangenten. W. St.

SCHRÖTER. Geometrischer Satz. Schlömilch Z. XXVII. 61-62.

Wenn man von vier in der Ebene gegebenen Punkten einen Mittelpunkt eines Kegelschnitts, die drei übrigen als die en eines Poldreiecks in Bezug auf denselben annimmt, so ist Kegelschnitt dadurch bestimmt, und man erhält durch Ver- schung der vier gegebenen Punkte unter einander vier solcher gelschnitte. Es wird nun angegeben, welchen Gattungen diese gelschnitte angehören, und in welchen Beziehungen sie zu ander stehen. W. St.

NONYME. Composition mathématique pour l'admission à l'école polytechnique en 1882. Solution géométrique. Nouv. Ann. (3) I. 351-357.

Wenn man durch die beiden Schnittpunkte A und B zweier eise erstens einen Kegelschnitt legt, der zugleich jeden der den Kreise berührt, zweitens die gleichseitige Hyperbel legt, che A und B zu Scheiteln hat, und dann die beiden sonstigen nittpunkte des Kegelschnitts und der Hyperbel verbindet, so lt man eine durch einen Aehnlichkeitspunkt der beiden Kreise ende Verbindungslinie. Der geometrische Ort für die Mittel- kte aller Kegelschnitte, welche durch A und B gehen und

die beiden Kreise berühren, wird von zwei Kreisperipherieen bildet. Die Asymptoten aller Kegelschnitte, welche ihren Mi punkt auf einer dieser beiden Kreisperipherieen haben, tr dieselbe in zwei festen Punkten, die auf der Chordale der be gegebenen Kreise liegen. Diese Sätze und einige naheliege Folgerungen sind in der vorliegenden Abhandlung synthe bewiesen. Scht.

Z. Reggio. Alcune ricerche sulle coniche, centri descri e rette descrittive — configurazioni di coniche — delle configurazioni. Ven. Ist., Atti (5) VIII. 649-673.

Eine Configuration von Kegelschnitten nennt der Verf den Inbegriff aller Kegelschnitte, welche einem Dreiecke umschrieben (oder eingeschrieben) sind und einer weiteren dingung Genüge leisten. Zu einem Punkte der Ebene (A gehört bezüglich des Dreiecks in bekannter Weise eine Ge als Polare. Die zusammengehörenden Elemente liefern eine proke Beziehung zweiten Grades. Den Punkten eines Ke schnitts der Configuration entsprechen so die Geraden e Strahlenbüschels; also einem Kegelschnitte ein Punkt, der Mi punkt des Büschels, welcher das „descriptive Centrum" der C heisst. Der Verfasser studirt nun einfache Configurationen d Betrachtung des Ortes des descriptiven Centrums und giebt ei auf Kegelschnitte bezügliche Constructionen an, welche auf die Zusammenhange beruhen. W. St.

A. Brill. Ueber das Polvierseit. Klein Ann. XX. 531-5

Wenn man in Bezug auf einen Kegelschnitt K zu den Seiten S_1, S_2, S_3 eines Dreiseits die Pole P_1, P_2, P_3 bestimmt, so natürlich die drei Seiten S_{23}, S_{13}, S_{12} des von P_1, P_2, P_3 gebi ten Dreiecks auch Polaren der drei Ecken P_{23}, P_{13}, P_{12} des S_1, S_2, S_3 bestehenden Dreiecks. Es liegen aber auch das I eck $P_1 P_2 P_3$ und das Dreieck $P_{23} P_{13} P_{12}$ perspectiv, so dass Verbindungslinien $P_1 P_{23}, P_2 P_{13}, P_3 P_{12}$, welche bez. S_{14}, S_{24}

sen mögen, sich in einem einzigen Punkte P_4 schneiden, und a die Schnittpunkte der Seitenpaare $S_1 S_{23}$, $S_2 S_{13}$, $S_3 S_{12}$, che bez. P_{14}, P_{24}, P_{34} heissen mögen, auf einer einzigen gen Linie S_4 liegen. Hieraus geht ferner hervor, dass auch Pol von S_4 in Bezug auf K sein muss. Die eben bezeichneten n Punkte und zehn geraden Linien bilden also eine Configuon, welche die Eigenschaft hat, dass zehnmal drei der zehn kte in einer der geraden Linien liegen, und auch zehnmal i der zehn geraden Linien sich in einem der zehn Punkte neiden. Von dieser bekannten Configuration, welche der Rent gern auch als Schnitt der zehn Verbindungslinien und der n Verbindungsebenen von fünf Punkten im Raume aufgefasst ehen hätte, zählt der Verfasser mehrere merkwürdige Eigenaften auf, welche teils der Configuration an sich angehören, s auch auf den Kegelschnitt K Bezug nehmen. Namentlich achtet der Verfasser die fünfzehn Verbindungsgeraden, welche tehen, wenn man jeden der zehn Punkte mit denjenigen drei kten der Configuration verbindet, mit denen er noch nicht durch e der zehn Geraden der Configuration verbunden ist. Diese fünf n Verbindungsgeraden lassen sich nämlich zu fünf Dreiseiten , $\triangle_2, \ldots, \triangle_5$ zusammenfassen, welche u. A. die Eigenschaft en, dass je zwei von ihnen wiederum perspectiv sind. Eine ere von Herrn Brill erwähnte Eigenschaft spricht aus, dass sechs Osculationspunkte der sechs Kegelschnitte, welche durch drei Ecken eines der fünf Dreiecke $\triangle$ gehen und zugleich Kegelschnitt K dreipunktig berühren, zugleich Osculationskte für die den vier andern Dreiecken $\triangle$ umschriebenen elschnitte sind. Schliesslich wird angegeben, wie sich hierh aus K und einem der fünf Dreiecke $\triangle$ die übrigen linear struiren lassen. Scht.

STREISSLER. Construction der gemeinsamen Elemente weier Kegelschnitte. Hoppe Arch. LXVIII. 389-404.

Ist jeder von zwei Kegelschnitten irgendwie durch eine fünfe Bedingung gegeben, z. B. durch fünf seiner Punkte oder

durch die Endpunkte seiner grossen Axe und durch seine B
punkte, so ist die Aufgabe, die gemeinsamen Punkte ode
gemeinsamen Tangenten der beiden so definirten Kegelsc
zu finden, eine Aufgabe vierten Grades, und deshalb in
gemeinen mit Cirkel und Lineal nicht lösbar. Für den Fo
aber ist es interessant und für den Constructeur wichtig,
Kegelschnitteigenschaften möglichst bequeme, praktische Met
zu entnehmen, welche in den verschiedenen Fällen die ge
samen Tangenten constructiv liefern. Von diesem Geda
geleitet, gelangt der Verfasser für die am meisten vorkomm
Fälle zu sehr einfachen Constructionsarten. Scht

L. Kotanyi. Construction algebraischer Ausdrücke
Hülfe von Involutionen auf Kegelschnitten. Schlöm
XXVII. 248-252.

Jede quadratische Involution kann durch eine Glei
von der Form

$$\alpha x_1 x_2 + \beta(x_1 + x_2) + \gamma = 0$$

definirt gedacht werden. Soll dem Werte $x_1 = \infty$ der Wert x_2
entsprechen, so specialisirt sich die Involutionsgleichung z

$$x_1 + x_2 = -\frac{\gamma}{\beta} = c.$$

Diese Gleichung benutzt der Verfasser, um mit Hülfe ein
volution zwei Strecken OA und OB einer Geraden G zu ad
d. h. einen Punkt X auf G zu finden, so dass $OX = OA$
ist. Bestimmt man nämlich auf der Geraden G die Invol
in welcher der unendlich ferne Punkt sich selbst entsprich
in welcher dem Punkte A der Punkt B entspricht, so mus
zu $x_1 = 0$ der Wert $x_2 = c = OA + OB$ gehört, der in
Involution dem Punkte O entsprechende Punkt der ge
Punkt X sein, der die Forderung $OA + OB = OX$ erfüllt.
Ausführung dieser Construction kann man einen in der
der Geraden liegenden beliebigen Kegelschnitt benutzen, a
man die auf G liegende Involution von einem beliebigen
schnittpunkte S aus projicirt. Man zieht also SA und SB,

zweiten Schnittpunkte A' und B' dieser Geraden mit dem elschnitt auf und erhält in der Geraden $A'B'$ den einen Ort las gesuchte Involutionscentrum. Den zweiten Ort liefert, da sich $= \infty$ und $x_2 = \infty$ entsprechen, die Tangente in dem Punkte D', die Parallele durch S mit G den Kegelschnitt schneidet. Den nittpunkt S' von $A'B'$ und der Tangente in D' hat man nun h mit demjenigen Punkte O' zu verbinden, in dem OS den elschnitt zum zweiten Male schneidet. Die Verbindungsstrecke ' schneidet den Kegelschnitt in X', und $S'X'$ schneidet endlich Gerade G in dem gesuchten Punkte X. Durch Wiederholung r solchen Construction kann die Addition beliebig vieler kte, sowie die Multiplication eines Punktes mit einer natür- n Zahl ausgeführt werden. In ähnlicher Weise wird dann Subtraction behandelt, wobei auch negative Werte eingeführt en. Zur Multiplication gelangt der Verfasser aus der all- inen Involutionsgleichung, indem er dem Werte $x_1 = 0$ den : $x_2 = \infty$ zuerteilt, wodurch sich diese Gleichung in $= -\frac{\gamma}{\alpha} = c$ verwandelt, und indem er dann zwei Punkte entsprechen lässt, von denen der eine den Wert 1, der re den Wert c darstellt. Mit Hülfe dieser Betrachtungen ist der Verfasser dann sowohl den Pascal'schen Satz, wie den Satz, dass das einem Kegelschnitt umbeschriebene Vier- dasselbe Diagonaldreieck hat, wie das aus seinen vier Be- ngspunkten bestehende Viereck. Schliesslich werden die lratwurzeln, reciproke Werte, conjugirt-imaginäre Werte und ienten in ähnlicher Weise behandelt. Scht.

LL. De l'involution de plusieurs points sur une nique. Nouv. Ann. (3) I. 62-79.

Siehe Abschn. IX. Cap. 2. C.

BALDI. Sui gruppi di sei coniche in involuzione. rino Atti XVII. 566-580.

Zu einem beliebig in einer Ebene gelegenen Kegelschnitte giebt es ∞^3 Kegelschnitte, von denen jeder mit dem ursprünglichen Kegelschnitte in Involution liegt. Zwei solche in Involution liegende Kegelschnitte bestimmen zwei Gruppen von je vier Kegelschnitten, so dass von den sechs Kegelschnitten, welche sich aus einer solchen Gruppe und den beiden sie erzeugenden Kegelschnitten zusammensetzen, immer je zwei in Involution liegen. Da aber je zwei in Involution liegende Kegelschnitte einer solchen Gruppe von sechs Kegelschnitten, wie aus dem eben Gesagten hervorgeht, ausser dieser Gruppe noch eine zweite Gruppe bestimmen, so kann man sagen, dass zu jeder Gruppe von sechs Kegelschnitten, von denen je zwei in Involution liegen, fünfzehn analoge Gruppen gehören, von denen jede mit der erstgenannten Gruppe zwei Kegelschnitte gemein hat. Verlangt man, dass von n Kegelschnitten je zwei in Involution liegen, so kann n höchstens gleich sechs sein. Derartige Gruppen von sechs Kegelschnitten haben hinsichtlich der ein- und umbeschriebenen Dreiecke und Vierecke, der sich selbst conjugirten Dreiecke, der dadurch erzeugten Jacobi'schen und Hesse'schen Curven, u. s. w. interessante Eigenschaften, die vom Verfasser analytisch bewiesen werden. Scht.

F. Bergmann. Kegelschnittbüschel - Constructionen. Hoppe Arch. LXVIII. 404-421.

Der geometrische Ort für die Pole einer gegebenen Geraden in Bezug auf die einzelnen Kegelschnitte eines gegebenen Kegelschnittbüschels ist bekanntlich wiederum ein Kegelschnitt. Für die Construction des letzteren entwickelt der Verfasser ein auf die Betrachtung zweier Punktinvolutionen gestütztes einfaches Verfahren. Es ergiebt sich dabei auch der bekannte Satz, dass die Kegelschnitte, welche in dieser Weise den sämmtlichen ∞^2 Geraden der Ebene polar zugeordnet sind, ein zweistufiges Kegelschnittsystem mit drei gemeinsamen Punkten bilden. Weiterhin untersucht der Verfasser die Lagen derjenigen Geraden, deren polare Kegelschnitte Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln, gleichseitige Hyper-

Kreise, Geradenpaare werden. Mit Hülfe desjenigen polaren lschnitts, der zu einem Kreise wird, lässt sich dann die abe, zu einem beliebigen Punkte den im Kegelschnittbüschel ıgirten Punkt aufzusuchen, sehr einfach erledigen. Den ıss der Abhandlung bildet die Betrachtung des Kegelschnitts, von den Mittelpunkten der Kegelschnitte des Büschels, d. h. den Polen der unendlich fernen Geraden gebildet wird.

Scht.

HOFMANN. Théorème relatit à un certain réseau e quatre sections coniques. Nouv. Ann. (3) I. 321-325.

Diese Arbeit enthält einige Sätze über vier Kegelschnitte einem gemeinsamen Brennpunkt, von welchen jeder drei von gegebenen Geraden berührt. W. St.

ıtere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte in synthetischer Behandlung von GENESE, .. MCMURPHY, CH. LADD, F. BUDD, W. ROBERTS, V. J. C. SHARP, J. L. KITCHIN, CH. A. SCOTT, J. YOUNG, I. S. MEYER, K. GALE, T. WOODCOCK, W. H. LOWRY, . F. WALKER, TOWNSEND, DROZ, A. MARTIN, B. EASTON,). EDWARDES, R. KNOWLES finden sich Ed. Times XXXVI. 3, 78, 83; XXXVII. 22, 25, 28, 35-36, 81, 121, 122, 123.

Wn.

ZIMMERMANN. Vermischte Aufgaben und Lehrsätze ber Kegelschnitte und über Curven dritter Ordnung it einem Doppelpunkt. Berlin. Friedländer.

Es wird eine grosse Reihe zum Teil neuer Sätze ohne Be- mitgeteilt. W. St.

H. DRASCH. Beitrag zur synthetischen Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt. Wien. Ber. LXXXV. 534-553.

Die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung mit Doppelpunkt wird unter Zugrundelegung ihrer Erzeugung durch ein Strahlenbüschel erster Ordnung und ein ihm projectives Büschel zweiter Ordnung eingehend erörtert, und es werden auf synthetischem Wege die wichtigsten meist bekannten Eigenschaften der Curven abgeleitet. W. St.

R. A. ROBERTS. On polygons circumscribed about a cuspidal cubic. Lond. M. S. Proc. XIII. 148-153.

Der Verfasser giebt, ohne sich auf eine principielle Untersuchung einzulassen, interessante Beispiele von ∞^1 Dreiecken und vollständigen Vierecken, welche einer Curve dritter Ordnung mit Spitze umschrieben und einer anderen rationalen C_3 oder C_4 eingeschrieben sind. V.

C. LE PAIGE. Note sur l'involution biquadratique du troisième rang et sur son application aux courbes du quatrième ordre. Prag. Ber. 1881. 61-68.

In dieser Note wird die biquadratische Involution dritter Stufe

$$a_x^4 + \lambda b_x^4 + \mu c_x^4 + \nu d_x^4 = 0$$

auf der Geraden betrachtet und zur Lösung einer Reihe geometrischer Probleme benutzt, von denen die Construction des sechsten Schnittpunktes einer C_3 und C_2, sowie die Construction einer C_4 aus vierzehn gegebenen Punkten hervorgehoben werden möge. V.

Ameseder. Geometrische Untersuchungen der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere ihrer Berührungskegelschnitte. Wien. Ber. LXXXV. 396-423.

Der Verfasser leitet die bekannten Eigenschaften der ein-
ſh berührenden Kegelschnitte und der Doppeltangenten einer
gemeinen Curve vierter Ordnung ab auf dem Wege, welchen
ion vorher Geiser zu diesem Zwecke betreten hat. Die Be-
irungskegelschnitte eines Systems erscheinen hierbei als die
ten Polaren der Punkte eines festen Kegelschnitts C_2 bezüglich
er allgemeinen Curve dritter Ordnung. Hervorzuheben ist die
timmung des Ortes der Brennpunkte aller Kegelschnitte eines
tems. Besondere Arten von C_4 erhält der Verfasser, wenn
einem vollständigen, der Hesse'schen Curve einbeschriebenen
rseite einbeschrieben ist. Auf einer solchen C_4 sind die Qua-
pel der Berührungspunkte zu je vier in der Art gruppirt, dass
Verbindungslinie zweier Punkte eines Quadrupels noch zwei
ıkte eines zweiten Quadrupels derselben Gruppe enthält.
hält C_4 die Ecken eines solchen Sechzehneckes, so enthält
die Ecken von unendlich vielen. W. St.

Guerre. Sur les hypercycles. C. R. XCIV. 778-781, 832-835, 933-936, 1033-1036, 1160-1163.

In den vorliegenden Noten ist eine Reihe von, namentlich
er Ableitung nach, sehr eleganten Sätzen zusammengestellt
r gewisse Curven vierter Klasse und sechster Ordnung mit der
ndlich fernen Geraden als Doppeltangente, welche Laguerre als
percyklen bezeichnet. Insbesondere ist dabei das Princip her-
zuheben, die auszuführenden geometrischen Constructionen da-
ch zu vereinfachen und vor allem weniger vieldeutig zu machen,
s die algebraischen Curven als von ihren Tangenten umhüllt
einem bestimmten Richtungssinn behaftet aufgefasst werden,
em der Tangente ein solcher zuerteilt wird. Nur den Curven,
welche die Parallelcurven aus zwei getrennten Zügen be-
ıen, kann dann ein bestimmter Richtungssinn beigelegt werden,

'., vergl. das vorhergehende Referat), teilt Herr Darboux
ılgenden Sätze über Curven n^{ter} Klasse mit, die er im Jahre
in einer geometrischen Vorlesung an der Sorbonne zum
ag gebracht hat:

l) Man betrachte n feste Gerade, bezeichne auf jeder der-
n einen festen Punkt und messe von ihm aus die Stücke,
ıe eine bewegliche Gerade auf denselben abschneidet. Be-
dann zwischen diesen Abschnitten $p_1, p_2, \dots, p_n$ eine lineare
ion

$$\Sigma x_i p_i = k,$$

nhüllt die bewegliche Gerade im Allgemeinen eine Curve
.lasse, welche die unendlich ferne Gerade zur $(n-1)$-fachen
ente hat. Der Satz ist umkehrbar. Für $n = 2$ drückt er
bekannte Eigenschaft der Parabel aus.

2) Analog lässt sich die Eigenschaft der Parabel, dass drei
Tangenten auf einer beweglichen vierten stets zwei Segmente
:onstantem Verhältnis ausschneiden, und die Umkehrung der-
n sofort auf Curven n^{ter} Klasse mit $(n-1)$-facher Tangente
'nendlichen verallgemeinern.

Die Sätze lassen sich durch Projection auf Curven n^{ter} Klasse
eliebiger $(n-1)$-facher Tangente übertragen, und ebenso for-
t sich deren dualistische Umkehrung auf die einfachste
e. Dk.

)ARBOUX. Sur une propriété du cercle. C. R. XCIV.
)8-1110.

Eine bewegliche Tangente eines Kreises bestimmt mit zwei
ı Tangenten Dreiecke, deren Umfang constant ist. Diese
ıschaft veranlasst den Verfasser zur Untersuchung derjenigen
:n, deren Tangenten auf n Paaren von Geraden Dreiecke
neiden, für welche die Summe der Umfänge constant ist.

)ie Curven sind Unicursalcurven einer gewissen, der m^{ten} Klasse,
e die unendlich ferne Gerade zur $(m-2)$-fachen Tangente
. In besonderen Fällen wird jene Gerade zur $(m-1)$-fachen
:nte, und dann gehen die vorliegenden Curven in die vom

Verfasser in einer Note „Sur une classe de courbes unicursale (cfr. das vorhergehende Referat) betrachteten über. Rg.

E. Mahler. Zur Theorie der Kegelschnitte. Hoppe Ar LXVIII. 78-84.

In dem vorliegenden Aufsatze beschäftigt sich der Verfass mit einer Verallgemeinerung des Problems, welches den Gegen stand einer frühern Arbeit „Ueber gewisse Systeme von Kegel schnitten“ (Hoppe Arch. LXVI. 358 ff., siehe F. d. M. XIII. (1881 477) bildet, und so ausgesprochen werden kann: „Es soll ei Curvensystem von der Eigenschaft gesucht werden, dass das vo einem beliebigen Punkte des Systems an eine Curve des Kegel schnittbüschels $K-\lambda K'=0$ gezogene Tangentenpaar durch da an einen der Fundamentalkegelschnitte des Büschels gezogene Tangentenpaar nach constantem Doppelverhältnis geteilt wird.“ Das betreffende Curvensystem ist ein System von C_4, von denen jede die Eigenschaft hat, dass ihre Schnittpunkte mit den Seiten des den Kegelschnitten des Büschels gemeinschaftlichen, sich selbst conjugirten Dreiecks sich in zwei Punktepaare grup- piren, die durch die Ecken jenes Dreiecks harmonisch geteilt werden.

Jedem der beiden Kegelschnitte K und K_1 ist hiernach ein solches System zugeordnet. Bezieht man diese Systeme dadurch aufeinander, dass man zwei Curven desselben λ einander zu- ordnet, so erzeugen sie eine C_{32}. Rg.

E. Mahler. Zur Theorie der Curven grader Ordnung. Hoppe Arch. LXIX. 108-110.

Es wird der Satz bewiesen: „Das Erzeugnis eines Curven büschels n^{ter} Ordnung und einer mit ihm projectivischen Tangen ten-Involution auf einem Kegelschnitte ist eine Curve von der Ordnung $2(n+1)$“; dann wird die Construction der $2(n+1)$ Schnittpunkte des Erzeugnisses mit einer Geraden $\mathfrak{G}$ gezeigt und folgende Eigenschaft der genannten Curve hergeleitet: „Die Curve

in jedem der n' Scheitelpunkte des Büschels B, sowie in m der $(n+1)$ gemeinsamen Elemente der auf der Involutions-𝔖 befindlichen conlocalen Punktreihen, welche die Schnitt-kte zweier zu einem Tangentenpaare gehörenden Tangenten rseits und die Schnittpunkte der 𝔖 mit den Curven des chels B andererseits bilden, einen Doppelpunkt."

H.

LL. Zur Tangentenconstruction der Astroide. Hoppe Arch. LXVII. 447-448.

Der Verfasser leitet für die Astroide, welche als Enveloppe r constanten Strecke, deren Endpunkte auf zwei beliebigen den sich bewegen, entsteht, auf analytischem Wege eine truction des Berührungspunktes der Strecke mit der Astroide welche auf kinematischem Wege sich unmittelbar ergiebt.

W. St.

BELLERMANN. Ueber Rouletten, welche entstehen, enn eine Cycloide auf einer andern rollt. Festschrift u dem 50-jährigen Jubiläum der Königstädtischen Realschule zu Berlin. . 215-240.

In seiner Schrift „Epicycloiden und Hypocycloiden" (1867 eritz'sche Buchhandlung) hat der Verfasser diese Curven als netrischen Ort der Eckpunkte eines Parallelogramms mit un-nderlichen Seiten nachgewiesen, dessen einer Eckpunkt fest während sich die beiden ihm benachbarten Ecken mit gleich-igen, aber von einander verschiedenen Winkelgeschwindig-en um die feste Ecke in Kreisen bewegen. Die beiden in dem n Punkte zusammentreffenden Seiten, d. h. also die Halbmesser Kreise, werden „Deferenten" genannt. Der vierte Eckpunkt e hier passend als „Summe" der Deferenten zu bezeichnen. ersucht wird nun diejenige Bewegung eines ebenen unver-erlichen Systems, bei der eine gemeine Cycloide, Epi- oder ocycloide auf einer festen Curve dieser drei Arten rollt,

jedoch soll die Bogenlänge von einem Rückkehrpunkt zum fo den bei beiden Curven dieselbe sein. Die Curven, welch einzelnen Systempunkte beschreiben, nennt der Verfasser „Cycl zweiter Ordnung", weil, wie er nachweist, dieselben durch Punkt gleich der Summe von drei Deferenten beschrieben we Ebenso kann man Cycloiden n^{ter} Ordnung bilden. Uebri kann eine Cycloide zweiter Ordnung, wie eine gewöhnliche, Umständen eine gerade Linie werden. Rollt eine Kardioide auf einer eigentlichen Cycloide mit gleichem Bogen, so besch ihr Rückkehrpunkt die Basis dieser Cycloide. Rg

---

Chr. Wiener. Die Evoluten der geschweiften verschlungenen cyklischen Curven. Schlömilch Z. X 129-140.

Die Arbeit kann als eine Fortsetzung einer früheren Verfassers in Schlömilch Z. XXVI. p. 257 angesehen we (s. F. d. M. XIII. (1881) 559), woselbst u. a. die doppelte stehungsweise der betrachteten Curvenspecies allgemein gewiesen wird. In dem vorliegenden Aufsatze wird stets jenige Entstehungsweise gewählt, bei der das Verhältnis de soluten Werte der Halbmesser des wälzenden Kreises w und festen f das kleinere ist. In wesentlich geometrischer Weise den die Singularitäten der primären Curve sowohl, als auch ihrer Evoluten bestimmt. Die Constructionen lassen sich wohl in Kürze wiedergeben. Rg.

C. Besondere räumliche Gebilde.

Th. Reye. Das Problem der Configurationen. Act. I. 93-96.

Der Verfasser giebt folgende Definitionen: „Eine Config tion n_i in der Ebene besteht aus n Punkten und n Gerade solcher Lage, dass jede der n Geraden i von den n Pun enthält, und durch jeden der n Punkte i von den n Ger

...en." „Eine räumliche Configuration n_i besteht aus n Punkten ... n Ebenen in solcher Lage, dass auf jeder der n Ebenen i ... den n Punkten enthalten sind, und durch jeden der n Punkte i ... den n Ebenen gehen. Diese Configuration wird genauer ...ichnet durch (n_i, g_k), wenn zu ihr noch g Gerade gehören, ...mit je k der n Punkte und je k der n Ebenen incident sind." ... Das Problem der Configuration verlangt nun, dass alle ver...denartigen zu den Zahlen n und i gehörigen Configurationen ...ittelt, und dass ihre wichtigsten Eigenschaften aufgesucht ...rden. W. St.

... VICTOR. Die harmonische Configuration 24_4.
...reiburg. Ber. VIII. 2.

Die Note enthält die Eigenschaften einer räumlichen Configu...n von 24 Punkten, 24 Ebenen, 18 Geraden, wo ein Punkt ... Gerade und neun Ebenen, eine Ebene drei Gerade und neun ...kte, eine Gerade vier harmonische Punkte und vier harmo...e Ebenen trägt. Sie giebt damit einen Beitrag zu der Lehre ... der factischen Construction und dem Studium einzelner Con...rationen. Giebt es sechs Quadrupel separirter Punkte, so ...tet sich die 24_4 in zwei 12_3 (cfr. Reye Acta math. I. 97), die ...nder eingeschrieben sind. Die Ebenen der einen sind die ...gonalebenen der anderen. Dieses schon öfter aufgetretene ...nanderschachteln zweier Configurationen kann man zu einem ...nden Principe machen. In 24_4 sind 24 Hexaeder und 24 ...aeder nachzuweisen. Je ein Oktaeder ist in ein Hexaeder ...eschrieben. Ferner sind die Verwandtschaften bemerkenswert, ...enen 24_4 sich selbst entspricht: 24 perspectivische involuto...che Collineationen, neun geschaart involutorische Collinea...en, zwölf Nullsysteme (mit Bewahrung jeder 12_3), $24+9$ ...rsysteme (mit Vertauschung der 12_3); allgemein 1152 Col...ationen und ebensoviele Correlationen. Die Kernflächen der ...rsysteme werden betrachtet. Eine sehr durchsichtige Form ...t ein Würfel mit einem eingeschriebenen regulären Oktaeder.

Kr.

H. Schröter. Ueber cyklisch projective Punktquadrup in zwei collinearen Räumen. Klein Ann. XX. 231-254.

Es werden in diesem Aufsatze zwei collineare Räume b trachtet, für welche cyklisch projective Punktgruppen existire und bei welchen die Zahl der einer Gruppe angehörigen Punk gleich vier ist. Zunächst wird folgender Satz bewiesen: „We zwei collineare Räume derart liegen, dass einmal von vier Paar entsprechender Punkte $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_1$ die Punkte $\mathfrak{a} =$ $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{a}_1$ incident sind, so ist dies immer d Fall, d. h. wenn man, die collineare Beziehung in beiderlei Si aufgefasst, mit einem beliebigen Punkte $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}_1$ beginnt, de entsprechenden $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}_1$, den zu $\mathfrak{z}_1$ entsprechenden $\mathfrak{z} = \mathfrak{t}_1$ und de zu $\mathfrak{t}_1$ entsprechenden $\mathfrak{t}$ ermittelt, so coincidirt dieser mit $\mathfrak{x}_1$." E sind somit die sämmtlichen Punkte und Ebenen des Raumes z Quadrupeln angeordnet. Irgend zwei Quadrupel bilden allema zwei Tetraeder, die gleichzeitig auf vier verschiedene Arten hyperbolisch liegen. Werden je zwei entsprechende Punkte eines Quadrupels durch Gerade verbunden, so entsteht ein windschiefes Vierseit, dessen Diagonalen zwei feste sich selbst entsprechende Geraden s un s' treffen. Die gegenüberstehenden Ecken eines solchen Vierseits sind stets entsprechende Punkte in einem ge schaart involutorischen Systeme, dessen Axen s und s' sind. Auf jeder dieser Axen s und s' selbst befindet sich eine Involution entsprechender Punkte der collinearen Räume. Zum Schluss wird gezeigt, dass und auf welche Weise zwei gegebene coll neare Räume in Quadrupellage gebracht werden können.

W. St.

Ad. Schumann. Eine allgemeine Beziehung zwischen fünf Punkten des Raumes. Schlömilch Z. XXVII. 368-369.

Bildet man aus je vier von fünf Punkten des Raumes ei Tetraeder und bestimmt den Potenzwert des fünften gegen di diesem Tetraeder umschriebene Kugel, so hat das Product au dieser Potenz und dem Volumen des Tetraeders denselben a

ten Zahlenwert, wie man auch die fünf Punkte zu vier com-
iren mag.

Der absolute Wert der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, & x_1, & y_1, & z_1, & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_5^2 + y_5^2 + z_5^2, & x_5, & y_5, & z_5, & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 . V_{hklm} P_n,$$

h, k, l, m, n die Zahlen von 1 bis 5 in irgend einer Reihen-
e bedeuten. Darin liegt der Satz. Rg.

THIEME. Zur Geometrie des Tetraeders. Schlömilch Z. XXVII. 56-61.

Der Ausgangspunkt dieser Untersuchung über das Tetraeder die Bestimmung des Ortes derjenigen Punkte, deren orthogo-e Projectionen auf die Ebenen des Tetraeders Punkte der-en Ebene sind. Dieser Ort, eine Fläche dritter Ordnung, von Geiser und Hankel bereits ausführlich untersucht worden. Verfasser gelangt durch elementare Betrachtungen zu einigen ndeigenschaften der Fläche und den Beziehungen besonderer kte derselben zu ihren Projectionen auf alle Tetraeder-Ebenen. rgiebt sich: Errichtet man auf allen Ebenen eines Tetraeders s ihrer Schnitte mit einer fünften Ebene senkrechte Ebenen verbindet dann jede Tetraederecke mit dem Schnittpunkte drei auf den Ebenen der Ecke senkrechten Ebenen durch gerade Linie, so schneiden sich diese vier Verbindungslinien einem Punkte, dessen Projectionen auf die Ebenen des Te-ders die Ecken eines ebenen Viereckes sind. Es giebt drei de Linien im Raume mit der Eigenschaft, dass die Projectionen s ihrer Punkte auf die Ebenen eines Tetraeders die Ecken s Trapezes sind, und drei Punkte im Raume, für welche die Projectionen die Ecken eines Parallelogramms sind. Die zu den Gegenkantenpaaren eines Tetraeders gehörigen ortho-alen Hyperboloide schneiden sich in einer Raumcurve, welche auf dem Höhenhyperboloide liegt. W. St.

H. Vogt. Ueber die Kugeln, welche ein räumlic Vierseit berühren. Kronecker J. XCII. 328-342.

In synthetischer Form wird eine Reihe von Relationen wickelt, welche sich auf ein räumliches Vierseit beziehen, des Seiten von einer Kugel berührt werden. Die wesentlichen gebnisse sind folgende:

Sind a_1 und a_2 zwei feste Tangenten einer Kugel, so gi es zwei Schaaren von Tangenten, welche sich an jene beid festen Tangenten anlehnen. Die eine Schaar der Tangenten hat ihre Berührungspunkte auf einem festen Kreise β, die and der Tangenten c auf einem festen Kreise γ. Beide Kre schneiden sich rechtwinklig. Sind m_b und m_c die Mittelpunk jener Kreise, M aber der Mittelpunkt der Kugel, so lassen si jene Tangentenschaaren als Regelschaaren von zwei Rotation hyperboloiden B und Γ auffassen, deren Axen bezüglich Mm_b u Mm_c sind. Die festen Tangenten a_1, a_2 gehören der ander Regelschaar der Hyperboloide an. Im Allgemeinen giebt es ke Relation zwischen den Seitenlängen eines räumlichen Tangent vierseits; nur in dem Falle, dass die vier Berührungspunkte einer Ebene gelegen sind, ist die Summe zweier Seiten gl der Summe der beiden anderen. Die Criterien, wie diese Su men zu bilden sind, werden angegeben. Ist das räumliche V seit keiner Bedingung unterworfen, so giebt es im Allgemei acht Kugeln, welche seine Seiten berühren; ist dagegen Summe zweier Seiten gleich der Summe der beiden anderen, wird das Vierseit von unendlich vielen Kugeln berührt, de Mittelpunkte auf einer Geraden liegen; ausserdem aber giebt noch vier Berührungskugeln, welche dieser Schaar nicht gehören.

Der letzte Teil der Arbeit beschäftigt sich mit den Tetraed welche mit ihren sechs Kanten eine Kugel berühren. Wählt zwei Tangenten a_1, a_2 willkürlich, so können diese im Allgemei nicht als Gegenkanten eines solchen Tetraeders aufgefasst den; sie können es nur dann, wenn sie gegen die Kreise $\beta\gamma$ denen sie Veranlassung geben, unter einem Winkel von 45

ıigt sind. Ist diese Bedingung aber erfüllt, so giebt es unlich viele solcher Tetraeder, welche a_1 und a_2 zu Gegenkanten en. Ist a_1 gewählt, so bestimmt jeder Punkt der Kugel eine gente a_2 eindeutig, welche mit a_1 zugleich ein derartiges aeder zulässt; für jeden Punkt des Raumes aber giebt es i Tangenten a_2 an die Kugel, welche mit a_1 zugleich jene lingung erfüllen. Ebenso giebt es in jeder Ebene zwei derge Linien. Schn.

BRUNO. Sui quadrilateri sghembi circoscritti ad una uadrica. Torino Atti XVII. 35-45.

Durch eine synthetische Untersuchung wird nachgewiesen, an Stelle des bei Poncelet (Traité des propriétés proj. p. 78) hnten Satzes, dass die Berührungspunkte eines der Fläche :en Grades umschriebenen räumlichen Vierseits stets in einer e liegen, der folgende treten muss.

„Die Berührungspunkte aller vierten Seiten eines um eine he zweiten Grades F beschriebenen räumlichen Vierseits, ın drei erste Seiten dieselbe in gegebenen Punkten A_1, A_2, A_3 hren, liegen auf den vier (reellen) Kegelschnitten, welche h die Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_2 S$, $A_1 A_3 S$, $A_2 A_3 S$ mit F bent werden, falls S der Pol der Ebene $A_1 A_2 A_3$ in Bezug F ist.“ Referent bemerkt hierzu, dass dieser Satz einer liegenden Verallgemeinerung fähig ist. V.

ARDINAAL. Zur Construction einer Oberfläche zweiter rdnung. Schlömilch Z. XXVII. 119-122.

Es wird im Anschluss an die von Chasles gegebene Contion einer Fläche zweiter Ordnung aus neun bekannten :ten die Aufgabe gelöst: „Die Fläche zu construiren, wenn Punkt und die Punktinvolutionen von conjugirten Punkten glich der Fläche auf drei Geraden gegeben sind.“

W. St.

Fr. Graefe. Erweiterung eines Satzes von Hesse über Sechsecke im Raume. Kronecker J. XCIII. 87-88.

Hesse betrachtet (Borchardt J. LXXXV. 304-317) ein beliebiges Sechseck und zeigt, wie sich aus diesem mit Hülfe eines nach Willkür gewählten Punktes ein ihm eingeschriebenes Brianchon'sches Sechseck bestimmen lasse, welches durch ein Hyperboloid ein neues Brianchon'sches Seckseck liefere, das dem ursprünglichen eingeschrieben ist. Graefe zeigt, dass neben dem ursprünglichen Brianchon'schen Sechseck noch drei weitere Brianchon'sche Sechsecke existiren, welche denselben Brianchon'schen Punkt haben, und von denen jedes unzweideutig ein Hyperboloid bestimmt, auf dem es liegt. Durch Verbindung des Satzes von Hesse mit dem des Verfassers erhält man acht Brianchon'sche Sechsecke, vier Hyperboloide und zwei Brianchon'sche Punkte; je zwei Brianchon'sche Sechsecke liegen auf einem und demselben Hyperboloide. Rg.

G. A. Bordiga. Alcuni teoremi sulle quadriche analoghi a quello di Pascal nelle coniche. Ven. Ist. Atti (5) VII 1253-1261.

Es werden hier einige Sätze über Flächen zweiter Ordnung abgeleitet aus dem bekannten Theoreme: „Wenn der Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung eine auf einer Fläche zweiten Grades gelegene Curve sechster Ordnung enthält, so ist der Rest des Schnittes der ersten Flächen eine ebene Curve.“

W. St.

A. Rasche. Untersuchung der Flächen zweiten Grades welche durch zwei windschiefe Gerade gehen. Diss. Münster.

Eine sehr eingehende synthetische Untersuchung des im Titel genannten dreistufigen Systems von Flächen zweiten Grades. Von den Resultaten mögen hier folgende Platz finden. D

?olarebenen eines Punktes in Bezug auf alle Flächen des
ems haben einen Punkt gemeinsam, und umgekehrt bilden
∞^3 Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen des Systems
Ebene; so dass also auch die Mittelpunkte aller dieser
hen eine Ebene bilden. Construirt man zu je zweien von
Strahlen einer Regelschaar die ihnen gemeinsamen Lote,
legt man durch die Mitten der entstandenen drei Lote die
nen senkrechten Ebenen, so erhält man drei Ebenen, welche
im Mittelpunkte der Fläche zweiten Grades schneiden, die von
Regelschaar erzeugt wird. Die Axen aller ∞^3 durch zwei Ge-
gehenden Flächen zweiten Grades bilden einen Complex
ten Grades. Durch je zwei Punkte des Raumes gehen drei
System dieser ∞^3 Flächen angehörige orthogonale Hyper-
ide. Die Mittelpunkte der Rotationsflächen des Systems er-
n zwei rechtwinklige Gerade. Der Ort der Scheitel der
tlichen Paraboloide des Systems ist eine geradlinige Fläche
er Ordnung, die das gemeinsame Lot der beiden das System
ngenden Geraden zur Doppelpunktslinie hat. Scht.

Rupp. Ueber die auf Flächen zweiten Grades liegen-
en gleichseitigen Hyperbeln. Wien. Ber. LXXXVI. 909-918.

Für die Untersuchung wird der folgende geometrische Satz
endet: „Die Geraden, welche zwei Kegelschnitte K_1 und K_2
ier harmonischen Punkten schneiden, berühren einen Kegel-
itt K_3. Die Tangenten von K_1 und K_2 in den vier Grund-
kten der Kegelschnitte sind auch Tangenten von K_3, und
so ist auch das beiden Kegelschnitten gemeinsame Tripel
Tripel bezüglich K_3. Der dem Kegelschnitt K_3 in Bezug auf
polare Kegelschnitte K_4 geht durch die Grundpunkte a, b, c, d
besitzt ebenfalls als Tripel das Dreieck mnp." Indem nun-
r für K_1 der imaginäre Kugelkreis im Unendlichen, für K_2 der
dlich ferne Kegelschnitt einer Fläche zweiten Grades ge-
t wird, ergeben sich folgende Sätze:

„Die Ebenen, welche durch einen beliebigen Punkt im Raume

gehen und eine gegebene Fläche zweiten Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, umhüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Axen zu jenen der gegebenen Fläche parallel sind, und dessen Focallinien auf den Kreisebenen der gegebenen Fläche senkrecht stehen.“

„Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller auf einer Fläche zweiten Grades liegenden gleichseitigen Hyperbeln ist ein mit dieser Fläche concentrischer, coaxialer und concyklischer Kegel zweiten Grades, d. i. ein Kegel, welcher mit der gegebenen Fläche die Kreisebenen gemein hat.“

„Der geometrische Ort der Schnittpunkte auf einander senkrechter Erzeugender eines windschiefen Hyperboloids ist jener sphärische Kegelschnitt, welcher durch die zugehörige Monge'sche Kugel aus dem Hyperboloid ausgeschnitten wird.“ (Die Monge'sche Kugel bildet den Ort der Schnittpunkte je dreier auf einander senkrechter Tangentialebenen einer Fläche zweiten Grades.)

Zum Schluss wendet sich der Verfasser zu dem singulären Gebilde des hyperbolischen Paraboloids und zeigt, welche Formen die obigen Sätze für eine derartige Fläche annehmen.

Schn.

A. Mannheim. Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure principaux. Résal J. (3) VII. 167-173.

Es sei m ein Punkt in einer Fläche zweiten Grades, und die Tangentialebene in ihm schneide die Axen in den Punkten x, y, z. Zieht man in dem Dreieck xyz durch m parallele Gerade zu den Seiten des Dreiecks, so bilden diese mit den Strahlen mx, my, mz drei Paar conjugirter Durchmesser der Indicatrix und die Aufgabe, die Axen derselben zu construiren, ist darauf zurückgeführt, aus zwei Paaren conjugirter Durchmesser eines Kegelschnitts seine Axen durch Construction herzustellen. Die Axen stehen mit den Punkten m, x, y, z in interessanten Relationen. Legt man nämlich durch diese vier Punkte eine glei

ge Hyperbel, so laufen die Axen der Indicatrix parallel den nptoten dieser Hyperbel. Andererseits sind die Axen der catrix Tangenten der Parabel, welche dem Dreieck x, y, z eschrieben ist, und welche zur Directrix die Gerade hat, die Punkt m mit dem Fusspunkt des Lotes vom Centrum der he auf die Tangentialebene verbindet.

Im Anschluss an diese geometrischen Beziehungen wird der entwickelt, dass die drei Normalen N, N', N'' der drei ofocalen Flächen, welche durch den Punkt m gehen, durch Hauptebenen in proportionale Abschnitte geteilt werden. Sind e Durchschnittspunkte bezüglich a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'', teht das Krümmungscentrum μ_1 auf der Normale N zu a, b, c erselben Beziehung, wie der Punkt m zu a', b', c'; das an- Krümmungscentrum μ_2 aber, welches auf N gelegen ist, hat elbe Beziehung zu a, b, c, wie der Punkt m zu den Punkten $'', c''$.

Hieraus wird folgende Construction der Krümmungscentra den Punkt m gewonnen. Durch die Punkte a, a', a'' ziehe perpendiculäre Ebenen bezüglich zu N, N', N''; diese Ebenen eiden sich in einem Punkte α. In derselben Weise führen Punkte b, b', b'' zu einem Punkte β. Die Projectionen der den $\alpha\beta$ auf die Hauptschnitte (NN') und (NN'') schneiden Normale N in den Krümmungscentren. Dieselbe Gerade $\alpha\beta$ t zu den Krümmungscentren der beiden anderen homofocalen hen, welche durch m bestimmt sind. Construirt man daher er obigen Form aus den Punkten a, a', a'' den Punkt α, aus b'' den Punkt β und aus c, c', c'' den Punkt γ, so liegen die Punkte α, β, γ in ein und derselben Geraden Δ, und die Pro- onen von Δ auf die drei Ebenen, welche die drei Normalen $', N''$ zu je zweien bestimmen, treffen diese Normalen in den nmungscentren der drei homofocalen Flächen. Schn.

. Peschka. Neue Eigenschaften der Normalenflächen ir Flächen zweiten Grades längs ebener Schnitte.

ien. Ber. LXXXV. 381-407.

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung früherer Publicationen des Verfassers, der sich seit langer Zeit mit Problemen der vorliegenden Art beschäftigt. (Man vergl. die Arbeiten: „Beitrag zur Theorie der Normalenflächen“ Wien. Ber. LXXXII. 1880, „Normalenfläche einer Developpabeln längs ihres Durchschnittes mit einer krummen Fläche“ Wien. Ber. LXXXIII. 1881, „Normalenfläche einer krummen Fläche längs ihrer Schnitte mit einer andern krummen Fläche“ Wien. Ber. LXXXIV. 1881, s. F. d. M. XII. 509, 526; XIII. 515.).

Wie ersichtlich, ist die zu untersuchende Fläche identisch mit der Normalenfläche des Tangentenkegels an dem gegebenen ebenen Schnitte. Zunächst wird die Ebene desselben vollkommen allgemein, später senkrecht zu einer Hauptebene gewählt. Während im ersten Falle die Fläche als Doppelcurve eine eigentliche Raumcurve dritter Ordnung besitzt, ist diese für den herangezogenen Specialfall in einen Kegelschnitt und eine Gerade ausgeartet, welche sich in einem Punkte treffen. Ausserdem schneidet der Doppelkegelschnitt die Leitcurve und steht senkrecht zur ausgezeichneten Hauptebene. Als Ordnung findet sich 4.

Aus der grossen Reihe der rein geometrisch entwickelten Sätze führen wir noch die folgenden an:

a) für die Fläche eines beliebigen Leitkegelschnitts:

„Die Cuspidalcurve der doppelt berührenden Developpablen ist eine cubische Parabel.“

„Eine jede doppeltberührende Ebene der Normalenfläche wird von sämmtlichen andern doppeltberührenden Ebenen in Geraden geschnitten, welche eine Parabel umhüllen.“

„Alle doppeltberührenden Ebenen schneiden die Fläche in Kegelschnitten, und umgekehrt. Die Mittelpunkte dieser sämmtlichen Kegelschnitte sind auf jener Geraden gelegen, welche durch den Mittelpunkt des Leitkegelschnittes geht und zur Ebene desselben senkrecht steht.“

„Die Ebenen aller dieser Kegelschnitte schneiden die Erzeugenden der Normalenfläche in ähnlichen Punktreihen.“

„Die Punkte der Doppelcurve C_3 werden aus sämmtlichen

ugenden der Normalenfläche durch projectivische Ebenenchel projicirt."

„Die Orthogonalprojectionen der vier Torsallinien einer Nornfläche auf die Ebene des Leitkegelschnitts sind die von Projection des Kegelscheitels aus gezogenen Normalen des Kegelschnitts."

b) für den angezogenen Specialfall:

„Die Paare von Erzeugeuden, welche sich in Punkten des elkegelschnittes schneiden, treffen die Doppelgerade in conten Punkten einer Involution."

„Die Normalenfläche besitzt vier Torsallinien, von welchen immer reell sind, und zwar sind dies jene Normalen des Kegels in den Endpunkten derjenigen Axe des Leitkegelitts, welche gleichzeitig in der oben genannten Hauptebene ."

„Die der Normalenfläche doppelt umschriebene Developpable on der dritten Klasse und zerfällt in ein Ebenenbüschel und parabolischen Cylinder. Die Axe des ersteren ist die elgerade; die Erzeugenden des zweiten stehen auf der Ebene des Leitkegelschnitts senkrechten Hauptebene des Kegels normal, sind mithin zu der Ebene des Leitkegelschnitts llel."

Da auf jeder Erzeugenden drei Punkte mit ihren Tangentenen, nämlich 1) der Schnittpunkt mit dem Leitkegelschnitt, er Schnittpunkt mit der Doppelgeraden, 3) der unendlich Punkt als gegeben betrachtet werden können, so ist dain jedem vierten Punkt die Tangentenebene einfach conrbar."

Den Schluss der Abhandlung bildet die Untersuchung der alenfläche eines Kegels längs eines Querschnittes, welcher ner Focallinie senkrecht steht. Für die Doppelcurve ergiebt das Resultat:

„Die horizontale Projection eines Teils der Doppelcurve ist Kegelschnitt, welcher durch den zweiten (nicht auf der auschneten Focallinie liegenden) Brennpunkt F des Leitkegeltts und durch den vierten harmonischen Punkt zu den beiden

Brennpunkten und dem Schnittpunkte der Hauptaxe mit der Directrix geht." Rg.

A. Adler. Ueber Strictionslinien der Regelflächen zweiten und dritten Grades. Wien. Ber. LXXXV. 359-380.

Auf synthetischem Wege werden die Strictionslinien der beiden Regelschaaren eines Hyperboloids construirt, und es wird nachgewiesen, dass dieselben Raumcurven vierter Ordnung zweiter Species sind. Zum Schlusse werden die Charaktere der Strictionslinie einer Regelschaar dritten Grades angegeben.

W. St.

H. Thieme. Zur Construction des Polarsystems einer Fläche dritter Ordnung. Klein Ann. XX. 144-146.

W. St.

L. Geisenheimer. Ueber den Mittelpunkt der Raumcurven dritter Ordnung. Schlömilch Z. XXVII. 321-330.

Anschliessend an die Untersuchungen Schröter's in seiner „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung etc." über die Durchmesser der cubischen Raumcurve giebt der Verfasser eine Definition des Mittelpunktes der Curve. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte in den Schmiegungsebenen, deren Tangenten von den übrigen Schmiegungsebenen ausgeschnitten werden, liegen auf einem Kegelschnitte $\mu^{(2)}$, in dessen Ebene drei Durchmesser der Curve liegen. Sie treffen einander in einem Punkte, welcher Mittelpunkt von C^3 genannt wird. Der Verfasser teilt eine Reihe von Eigenschaften dieses Punktes bezüglich der cubischen Raumcurve mit. W. St.

Hurwitz. Beweis eines Satzes aus der Theorie der aumcurven dritter Ordnung. Klein Ann. XX. 135-138.

„Liegen die acht Ecken zweier Tetraeder auf einer Raum-e dritter Ordnung E, so sind die acht Seitenflächen dieser aeder Schmiegungsebenen einer zweiten Raumcurve dritter nung U; es giebt dann, ausser jenen zwei, noch unzählig andere Tetraeder, welche der Raumcurve E ein-, der Raum-e U umschrieben sind, und zwar ist jeder Punkt der ersten mcurve Eckpunkt eines dieser unzählig vielen Tetraeder.“ en Satz fand der Verfasser 1875, während er als Secundaner e's Geometrie der Lage in sich aufnahm, und teilte ihn dann Referenten, seinem damaligen Lehrer, mit. Später hat der asser den Satz in einem andern Zusammenhange, nämlich einer Note „über unendlich-vieldeutige geometrische Aufgaben, esondere über die Schliessungsprobleme“ veröffentlicht. Hier ist der ursprüngliche Secundanerbeweis mitgeteilt, der sich u an die in der reinen Geometrie der Lage übliche Behand-sweise der Raumcurven dritter Ordnung anschliesst. Es nämlich, wenn $A, B, C, D, A', B', C', D'$ die Ecken, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ $', \gamma', \delta'$ die Seitenflächen der beiden Tetraeder bedeuten, jeder ne durch A diejenige Ebene durch A' zugeordnet, welche sie iner Secante der Raumcurve schneidet. Die so in A und A' tehenden collinearen Ebenenbündel schneiden die Ebenen α' α in zwei collinearen Strahlenfeldern, welche durch die Ver-ungsebenen von sich treffenden und einander entsprechenden hlen eine zweite Raumcurve U erzeugen, indem jede solche bindungsebene Schmiegungsebene von U wird. Die Erkennt-dass die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ Schmiegungsebenen U sein müssen, liefert den Beweis des ersten Teils des Satzes. zweite Teil des Satzes wird darauf gestützt, dass zwei iegungsebenen von U, welche durch einen Punkt von E n, sich längs einer Secante von E schneiden.

Scht.

G. v. Escherich. Die Construction der algebraischen Flächen aus der Anzahl der sie bestimmenden Punkte mittelst reciproker Flächenbündel. Wien. Ber. LXXXV. 526-533.

In einer früheren Arbeit (siehe F. d. M. IX. (1877) p. 546) hatte der Verfasser gezeigt, wie sich bei der Construction einer durch die erforderliche Zahl gegebener Punkte bestimmten algebraischen Fläche durch reciproke Flächenbündel die Maximalzahl der in die Knotenpunkte dieser Bündel aufzunehmenden Punkte angeben lässt. Nach der Bemerkung, dass grade diese Maximalzahl den gegebenen Punkten wirklich entnommen werden muss, wird insbesondere die Aufgabe behandelt, eine Fläche $(n+p)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche sich durch zwei reciproke Bündel r^{ter} und p^{ter} Ordnung erzeugen lässt, und bei welcher die Maximalzahl der verfügbaren Knotenpunkte $\gtreqless$ als die Zahl der Knotenpunkte in der Basis des Büschels p^{ter} Ordnung ist, zu construiren; und durch ein successives Verfahren, welches dem schon in der früheren Arbeit benutzten ähnlich ist, wird diese Aufgabe reducirt auf das folgende einfache Problem: Zu einem gegebenen Strahlenbündel einen reciproken derart zu construiren, dass jede Ebene des letzteren, welche einem von acht gegebenen Strahlen des ersteren entspricht, durch einen ihr zugewiesenen Punkt gehe. Eine ausführlichere Darlegung des Gegenstandes beabsichtigt der Verfasser demnächst zu geben. V.

G. v. Escherich. Die Construction der algebraischen Curven und Flächen aus der Anzahl der bestimmenden Punkte mittelst reciproker linearer Systeme höherer Stufe. Wien. Ber. LXXXV. 893-906.

Die Arbeit knüpft an frühere Untersuchungen des Verfassers in den Bänden LXXV. und LXXXV. an, in denen die Möglichkeit der Darstellung algebraischer Flächen und Curven als Erzeugnisse linearer reciproker Systeme höherer Stufe nachgewiesen wird. Hieraus erwächst nun die Aufgabe, derartige Systeme zu

n ihrer Bestimmung notwendigen Anzahl von Punkten herlen. Es wird nun gezeigt, wie sich auf diesem Wege die en zweiter bis vierter Ordnung mit alleiniger Hülfe von l und Lineal punktweise construiren lassen. Was die Conion der höheren Flächen anlange, so sei dieselbe mit den gebenen Mitteln bisher nicht erreicht worden und auch nach vorliegenden Methoden unmöglich. Doch behält sich der isser vor, auch diese auf der Grundlage eines Satzes der smann'schen Ausdehnungslehre in einer späteren Arbeit zu igen. Rg.

Reye. Ueber das Strahlensystem zweiter Klasse chster Ordnung von der ersten Art. Kronecker J. XCIII. -87.

In Band LXXXVI. p. 84 des Borchardt'schen Journals e F. d. M. X. 1878. p. 420) hatte Herr Reye die algebrai- Systeme zweiter Ordnung ohne Brenncurven eingehend etisch behandelt, dabei aber noch die erste Art der Strahlenme zweiter Ordnung sechster Klasse ausschliessen müssen. wird diese Lücke ausgefüllt und gezeigt, dass das genannte lensystem, ebenso wie die Strahlensysteme zweiter Ordnung er bis fünfter Klasse, durch die Schnittlinien homologer entialebenen zweier collinear verwandter Flächen zweiter e erzeugt werden kann. Aus dieser Erzeugungsart werden seits die von Herrn Kummer gefundenen Eigenschaften, erseits auch noch manche neue Eigenschaften abgeleitet. n letzteren gehören z. B. die, dass die sechs Strahlen, welche Strahlensystem zweiter Ordnung sechster Klasse auf jede e wirft, immer sechs Tangenten eines und desselben Kegeltts sind, und dass dieses Strahlensystem in einem tetraedralen lencomplex zweiten Grades liegt. Statt des genannten lensystems nimmt jedoch der Verfasser das ihm dual entende Strahlensystem als Object seiner Untersuchung. Ausser Resultaten, welche aus den schon erwähnten durch duale tragung hervorgehen, mögen hier noch folgende Platz finden.

theorie für den allgemeinen Complex zweiten Grades entw
und im Zusammenhang damit die Schur'sche Erzeugungsa
wiesen, bei welcher der Complex zweiten Grades durch d
Schnitte entsprechender Elemente zweier reciproker Bündel li
Complexe entsteht. Sch

F. Schur. Ueber eine besondere Klasse von Flä vierter Ordnung. Klein Ann. XX. 254-297.

Nachdem der Verfasser (in Klein Ann. XVIII. p.
siehe F. d. M. XIII. 1881. 490) durch Zusammenstellun
vier collinearen räumlichen Ebenensystemen eine gewisse
tung von Flächen vierter Ordnung, welche von 33 Cons
abhängen, construirt und gezeigt hat, dass jede solche
eine eindeutige Transformation in sich zulässt, stellt er n
Frage nach solchen collinear erzeugten Flächen vierter Or
für welche die zugehörige eindeutige Transformation der
in sich eine collineare ist. Gewissen Curven c_6, resp. g_4
müssen dann wieder gleichartige Curven entsprechen, w
im Allgemeinen einer c_6 oder g_4 eine Curve 14ter Ordnu
gehört. Hieraus muss man schliessen, dass die letztere
zerfällt und als Bestandteil acht feste Gerade von F^4 e
Es wird nun die Anordnung dieser zweimal acht Geraden
untersucht und folgendes Resultat gewonnen:

„Die allgemeinste Fläche vierter Ordnung, welche sich
vier collineare räumliche Systeme so erzeugen lässt, da
zugehörige eindeutige Transformation der Fläche in sic
collineare wird, erhält man dadurch, dass man durch die
zehn Schnittlinien der Seitenflächen zweier einfach hyperbol
liegender Tetraeder irgend eine Fläche vierter Ordnung
die durch die vier hyperboloidischen Lagen bedingten Bezie
der Seitenflächen der beiden Tetraeder gehen dabei durch cy
Vertauschung aus einander hervor. Die Fläche enthält
sechzehn andere gerade Linien, welche ebenfalls die Schnit
zweier vierfach hyperboloidisch liegender Tetraeder sind.
Fläche kann im Ganzen auf vier Arten collinear erzeugt w

allen vier Erzeugungen gehört dieselbe collineare Transforma-
zu; sie führt die Seitenflächen jener vier Tetraeder cyklisch
nander über."

Es werden nun solche F^4 aufgesucht, welche eine collineare
sformation in sich möglichst oft zulassen, was mit der Con-
tion zweier Tetraeder, welche möglichst oft hyperboloidisch
n, auf das engste zusammenhängt. Die Untersuchung wendet
deshalb zu solchen Tetraedern, und es wird gezeigt, dass
Unterarten solcher Lagen existiren. Die eine erhält man
zwei Tetraeder, welche neunfach hyperboloidisch liegen
einander gleichzeitig um- und eingeschrieben sind; die andere
zwei Tetraeder, welche achtfach hyperboloidisch liegen
zwei Quadrupel harmonischer Ebenen bilden. So ergeben
zwei Arten von F^4 mit folgenden Eigenschaften:

Erstens: „Jede Fläche vierter Ordnung durch die sechzehn
ittlinien der Seitenflächen zweier neunfach hyperboloidisch
nder Tetraeder enthält im Ganzen 52 gerade Linien. Die-
n gruppiren sich noch fünfmal zu je sechzehn zu den Schnitt-
der Seitenflächen zweier Tetraeder. Von diesen Tetraedern
n drei vierfach und zwei sechsfach hyperboloidisch. Die
he geht durch vierundzwanzig Collineationen in sich über;
von ihnen von der Periode vier entsprechen je vier colli-
en Erzeugungen der Fläche; vier anderen von der Periode
gehören als Axen vier ausgezeichnete Gerade der Fläche
Durch jede dieser vier Geraden gehen sechs Ebenen,
he die Fläche in vier Geraden schneiden; durch weitere
f gehen nur zwei solche Ebenen und durch die übrigen
sunddreissig je vier. Alle diese Geraden und Ebenen können
sein."

Zweitens: „Legt man durch die sechzehn Schnittlinien
er Quadrupel harmonischer Ebenen eine Fläche vierter Ord-
, so enthält dieselbe noch zweiunddreissig andere Linien,
he sich ebenfalls als die Schnittlinien von zweimal zwei
rupeln harmonischer Ebenen darstellen; die sechs Axen dieser
al zwei Quadrupel bilden die gegenüber liegenden Kanten
Tetraeders. Die Fläche lässt sich zwölfmal so durch col-

lineare ebene Systeme erzeugen, dass die zugehörige eindeutig Transformation der Fläche in sich eine lineare wird."

Die erste Unterart führt noch auf eine specielle Form von Flächen vierter Ordnung, welche vierundsechzig gerade Linien enthalten und durch 1152 Collineationen in sich übergehen.

W. St.

H. Schröter. Ueber eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species. Kronecker J. XCIII. 132-176.

Die Raumcurve, welche in diesem Aufsatze ausführlich betrachtet wird, entsteht als gemeinschaftlicher Schnitt dreier orthogonaler Hyperboloide. Es sei ein Tetraeder mit den Ecken $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ gegeben; durch je zwei Gegenseiten desselben lässt sich eine Regelschaar eines orthogonalen Hyperboloids als Schnitt je zweier durch diese Seiten gelegten auf einander senkrechten Ebenen bestimmen. Diese drei Hyperboloide gehören, wie hier bewiesen wird, einem Büschel an, d. h. sie schneiden sich in einer Raumcurve vierter Ordnung $C^{(4)}$. Der Ort der Punkte, von welchen aus gesehen, jedes der drei Paar Gegenkanten eines gegebenen Tetraeders unter rechtem Winkel erscheint, ist eine Raumcurve $C^{(4)}$ vierter Ordnung. Es folgt hieraus: Jede Ebene, welche einer Kante des Tetraeders normal steht, begegnet unserer $C^{(4)}$ in vier Punkten eines Kreises. Die Fusspunkte $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ der Höhen des Tetraeders in den Seitenflächen desselben liegen auf $C^{(4)}$. In jeder Ecke des Tetraeders schneiden sich drei Seitenflächen desselben und bilden ein Dreikant, dessen Höhenstrahl Tangente der Raumcurve $C^{(4)}$ in dieser Ecke ist. Nun ergiebt sich ein anderes Hyperboloid, welches $C^{(4)}$ enthält. Das gleichseitige Hyperboloid, auf welchem die vier Höhen des Tetraeders liegen, geht durch $C^{(4)}$, und die Berührungsebenen am Höhenhyperboloid in den Tetraederecken sind die Schmiegungsebenen von $C^{(4)}$ in diesen Punkten.

Mit Hülfe der acht nun bekannten Punkte von $C^{(4)}$ werden neue Punkte der Curve construirt und eine grosse Reihe von Sätzen über die gegenseitige Lage von Punktgruppen auf

e abgeleitet. So ergiebt sich: Die beiden Tetraeder 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 a, 𝔟, 𝔠, 𝔡 sind auf vier verschiedene Arten in hyperboloidischer . Das Poltetraeder O, O_1, O_2, O_3 der Curve und das ursprüng- Tetraeder 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 liegen auf vierfache Art perspectivisch. vier Centren liegen auf $C^{(4)}$ und liefern ein drittes Tetraeder, nes mit den beiden ersten ein sogenanntes desmisches System t.

Der Verfasser schliesst mit den Worten: „Indem ich hier- ie Untersuchung unserer Raumcurve $C^{(4)}$ vorläufig abschliesse, te ich nur noch auf die Ermittelung des particulären akters unserer $C^{(4)}$ gegenüber der allgemeinen Raumcurve r Ordnung erster Species die Aufmerksamkeit der Geometer n."

Dem Berichterstatter möge es gestattet sein, hieran fol- e Bemerkung zu knüpfen. Die hier betrachtete Curve t sofern von keinem particulären Charakter, als jede neine Raumcurve vierter Ordnung erster Species mit m Poltetraeder durch eine collineare Raumtransformation unendlich viele Arten in die specielle Form der von Schröter betrachteten Curve übergeführt werden kann. chten wir eine beliebige $C^{(4)}$ und bestimmen zu einem bigen Punkte 𝔄 derselben diejenigen drei Punkte 𝔅, ℭ, 𝔇 $C^{(4)}$, deren Verbindungsgerade mit 𝔄 gegenüber stehende en des zu $C^{(4)}$ gehörenden Poltetraeders treffen; fügen die vier Punkte 𝔞, 𝔟, 𝔠, 𝔡 hinzu, in welchen die Seiten- n $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des Tetraeders 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 die Curve noch iden, so liegen die vier Strahlen $\overline{𝔄𝔞}$, $\overline{𝔅𝔟}$, $\overline{ℭ𝔠}$ und $\overline{𝔇𝔡}$ auf Hyperboloid, welches $C^{(4)}$ enthält. Je zwei gegenüber nde Kanten des Tetraeders 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 liegen ebenfalls auf durch $C^{(4)}$ gehenden Hyperboloide. Somit sind vier durch gelegte Hyperboloide bestimmt. Diese Flächen sowie die n Tetraeder liefern unter einander und in ihren Beziehungen dieselben projectiven Eigenschaften, welche die in gleicher ezeichneten Flächen und Tetraeder des Herrn Schröter einander und zu der von ihm betrachteten Raumcurve . Bringt man nun die Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und die Strahlen

$\overline{\mathfrak{Aa}}$, $\overline{\mathfrak{Bb}}$, $\overline{\mathfrak{Cc}}$, $\overline{\mathfrak{Dd}}$ zum Schnitt mit einer beliebigen Ebene ν d Raumes, so erhält man vier Gerade a, b, c, d und vier Punk A, B, C, D, welche in dieser Folge die Polaren und Pole ei in ν hierdurch bestimmten Polarsystems sind. Durch eine lineare Raumtransformation, mittels welcher ν in die unendl ferne Ebene und das auf ν befindliche Polarsystem in das Pol system des unendlich fernen imaginären Kreises übergeführt wi geht $C^{(4)}$ in die specielle von Herrn Schröter betrachtete F über. Von den vier Hyperboloiden werden drei orthogonal, vierte gleichseitig. Die Raumtransformation ist immer reell du führbar, sobald das Polarsystem in ν keine reelle Ordnungsc besitzt, was durch passende Lage von ν auf unendlich viele A erreicht werden kann. W. St.

A. Adler. Ueber Raumcurven vierter Ordnung zwe Art. Wien. Ber. LXXXVI. 919-936, 1201-1211, 1212-1229.

Diese Raumcurve C^4 wird mit Hülfe der projectiven A dung derselben auf einen Kegelschnitt K studirt. Jeder Se von C^4 entspricht so eindeutig eine Gerade der Ebene des K schnitts K, und jeder Regelfläche, deren Erzeugende Sec von C^4 sind, das Tangentensystem einer Curve der Ebene v So entsprechen den dreifachen Secanten von C^4 die Tang eines Kegelschnitts T; den Geraden einer Regelfläche (Ordnung, welche eine gegebene Secante von C^4 treffen, sprechen in der Ebene K die Geraden eines Büschels erster nung. Nun findet sich, dass die der gegebenen Secante v zugehörende Sehne von K und der Mittelpunkt des Str büschels entsprechende Elemente eines Polarsystems k sin welchem K und T einander entsprechen. Hieraus ergieb eine Reihe von interessanten Sätzen über die C^4. Die der drei durch einen Punkt gehenden Secanten von C^4 ein Polardreieck von k. Die Bilder von vier Punkten der curve, welche in einer Ebene liegen, bilden ein vollstä Viereck von der Eigenschaft, dass je zwei Gegenseiten hi lich k einander conjugirt sind.

Die Seiten des gemeinsamen Poldreiecks x, y, z von K und T die Bilder der drei einzigen Secanten von C^4, welche gleich-g Schnitte von Schmiegungsebenen sind. Diese Secanten den „Axen" der C^4 genannt. Die drei Axen der C^4 bilden den drei einfachen Leitlinien der drei Regelflächen dritter nung, welche sie mit C^4 bestimmen ein Poltetraeder, der ein-n durch C^4 legbaren Regelfläche zweiten Grades. Je zwei enseiten dieses Tetraeders bestimmen eine geschaarte Invo-on, in welcher C^4 sich selbst entspricht.

Es wird dann in der zweiten Abhandlung das System der pelt-berührenden Tangentialebenen von C^4 untersucht. Jede ache Leitlinie einer durch C^4 gelegten Regelfläche dritter nung ist der Schnitt zweier Doppeltangentialebenen, und um-ehrt. Die nähere Betrachtung dieser Geraden führt dann auf interessanten Satz: „Es ist möglich, vier räumliche Polar-teme so zu construiren, dass jeder Secante von C^4 eine ein-he Leitlinie einer durch C^4 gelegten Regelfläche dritter Ord-g entspricht, und dass zu den Punkten von C^4 die Doppel-gentialebenen derselben Curve gehören."

In der ersten und dritten Abhandlung werden noch specielle men von C^4, unter anderen die Strictionslinie des Hyperboloids ersucht, und es wird eine Einteilung der Curven in Arten vor-ommen. W. St.

Weyr. Sulle curve gobbe razionali. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 250-251.

Einige auf rationale Raumcurven bezügliche Sätze, insbeson-e für Curven sechster Ordnung, werden hier mitgeteilt. Hat e Curve n^{ter} Ordnung eine $(n-2)$-fache Secante, und entsprechen auf der Curve gedachten $(n-2)$ Punkte derselben projectiv auf der Secante liegenden, so hat die Curve auch eine $(n-1)$-e Secante. So hat eine Curve fünfter Ordnung stets eine fache Secante. Die allgemeine rationale Curve sechsten des hat sechs vierfache Secanten, welche die eine Hälfte der pelsechs einer Fläche dritten Grades bilden, während die

Geraden der andern Hälfte keine Punkte mit der Curve gemein haben. W. St.

Em. Weyr. Ueber Flächen sechsten Grades mit einer dreifachen cubischen Curve. Wien. Ber. LXXXV. 513-535.

Ist auf einer cubischen Raumcurve C_3 eine Involution n^{ten} Grades erster Stufe gegeben, so ist der Ort der Verbindungslinien je zweier einer Gruppe angehöriger Punkte eine Regelfläche $2(n-1)^{ter}$ Ordnung. Die Ebenen, welche man durch je drei einer Gruppe angehörige Punkte legen kann, sind Schmiegungsebenen einer Raumcurve J von der $\frac{(n-1)(n-2)^{ten}}{2}$ Klasse. Die Fläche F_6, welche für $n=4$ so entsteht, wird einer näheren Untersuchung unterworfen. Einige Eigenschaften von F_6 heben wir hervor. Die Erzeugenden von F_6 ordnen sich in Paare, welche sich so verhalten, wie die Paare eines Systems conjugirter Pole einer Curve dritter Ordnung. Jede Ebene von J ist dreifache Tangentialebene von F_6, und die drei Berührungspunkte liegen auf der Tangente von J. Jedes durch C_3 gehende Hyperboloid schneidet aus F_6 drei Erzeugende aus, welche die Elemente einer Involution dritten Grades zweiter Stufe bilden. Diese Elemententripel verhalten sich wie die Punkttripel einer allgemeinen Curve dritter Ordnung, welche in einer Geraden liegen. Ist F eine Fläche sechster Ordnung mit einer dreifachen cubischen Curve, so ist F_6 geradlinig, und ihre Erzeugenden bestimmen auf C_3 ein symmetrisches Punktsystem dritten Grades. Auf eine solche F_6 lassen sich einige der gefundenen Sätze übertragen. Zum Schlusse werden specielle Involutionen auf C_3 betrachtet; insbesondere kann F_6 rational werden und endlich zerfallen in ein Hyperboloid und eine Fläche vierter Ordnung. W. St.

Em. Weyr. Sur les surfaces d'involution. Belg. Bull. (3) 472-485.

F. Folie. Rapport. Belg. Bull. (3) III. 460-461.

Neue Anwendungen der Methoden des Verfassers, um gleich-g die Involutionen und die Curven höherer Ordnung zu iren. Mn. (Wn.).

D. Abzählende Geometrie.

SCHUBERT. Lösung des auf die trilineare Verwandt-chaft ausgedehnten Projectivitätsproblems. Pr. Hamburg.

Bezeichnet x die Entfernung eines Punktes P der Geraden g einem festen Punkte dieser Geraden, und haben x', x'' die loge Bedeutung für die Geraden g' und g'', so wird durch eine len Grössen x, x', x'' lineare Relation eine Beziehung zwischen Punkten der drei Geraden festgelegt, vermöge welcher je i Punkten, die willkürlich auf zweien der Geraden angenom-n werden, im Allgemeinen ein bestimmter Punkt der dritten aden correspondirt. Diese Correspondenz wird als eine lineare Verwandtschaft" bezeichnet. Da die erwähnte lineare ation sieben Constante enthält, so hängt die trilineare Ver-idtschaft von sieben Constanten ab, vorausgesetzt, dass die i Geraden, die „Träger" der Verwandtschaft, als fest gegeben enommen werden. Wenn man auch diese Geraden beliebig Raume veränderlich denkt, so treten noch 3.4 Constanten n, so dass das Gebilde Γ, welches aus drei Geraden und r auf diesen liegenden trilinearen Verwandtschaft besteht, Constantenzahl 19 besitzt. Es handelt sich nun in der vor-nden Arbeit darum, die Zahl derjenigen Gebilde Γ zu be-men, welche gewissen 19-fachen Bedingungen genügen. Die Lösung dieser Aufgabe angewandten allgemeinen Methoden sind stenteils von dem Verfasser selber ausgebildet und in seinem e: „Calcül der abzählenden Geometrie" (Leipzig. Teubner.) ausführlich dargelegt worden. Dieselben laufen darauf ıs, die Anzahlen der geometrischen Gebilde, welche gegebe-Bedingungen genügen, auf andere leichter zu bestimmende

Anzahlen zurückzuführen, welche sich auf die sogenannten Aus-artungen des betreffenden Gebildes beziehen. Es werden dem-entsprechend in der vorliegenden Arbeit nach einander die Aus-artungen des Gebildes Γ, die Zurückführung der gesuchten An-zahlen auf die zu den Ausartungen gehörenden, sowie diese letz-teren Anzahlen bestimmt. In einer Tabelle werden die auf Γ bezüglichen Zahlen, welche das letzte Ziel dieser Untersuchungen bilden, zusammen gestellt. Die Art der Resultate mag das fol-gende Beispiel zeigen: „Es giebt im Raume 489520 Tripel von Geraden, auf denen durch die Schnittpunkte von neunzehn Tripeln gegebener Ebenen, neunzehn Tripel entsprechender Punkte einer trilinearen Verwandtschaft entstehen." Alle diese Resultate lassen sich auch algebraisch interpretiren als Zahl der Lösungen be-stimmter Gleichungssysteme. Diese Interpretation wird am Schluss der Arbeit an mehreren Beispielen ausgeführt.

Hz.

H. Krey. Ueber Systeme von Gleichungen mit gewissen Besonderheiten. Klein Ann. XIX. 497-517.

Der Verfasser beschäftigt sich mit der Bestimmung der An-zahl solcher Punktgruppen, welche, in festen Ebenen oder im Raume liegend, teils die Bedingung erfüllen, dass ihre Coordi-naten gegebenen Gleichungen genügen, teils Grundbedingungen erfüllen, wo unter Grundbedingung einer Gruppe von ν Punkten jede Bedingung zu verstehen ist, welche entweder aussagt, dass einer der ν Punkte in einem gegebenen Punkte, auf einer ge-gebenen Geraden oder auf einer gegebenen Ebene liegt, oder aussagt, dass die Verbindungslinie zweier der ν Punkte eine ge-gebene Gerade trifft. Unter gewissen Voraussetzungen, die aus-führlich discutirt werden, lässt sich diese Anzahl immer durch die Gradzahlen der gegebenen Gleichungen und durch die auf die Ausnahmepunkte bezüglichen Anzahlen ausdrücken. Aus-nahmepunkte nennt der Verfasser solche feste Punkte der Ebene, für welche eine der gegebenen Gleichungen identisch verschwindet. Das Verfahren, welches zu den gesuchten Anzahlausdrücken fü

lie in der abzählenden Geometrie gebräuchliche, namentlich Chasles, Zeuthen und dem Referenten angewandte allmälige uction der Anzahlen für complicirtere Bedingungen auf die ahlen für speciellere Bedingungen. So werden z. B. auf die ahlen für Punktgruppen, die nur Grundbedingungen erfüllen, Anzahlen für solche Punktgruppen zurückgeführt, die ausser ndbedingungen noch die Bedingung erfüllen, dass ihre Coorten einer gegebenen Gleichung genügen, u. s. w. bis zu den ahlen für Gruppen von ν Punkten, deren 2ν, bezw. 3ν Coorten 2ν, bezw. 3ν gegebene Gleichungen erfüllen. Als Hülfsel bei dieser Reduction benutzt der Verfasser Sätze, die er den verallgemeinerten Correspondenzformeln des Referenten itet, z. B. den folgenden Hülfssatz: „Sind die Punkte zweier ven, eines x-Ortes und eines y-Ortes eindeutig auf einander gen, und coincidirt an c_{12} freien Stellen x mit dem entchenden y, bestimmt ferner die Gleichung $\varphi(x, y) = 0$, deren e Seite für $x = y$ einfach verschwindet, für einen beliebig ebenen Punkt $y\,\xi$ bewegliche Punkte x des ersten Ortes, für n beliebigen Punkt $x\,\eta$ bewegliche Punkte y des zweiten Ortes, n giebt es $\xi + \eta - c_{12}$ Paare von zusammengehörigen Punkten , welche der Gleichung $\varphi = 0$ genügen." An die allgemeinen achtungen schliesst der Verfasser die wirkliche Aufstellung gesuchten Anzahlformeln in den Fällen, wo die Punktgruppe i Punkte in fester Ebene, drei Punkte in fester Ebene und i Punkte im Raume enthält. Schliesslich werden auch noch Formeln angegeben, welche sich auf zwei Punkte beziehen, auf einer festen punkt-allgemeinen Fläche liegen. Diese meln sind einerseits Verallgemeinerungen der Formeln für ktepaare in fester Ebene, andererseits Specialisirungen der meln für Punktepaare im Raume, da zwei Bedingungen dann auszusagen haben, dass jeder Punkt auf der festen Fläche n soll. Von den vielen Anzahlformeln, die der Verfasser ickelt, sei hier beispielsweise wenigstens eine angeführt. chen den vier Coordinaten eines Punktepaars in fester Ebene n die vier Gleichungen

$$f_1(x, y) = 0, \quad f_2(x, y) = 0, \quad f_3(x, y) = 0, \quad f_4(x, y) = 0$$

bestehen. Die Gradzahlen dieser Gleichungen seien

$$\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \mu_3, \nu_3, \mu_4, \nu_4;$$

ferner sei α die Anzahl der Ausnahmepunkte. Dann ist die Anzahl der Punktepaare, deren Coordinaten jenen vier Gleichungen genügen, gleich

$$[\mu\mu\nu\nu]-(\alpha+1)\ [\mu\mu]-(\alpha+1)\ [\nu\nu]-[\mu\nu]+3[\mu] +3[\nu]+6\alpha^2+18\alpha-6,$$

wo immer jede, i Buchstaben enthaltende eckige Klammer die Summe aller möglichen Producte von je i Factoren mit den i verschiedenen Indices 1, 2, 3, 4 bedeutet, z. B.

$$[\mu\mu\nu\nu] = \mu_1\mu_2\nu_3\nu_4 + \mu_1\mu_3\nu_2\nu_4 + \mu_1\mu_4\nu_2\nu_3 + \mu_2\mu_3\nu_1\nu_4 + \mu_2\mu_4\nu_1\nu_3 + \mu_3\mu_4\nu_1\nu_2.$$

Um die Anwendung seiner Formel zu zeigen, leitet der Verfasser aus der eben mitgeteilten Formel den folgenden Satz ab: „Z $\frac{1}{2}n(n+3)-4$ willkürlich in der Ebene gegebenen Punkten kann man auf $\frac{1}{8}(n-2)(n-4)(n^2-9)$ Arten ein Punktepaar so bestimmen, dass durch die $\frac{1}{2}n(n+3)-2$ Punkte noch eine dreifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung geht.“

Scht.

O. Tognoli. Sulla teorica della involuzione. Batt. G. X 270-287.

Der Verfasser betrachtet zunächst auf ebenen Curven Involutionen, d. h. Schnittpunktsysteme, die von gegebenen Curvenbüscheln ausgeschnitten werden, wiederholt dabei die bekannte Formel

$$k = 2nm + 2(p-1) - r$$

für die Zahl k derjenigen Curven eines Büschels von Curven m^{ter} Ordnung, welche eine gegebene Curve n^{ter} Ordnung p^{ten} Geschlechts mit r Spitzen berühren, definirt dann mit Hülfe einer bilinearen Gleichung zwischen zwei Parametern den Begriff

ectivität zweier auf zwei festen Curven gelegenen Involu-
n und gelangt so mit Benutzung der obigen Formel für k
iner Formel, aus welcher sich durch Specialisirung der oft
auf verschiedenen Wegen bewiesene Satz von der Gleich-
des Geschlechts zweier projectiver, d. h. Punkt für Punkt
eutig auf einander bezogener Curven ergiebt. Weiterhin ver-
; der Verfasser bei der Ableitung und bei der Formulirung
Sätzen über Gradzahlen von Oertern, die durch die Paare
prechender Elemente von ebenen und räumlichen Curven,
e von Linienflächen erzeugt werden. Von diesen Sätzen,
he unmittelbar aus dem Correspondenzprincip folgen, sei
folgender erwähnt: Verbindet man je zwei entsprechende
:te zweier projectiver Involutionen, die auf zwei Curven n^{ter}
n'^{ter} Ordnung liegen, und $(nm-\gamma)^{\text{ten}}$ bezw. $(n'm'-\gamma')^{\text{ten}}$ Gra-
sind, so erhält man die ∞^1 Verbindungsstrahlen einer Linien-
e vom Grade

$$n(n'm'-\gamma')+n'(nm-\gamma).$$

esslich behandelt der Verfasser eingehend ein Beispiel, das
der eindeutigen Abbildung einer gewissen Fläche auf einer
ie in engem Zusammenhang steht. Scht.

'. E. BJÖRLING. Om algebraiska rymdkurvors singu-
ılariteter och polardeveloppabelns karakterer.
'v. Stockh. 1881. 3-26.

Die Coordinaten einer Raumcurve, deren Anfang in dem zu
ıkterisirenden Curvenpunkte liegt, und für welche die x, y, z
Richtung der Tangente, Haupt- und Binormale haben, sind als
nale Functionen eines Parameters λ angenommen, deren
insamer Nenner nicht mit λ verschwindet. Sind dann l, m, n
:leinsten Potenzexponenten der Zähler, so ist stets $l<m<n$,
im Allgemeinen $l=1$, $m=2$, $n=3$. Jeder höhere Wert
gt eine Singularität. Statt der rationalen Brüche können
ar auch beliebige convergente Reihen stehen, deren Anfangs-
allein massgebend ist. Es werden hiernach die Singulari-
lle discutirt, dann Theorien von Salmon und Cayley,

bezüglich auf abzählende Geometrie, nach gleicher Methode behandelt. H.

C. F. E. Björling. Modelle von Raumcurven- und Developpabeln-Singularitäten. Lund. Gleerup.

Ankündigung und Beschreibung von acht Modellen, die dazu dienen sollen, die Singularitäten der Punkte algebraischer Raumcurven zu veranschaulichen. Bezeichnet man für einen Punkt O eines Raumcurvenzweiges mit (a, b, c), dass der Zweig in O gemein hat: a Punkte mit einer O enthaltenden beliebigen Ebene, b Punkte mit einer in O berührenden Ebene, und endlich c Punkte mit der Schmiegungsebene von O, so kann man das, was die acht Modelle darstellen sollen, kurz so angeben:

$$(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,3,4),\ (1,3,5),\ (2,3,4),\ (2,3,5),\ (2,4,5),\ (2,4,6).$$

Die Fäden der Modelle sind die Tangenten der Raumcurve, so dass jedes Modell eigentlich die Developpable darstellt, deren Cuspidalcurve die gemeinte Raumcurve ist. Damit die betreffende Singularität deutlich hervortrete, sind die beiden durch den singulären Punkt gebildeten Teile der Developpabeln von verschieden farbigen Fäden verfertigt. Den Schluss des Ankündigungsblattes bildet eine tabellarische Zusammenstellung der Charaktere der acht modellirten Raumcurven nach den Bezeichnungen von Cayley und Salmon. Da der Referent die Modelle nicht gesehen hat, so kann er kein Urteil darüber abgeben, ob dieselben correct und anschaulich sind. Scht.

Vaneček. Sur la génération des surfaces et des courbes à double courbure de tous les degrés. C. R. XCI 210-212.

Was der Verfasser „Erzeugung“ der Flächen oder Raumcurven aller Grade nennt, besteht einfach in Folgendem. Wenn eine bewegliche Ebene einen ein- oder zweistufigen Ort n^{ten} Grades beschreibt, so durchläuft der Diagonalen-Schnittpunkt des

Ebene durch die vier Kanten AB, BC, CD, DA eines Fun-tal-Tetraeders $ABCD$ ausgeschnittenen Vierecks einen gleich-n Punktort, dessen Gradzahl dreimal so gross ist, als der n des Ebenen-Orts, wie sich übrigens aus den Incidenz-n des Raumes unmittelbar ergiebt. Ebenso durchläuft die liche Ebene einen Ort vom Grade $3n$, sobald der genannte nalenschnittpunkt einen Ort vom Grade n durchläuft. Diese ahlen $3n$ werden natürlich um k, bezw. $2k$ Einheiten vermin-wenn k Tetraeder-Ebenen oder k Tetraeder-Ecken dem er-iden Orte angehören, und dieser Ort zweistufig, bezw. ein-ist. Scht.

ČEK. Sur un mode de transformation des figures ıs l'espace. C. R. XCIV. 1463-1465, 1583-1586; XCV. 1049-1051, ;-1179.

s giebt in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung bekannt-er Polartetraeder $ABCD$, von denen zwei Ecken A und B je ner gegebenen Geraden und die beiden andern Ecken C je auf einer gegebenen Ebene liegen. Hieraus ergiebt ir jeden Kenner der neueren Abzählungsmethoden unmittel-lass wenn von jenen vier Ecken A, B, C, D die beiden A und B Raumcurven a^{ten} und b^{ten} Grades beschreiben, und ke C eine Fläche c^{ten} Grades beschreibt, die Ecke D eine urve vom Grade $4abc$ durchlaufen muss. Nachdem der ser dies bewiesen hat, sieht er darin ein Mittel, um zu einer ormation einer Raumcurve a^{ten} Grades in eine Raumcurve rade $4abc$ oder einer Fläche c^{ten} Grades in eine Fläche rade $4acd$ zu gelangen. Weiterhin discutirt der Verfasser besondere Lagen und Singularitäten der erzeugenden Ge-

Scht.

LLER. Ueber die Transformation einer gewunde-Curve durch sphärische Inversion. Lund Årsskrift. [II.

Untersuchung der Veränderungen, welche die Singularit
und Charaktere einer Raumcurve durch sphärische Inversion
leiden. Werden die Charaktere derselben mit m, n, r, α, β, u. s.
und diejenigen der aus derselben durch solche Transform
gebildeten Curve mit m', n', r', u. s. w. bezeichnet, so werden
Allgemeinen

$$m' = 2m, \quad n' = n+3m, \quad r' = r+2m,$$
$$\alpha' = \alpha+4m, \quad h' = h+m(m-1),$$
$$D' = D+\frac{1}{2}m(m-1),$$
$$g' = g+\frac{1}{2}m(9m+6n-17),$$
$$x' = x+2m(m+r-2),$$
$$y' = y+2m(m+r-3).$$

Die Modificationen, welche diese Resultate bei spec
Lage der Curve erfahren, werden auch sehr vollständig u
sucht und die Ergebnisse zuletzt auf die cubischen Kegelsc
angewendet. E.

R. Sturm. Ueber das Geschlecht von Curven auf Ke
Klein Ann. XIX. 487-488.

Der Verfasser hatte in den Dissertationen von Herrn
(Göttingen 1872) und von Herrn Ed. Weyr (Prag 1873), w
Beide Raumcurven sechster Ordnung behandeln, gefunden,
das Geschlecht einer Curve, welche auf einem Kegel zw
Ordnung liegt, durch die Spitze desselben b-mal geht und
Kante desselben noch a-mal trifft, auf ziemlich umstän
Weise abgeleitet war. Er unternimmt es deshalb hier, au
fachere Weise jenes Geschlecht abzuleiten und zugleich
das Resultat dahin zu verallgemeinern, dass der Kegel allge
die Ordnung n, die Klasse m und das Geschlecht p hat. Er
das Resultat mit Hülfe der allgemeinen Coincidenzformeln
Referenten ohne jede Schwierigkeit. Es ergiebt sich für
gesuchte Geschlecht

$$\pi = \frac{1}{2}a(a-1)n+(a-1)(b-1)+ap.$$

$n = 2$, $p = 0$ erhält man hieraus das von den Herren Boule Weyr gefundene Resultat $\pi = (a-1)(a+b-1)$. Für $a = 1$ bt sich ferner das Resultat $\pi = p$, also unabhängig von b s, welches bekannt ist. Scht.

OUTE. Deux théorèmes relatifs aux centres des ourbes algébriques. S. M. F. Bull. X. 219-220.

Im 47ten Bande des Crelle'schen Journals hat Steiner die ung der von den Mittelpunkten der centrischen C_3, welche h sechs feste Punkte gehen, gebildeten Curve, sowie die hl solcher Curven, die durch sieben Punkte gehen, bestimmt. Verfasser teilt ohne Beweis die Verallgemeinerung dieses ltates für centrische Curven beliebiger Ordnung mit. Refe- bemerkt, dass die Ordnung jener von den Mittelpunkten deten Curve durch eine einfache Abzählung sich finden lässt. die dem zweiten Steiner'schen Satze analoge Anzahl aber nur eine obere Grenze gegeben, welche durch einen Druck- r entstellt scheint. V.

I. Lovén. Om plana algebraiska kurvors rektifia- ilitet. Lund Årsskrift. XVIII.

$f(x, y) = 0$ sei die Gleichung einer ebenen algebraischen e, ferner sei $u^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$; durch Elimination erhalte man $u) = 0$. Der Verfasser bestimmt die Charaktere (M,N,D,K,T,J) das Geschlecht (P) der die letzte Gleichung repräsentirenden e aus denjenigen $(\mu, \nu, \delta, \ldots, p)$ der ersten, der „f-Curve“. Diese ist offenbar für $P = 0$ rectificirbar im gewöhnlichen e.

Im allgemeinen Falle ist

$$= 2(\mu+\nu), \quad N+K = 8\nu+2\varkappa, \quad D = 2(\mu+\nu)^2-5\nu-\mu-\varkappa,$$
$$P = 2p+\nu-1;$$

lchem Falle kann P offenbar niemals verschwinden.

Diese Ergebnisse erfahren aber Modificationen, wenn d… f-Curve specielle Beziehungen zu der unendlich fernen Gerad… oder den unendlichen Kreispunkten hat. Besonders mag Folgen… des hier bemerkt werden. Es sei

h_1 die Anzahl der im Endlichen belegenen Berührungspunkt… mit ungrader Indexdifferenz der von einem Kreispunkte gezoge… nen Tangenten;

i_1 die Anzahl der durch einen Kreispunkt gehenden Zweig… mit endlicher Tangente, deren grösserer Index ungrade ist;

j_1 die Anzahl der die unendlich ferne Gerade in einem Kreispunkte berührenden Zweige mit ungradem kleineren Index; dann ist

$$P = 2p-1+h_1+i_1+j_1.$$

Die drei Zahlen h_1, i_1, j_1 können nicht gleichzeitig ve… schwinden. Sind zwei von ihnen $=0$, und die dritte $=1$, so wi… $P = 2p$, und beide werden gleichzeitig gleich 0. E.

K. Bobek. Ueber den geometrischen Ort der Inflexions… punkte eines Curvenbüschels. Cas. XI. 283-284. (Böhmisch)

Ist ein Curvenbüschel C_n in der Ebene gegeben, so entsteh… die Frage, auf welcher Curve die betreffenden Inflexionspunkte liegen. Diese erscheint durch Eruirung der Ordnungszahl $6(n-1…$ und der Klassenzahl $6(n-2)(4n-3)$ gelöst.

Std.

G. Halphén. Sur les courbes planes du sixième degr… à neuf points doubles. S. M. F. Bull. X. 162-172.

Eine ebene Curve sechster Ordnung mit neun Doppelpunkte… also vom Geschlechte 1, hat die Constantenzahl 18. Man könnt… daher denken, dass es eine oder mehrere solcher Curven gieb… die neun beliebig gegebene Punkte zu Doppelpunkten habe… Es ergiebt sich jedoch, dass bei allgemeiner Lage der ne… Punkte keine solche Curve existirt, da die neunten Punk…

: mit acht beliebig gegebenen Punkten zusammen eine e der neun Doppelpunkte einer Curve sechsten Grades Geschlecht 1 constituiren können, nicht die ganze Ebene en, sondern eine Curve neunten Grades bilden, welche die egebenen Punkte zu dreifachen Punkten hat. Die Abhängiger neun Punkte von einander kann auf folgende Art dart werden. Man sondere einen von den neun Punkten aus, sse A, und lege durch die übrigen acht alle ∞^1 Curven ı Grades, bestimme den neunten Punkt A', den dieselben gemein haben, wähle dann die eine Curve aus, welche auch durch A hindurchgeht, und ziehe die beiden Tangenten, ; diese Curve in A und A' berühren. Nur wenn der Schnitt- dieser beiden Tangenten wiederum auf jener Curve dritten s liegt, haben die neun Punkte die verlangte Eigenschaft, lpunkte von Curven sechsten Grades vom Geschlechte 1 sein nen. Unter den ∞^1 Curven, die dieselben neun Doppel- ; haben, giebt es zwölf, welche noch einen zehnten Doppel- besitzen. An die Beweise dieser Resultate, bei denen der sser auch die Darstellung der Punkte einer cubischen Curve die Argumente einer doppelt-periodischen Function benutzt, st sich die Ableitung der analytisch-geometrischen Gleichung itersuchten Curve sechsten Grades, sowie auch die Verallnerung der Resultate auf Curven vom Grade $3m$ mit neun ıen Punkten. Scht.

Neunter Abschnitt.

Analytische Geometrie.

Capitel 1.

Coordinaten.

H. Picquet. Traité de géométric analytique à l'usa des candidats aux écoles du gouvernement et a grades universitaires. Première partie. Géomét analytique à deux dimensions. **Paris. G. Masson.**

Dem gesammten Inhalt zufolge ist das Vorliegende k Lehrbuch der analytischen, sondern der synthetischen Geometr Das erste Buch handelt von den Coordinaten, der geraden Lin ihren tangentiellen Coordinaten, dem Princip der Dualität u der homographischen Transformation; das zweite von den ebe Curven, den singulären Punkten und Tangenten, Determinati der algebraischen Curven; das dritte von den Kegelschnitt das vierte von den Curven dritten und vierten Grades.

H.

G. Veronese. Dei principali metodi in geometria e ispecial del metodo analitico. **Verona. Padova. Tedeschi**

Diese Abhandlung bildet die Einleitung zu einer Vorles über analytische Geometrie. Der in Deutschland mathemati

ebildete Verfasser giebt hier einen recht instructiven, histo-
en Ueberblick über die wesentlichsten analytisch-geometri-
n Forschungsmethoden, insbesondere über die verschiedenen
dinatensysteme und die Benutzung höherer Räume. Auf
ere Frage lässt er sich um so lieber ein, als ihm hier die
ltate eigener fruchtbarer Untersuchungen zu Gebote stehen.
r den zu erwähnenden namhaften Autoren hat der Herr
asser eine etwas subjectiv gefärbte Auswahl getroffen. So
. scheinen ihm die Leistungen eines Hesse und Grassmann
t erwähnenswert. My.

Fiedler. Geometrische Mitteilungen. I. Die all-
emeine Transformation der Coordinaten. Wolf Z. XXIV.
45-179.

Schon im sechzehnten Bande der Wolf'schen Vierteljahrs-
ift hatte Herr Fiedler darauf aufmerksam gemacht, dass aus
geometrischen Deutung der Coefficienten einer linearen Sub-
tion sich die allgemeine Coordinatentransformation ergebe.
r wird dieser Gedanke näher ausgeführt und seine Fruchtbar-
an mehreren Beispielen gezeigt.

Zunächst wird die Transformation von einem Systeme schief-
kliger Cartesischer Coordinaten in der Ebene zu einem andern
hen Systeme als Specialfall der allgemeinen Coordinaten-
sformation behandelt. Um dann das orthogonale Hyperboloid
Object der Coordinatentransformation behandeln zu können,
richt Herr Fiedler die verschiedenen Erzeugungsarten dieser
iellen Fläche zweiten Grades. Steiner hatte dieselbe als Ort
Durchschnittslinien der zu einander normalen Ebenen zweier
nenbüschel erzeugt, woraus man finden kann, dass die Glei-
ıg derselben aus der des allgemeinen Hyperboloids

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

h Hinzufügung der Bedingung

$$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=1$$

hervorgeht. Der Verfasser beweist nun im Zusammenhang mit die zuerst von ihm und zwar schon im Sommer 1878 Gelegenheit des Druckes der dritten Auflage der „Analytis Geometrie des Raumes“ bemerkte Eigenschaft, dass das gonale Hyperboloid ausser in einer Art aus orthogonalen Eb paaren auch in unendlich vielen Arten aus gleichwinkligen Eb büscheln entsteht. Den constructiven Uebergang von der zur andern Erzeugungsart giebt Herr Fiedler in der von seiner Schüler, Herrn Ruth in Graz, entwickelten Form. muss erwähnt werden, dass die Erkenntnis der Erzeug des orthogonalen Hyperboloids aus unendlich vielen gleic ligen Ebenenbüscheln von Herrn Fiedler (Sommer 1878 nicht von Herrn Ruth herrührt, wie dies F. d. M. XI. p. 438 irrtümlich angedeutet ist. Schliesslich wird au Chasles'sche Erzeugungsart dieser merkwürdigen Fläche z Grades als Ortes der Punkte, die gleiches Abstandsverhältn zwei Geraden haben, besprochen und der Abhandlung des Schröter im Bande LXXXV des Borchardt'schen Journals g (s. F. d. M. X. 1878. p. 412).

Nach diesen allgemeineren Betrachtungen über das gonale Hyperboloid nimmt der Verfasser an der Gleichun selben die Coordinatentransformation vor und zwar zuerst der Chasles'schen, dann gemäss der Steiner'schen Erz und zuletzt gemäss einer Verbindung der letzteren mit d zeugung aus gleichwinkligen Büscheln. Das bei dieser Ge heit vom Verfasser benutzte neue Coordinatensystem mi unendlich fernen Fundamentalpunkten wird wegen des all neren Interesses, das es darbietet, auch für sich besprochen den Betrachtungen des Verfassers ergeben sich dann au einfachste Weise die besten darstellend-geometrischen Co tionsmittel und die einfachste rechnerische Behandlung des gonalen Hyperboloids. Auch das Schlusscapitel der inhalt Abhandlung enthält neue Betrachtungen. Es wird hi Coordinatensystem mit nur einem unendlich fernen Pun sprochen, also das dem Cartesisch-Plücker'schen dual ge stehende Coordinatensystem. Hierbei ergeben sich natur

ıetrischen Relationen in allgemeinen Coordinaten als Be- geu der Elementenpaare zum unendlich fernen imaginären kreise. Scht.

ETTI. Sulla trasformazione delle coordinate nello ızio. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 252-258.

'ie Richtungscosinus einer Geraden lassen sich durch drei en neun Winkeln ausdrücken, welche die Axen zweier 'inkliger Coordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung nander bilden, wenn zwischen zwei aus den Cosinus jener l gebildeten Determinanten Reciprocität besteht. Durch ng um die Gerade lässt sich alsdann das eine System mit ndern zur Deckung bringen. Die Resultate stimmen zum ıit den von Bardelli gefundenen überein. (S. F. d. M. II. 0 p. 460.) Schg.

. C. SHARP, G. M. REEVES. Solution of a question 63). Ed. Times XXXVII. 117-118.

nd die drei Cartesischen Coordinaten eines Punktes alle ›en linearen Functionen der entsprechenden Coordinaten g vieler anderer Punkte, so ist diese Beziehung von der les Coordinatensystems unabhängig; falls die Summe der ienten gleich 1, ist die Beziehung auch von der Lage ıfangspunktes unabhängig. Wn.

AIN. Die ersten Formeln für die Rechnung mit ıetrischen Punktcoordinaten. Hoppe Arch LXVII. 425-446.

ısung einfachster Aufgaben durch verhältnismässig um- che Formeln. Schg.

L. TANNER. On the coordinates of a plane curve ;pace. Lond., M. S. Proc. XIII. 125-148.

Fortsetzung der Untersuchungen von Spottiswoode und Cayley über die 21, resp. 18 Coordinaten eines Kegelschnittes im Raume. (S. F. d. M. XI. 1879. p. 553.). Als Coordinaten einer ebenen Curve im Raume werden die n-dimensionalen Producte von sechs Grössen betrachtet, welche den Coordinaten einer Geraden analog sind und für $n = 1$ in dieselben übergehen. Diese sechs Grössen ergeben sich durch successive Elimination der vier homogenen Coordinaten zwischen den Gleichungen einer Ebene und einer Fläche n^{ter} Ordnung. Mit Hilfe der neuen Coordinaten erscheint dann die Curve als Schnitt derselben Ebene mit einem Kegel. Dass eine Gruppe von $2(n^2+3n-1)$ Coordinaten zur vollständigen Bestimmung einer C_n im Raum ausreicht, ist wahrscheinlich und für $n = 2$ bekannt; den allgemeinen Beweis aber hat der Verfasser noch nicht erbringen können. Es schliessen sich hieran weitere Untersuchungen über die zwischen den Coordinaten bestehenden Gleichungen, über Curven, deren Coordinaten teilweise verschwinden, über die Art, wie gewisse den Curven auferlegte Bedingungen durch die Coordinaten ausgedrückt werden können, und Aehnliches. Das Coordinatensystem des Verfassers ist auch auf Raumcurven anwendbar, die als Schnitt zweier Flächen m^{ter} und n^{ter} Ordnung erscheinen.

Schg.

E. Mathieu. Sur les coordonnées curvilignes. Résal J. (3) VIII. 5-19.

Als Coordinaten eines in nächster Nähe einer Curve gelegenen Punktes $M(x,y)$ können verwendet werden 1) die Länge n der zur Curve gezogenen Normale MP, 2) die Länge σ des zwischen P und einem festen Curvenpunkte liegenden Bogens. Der Verfasser zeigt zunächst, dass, wenn $u = f(x,y)$ gegeben ist, $\frac{du}{d\sigma}$ und $\frac{du}{dn}$ sich eindeutig durch $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ und den Winkel φ zwischen der Normalen MP und der Axe der x ausdrücken lassen, wobei das gerade Stück dn noch durch ein Curvenelement ersetzt werden kann. Dagegen enthält im letzteren Falle die

bleitung $\frac{d^2u}{d\sigma dn}$ den die Krümmung von dn ausdrücken-

:rentialquotienten $\frac{dv}{dn}$, ist also nicht mehr vollkommen

. Dieser Umstand ist von Cauchy bei der Aufstellung chgewichtsbedingungen einer elastisch gekrümmten La-xercices de mathématiques, 1828. p. 285-325) ausser Acht

Die Differentialquotienten von u nach x und y lassen ch σ und n einfacher ausdrücken, als durch die von ι seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes" be-Parameter ϱ und ϱ_1. Der Verfasser zeigt die Uebereinς der Lamé'schen Formeln mit den seinigen und verall-t die letzteren, indem er die ersteren auf den Fall einer ι Fläche ausdehnt und dann die Lamé'schen Coordinaten :inigen transformirt. Endlich werden die Kirchhoff'schen für die Schwingungen einer elastischen Platte (Vor-über mathematische Physik No. 30) durch Anwendung 'dinaten σ und n auf eine sehr einfache und elegante ;ebracht. Schg.

.EY. On curvilinear coordinates. Quart. J. XIX. 1-22.

iner früheren Arbeit hatte Warren für den Fall normaler ıiger Coordinaten sechs Differentialgleichungen zweiter zwischen Coefficienten und Variablen aufgestellt (siehe IX. 1877. 469). Herr Cayley erweitert diese Unter-:n, indem er die Voraussetzung fallen lässt, dass die lichen Coordinaten rechtwinklige und cartesische sind, m er ausserdem die neuen Coordinaten p, q, r als be-unctionen von x, y, z betrachtet. So ergeben sich sechs ıere Differentialgleichungen nebst einer siebenten sym-:n, die ebenfalls einer von Warren gegebenen entspricht. uss bildet die Ableitung der von Lamé in seinen „Leçons ordonnées curvilignes" pp. 76, 78 gegebenen Gleichungen. Schg.

P. Barbarin. Note sur les coordonnées bipolaires. Nouv. Ann. (3) I. 15-29.

Der Verfasser bestimmt die Entfernung zweier Punkte und die Gleichungen von Tangente und Asymptote in Bipolarcoordinaten und benutzt die gewonnenen Formeln zur Ableitung von Sätzen über die bekannten Curven, welche den einfachsten Formen der Gleichungen zwischen diesen Coordinaten entsprechen.

Schg.

G. Leonhardt. Grundzüge einer Dipolargeometrie. Schlömilch Z. XXVII. 346-363.

Ueber die Bedeutung dipolarer Coordinaten s. F. d. M. XIII 1881. 403. Der Verfasser ist durch seine an die Neumann'schen Arbeiten sich anschliessenden Forschungen über Elektricitätsvertheilung auf einem Conoide zu einer rein geometrischen Untersuchung über jene Coordinaten veranlasst worden, deren Resultate hier vorliegen. Es wird zuerst die Green'sche Function in diesen Coordinaten ausgedrückt. Sodann führt der Verfasser den Begriff der „Isogreene" ein, d. h. derjenigen Curve, welche alle Punkte von gleicher Green'scher Function verbindet, und erhält durch mannigfache Specialisirungen und wiederum Verallgemeinerungen dieser Curve Gleichungen, welche verschieden bestimmte Ebenen, Geraden, Kegel, Conoide und Kugeln ausdrücken.

Schg.

H. Cox. On systems of circles and bicircular quartics. Quart. J. XVIII. 74-121.

Der Verfasser behandelt die Theorie der Systeme von Kreisen in der Ebene mit Hülfe eines symbolischen zum Teil neuen Algorithmus. Unter der Summe zweier Kreise c_1, c_2 versteht er der üblichen Anschauungsweise gemäss den Kreis

$$(c_1+c_2)C = c_1C_1+c_2C_2;$$

das doppelte Product $2(c_1c_2)$ zweier Kreise wird dann definirt als Summe der Quadrate der Radien, vermindert um das Quadrat

· Entfernung ihrer Mittelpunkte. Diese Definition scheint in ⁊ Tat zweckmässig, da sie mit den formalen Gesetzen der ıltiplication, soweit dieselben hier in Betracht kommen, in Einıng ist. Da sich jede gerade Linie als Summe von zwei eisen ansehen lässt, so ergeben sich aus den Gesetzen für ıltiplication und Addition der Kreise auch die für Strecken ı sind die von Grassmann in der Ausdehnungslehre entwickelı). Insbesondere wird für die Summe zweier ein „Kräftepaar" ldenden Strecken das Symbol θ eingeführt, für welches die rmalen Gesetze $\theta^2 = 0$, $\theta C = 1$, $\theta(c_1 - c_2) = 0$ in Anwendung bringen sind; der Beweis derselben ist allerdings unnötig ıständlich. Dieser Algorithmus lässt sich mit Vorteil verwenın zur Untersuchung einer grossen Zahl von Problemen, von ınen nur das der Ermittelung der bekannten Determinantenılationen zwischen den Centren von vier Kreisen, die zu einem thogonal sind, resp. von fünf Kreisen erwähnt sein möge. Der ehrzahl nach lassen sich die Resultate freilich unmittelbar durch ıs Princip der reciproken Radien aus der Theorie der Geraden ewinnen, und wenn in der Einleitung (p. 75) besonders hervorehoben wird: „It is shown, that three circles passing through point have properties analogous to those of an ordinary triangle", o giebt eben jenes Princip für diese hier nur zufällig aufretende Analogie den eigentlichen Grund an.

Zum Schlusse wird mittels der obigen Operationen ein eigenümliches System von Kreiscoordinaten eingeführt und mittels lerselben die Theorie der bicircularen Curve vierter Ordnung beıandelt, ohne dass indessen neue Gesichtspunkte gewonnen rürden. V.

I. Cox. On the application of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kinds of uniform space. Cambr. Trans. XIII 68-143; Cambr. Proc.. IV. 194-196.

Siehe Abschn. VIII. Cap. 1. p. 439.

Hamilton. Elemente der Quaternionen. Deutsch P. Glan. Bd. 1. Leipzig. Barth.

Seitdem Hankel 1867 in seiner „Theorie der compl Zahlensysteme“ auf 50 Seiten eine übersichtliche und alles We liche umfassende Darstellung der Quaternionen-Rechnung geg hat, sind verschiedene Versuche gemacht worden, dieselbe d Lehrbücher in Deutschland einzubürgern, so durch Unver Odstrčil, Graefe. Hierzu musste schon die zunehmende Ver dung dieser Methode in England und Amerika auffordern, (ne dings, seit dem Erscheinen von Laisant's trefflichem Lehrb auch in Frankreich). Zu diesen durch Kürze und Uebers lichkeit sich auszeichnenden selbständigen Arbeiten gesellen nun neuerdings Uebersetzungen der englischen Originalw von Hamilton und Tait. Herr Glan hat sicherlich sehr daran getan, den Meister der Theorie selbst dem deutschen P kum vorzuführen, und von seinen Werken dasjenige (posth zur Uebersetzung zu wählen, welches schon nach dem Zeugn Hankel's die Kenntnis der vom Verfasser bei Lebzeiten veröf lichten Schriften überflüssig macht. Der Stoff ist in zwei B verteilt, von welchen der vorliegende erste die vollstän Theorie mit Beispielen enthält, während der zweite nur An dungen geben soll. Eine ausführliche vergleichende Kritik Quaternionentheorie an der Hand dieses authentischen Lehrb zu geben, behält sich Referent für eine andere Stelle vor dieselbe den hier zur Verfügung stehenden Raum weit schreiten würde. Nur einige Bemerkungen mögen die kurz haltsangabe begleiten.

Der erste vorbereitende Teil enthält die Rechnung Strecken (Vectoren), im Wesentlichen übereinstimmend mi von Möbius und Grassmann her bekannten Darstellung. hier eingeflochtene Theorie der geometrischen Netze ha zwischen eine ganz gleichartige, sogar zu derselben Syn führende, übrigens selbständige Behandlung durch Noth erf welcher von der Ausdehnungslehre her dazu gelangte. (S. F XIII. 1881. 425). Die sonstigen Anwendungen der Str

nung enthalten zwar Fortschritte gegenüber den gewöhnlichen rdinaten - Methoden, sind aber durch die Grassmann'sche hode der Punktgleichungen wesentlich überholt. Es ist an schiedenen Stellen zu sehen, wie Hamilton selbst das Stecken-ben in der Vectoren-Rechnung als einen Mangel empfunden Anläufe zu einer Punktrechnung gemacht hat, so z. B. S. 31, der Schnittpunkt P_1 der Strecken PA und BC in der Form $= PA.BC$ dargestellt wird, oder S. 61, wo $DABC = -ADBC$ Volumen eines Tetraeders bedeutet. Da aber Hamilton diese sdrücke, welche bei Grassmann planimetrische Producte vor-llen und als notwendige Folgerungen aus einfachen Grund-ichungen sich ergeben, nur als willkürlich gewählte Abkür-gen aufstellt, so ist er auch nicht im Stande, einen mehr als übergehenden Gebrauch davon zu machen und sie organisch len Rahmen seiner Theorie einzufügen.

Im zweiten Teile wird uns zunächst die Quaternion als tient verschieden gerichteter Vectoren vorgeführt. Man kann e erste Untersuchung der Quaternionen als eine ausführliche stellung der Lehre vom Winkel in der Ebene und im Raume achten, wobei auch die trigonometrischen Functionen in den is der Betrachtung gezogen werden. Richtungs- und Längen-hältnis der Schenkel werden Anfangs durch denselben Quo-ten dargestellt, während später diese Grössen durch vor-tzte Buchstaben ausgedrückt werden. Um ein charakteristi-s Beispiel dieser Schreibweise zu geben, so würden andere oren, um auszudrücken, dass die Strecke a das n-fache der geneinheit e ist, einfach schreiben $ne = a$. Hamilton schreibt ir $Ta.Ua = a$, und nennt a einen Vector, Ta (n) den Tensor, Ua (e) den Einheits-Vector von a. Wir gelangen in diesem e auch zu dem wichtigsten und fruchtbarsten Begriff der ternionentheorie, nämlich zu dem der fundamentalen Einheiten k, sowie zu den zwischen diesen Einheiten geltenden Ge-n und zur Darstellung der Quaternionen selbst durch diese eiten. Eine einfachere Form nehmen Quaternionen in der-n Ebene an. An die specielle Untersuchung dieser Aus-e schliesst sich die Lehre von den Potenzen, Wurzeln und

Logarithmen der Quaternionen, worauf noch ein kurzer Abschnitt über Quaternionen im Raume folgt und über die associative Eigenschaft ihrer Multiplication.

Im dritten Teile wird dadurch, dass in einem Streckenquotienten der Divisor als reciproker Wert einer anderen Strecke aufgefasst wird, der Begriff des Productes zweier Strecken gewonnen, und diese Multiplication als nicht commutativ, wohl aber distributiv nachgewiesen. Es folgen dann Producte mehrerer Vectoren, vierte Proportionalen, Darstellung einer Quaternion als Product von Vectoren und am Schluss die Differentialrechnung der Quaternionen.

Diese kurzen Angaben können natürlich nur den allgemeinen Gang der Darstellung verfolgen, aber auch nicht annähernd einen Begriff geben von dem ungemeinen Reichtum an Beziehungen und Resultaten, die das Werk enthält. Leider ist das Studium desselben mit ausserordentlichen Unbequemlichkeiten verbunden, welche die Geduld des Lesers auf's Aeusserste in Anspruch nehmen. Dieses Uebelstandes konnten nicht einmal die selbständigen Bearbeiter des Gegenstandes Herr werden, geschweige der Uebersetzer. Der Hauptvorwurf trifft die Methode der Bezeichnung. Der Gebrauch der grossen Buchstaben S, T, U, V, um Eigenschaften der dahinter stehenden, durch andere Buchstaben ausgedrückten Gebilde zu bezeichnen, ist gradezu unerträglich, weil er dem Leser beständig zumutet, Combinationen von zwei Zeichen als einfache Begriffe, noch dazu von heterogenster Art, zu deuten. In Folge dessen erscheinen Formeln mit ganz simplem Inhalt schon complicirt, und das Transformiren der Formeln, sowie die Deutung ihres Inhalts ist eine um so verdriesslichere Arbeit, weil man sich bewusst ist, dass die Schwierigkeit nicht in der Sache sondern nur in der unzweckmässigen Form liegt. Hierzu kommen noch Combinationen jener Buchstaben und eine Menge anderer vorübergehend eingeführter Zeichen und Abkürzungen. Als erheblicher innerer Mangel der Theorie und das Verständnis erschwerend erscheint ferner die Willkür in der Wahl und die Zusammenhangslosigkeit der abkürzenden Bezeichnungen, namentlich, wenn man das geschlossene und folgerichtige System Grass

damit vergleicht, dessen Hilfsmittel in dieser Art sich in auf ein Minimum beschränken. Besser durchdacht ist minologie, nur dass wenigstens die Hälfte der eingeführdrücke vollständig überflüssig ist, was der Autor selbst · zwischen den Zeilen zugesteht. (Dabei sei gleich der ausgesprochen, dass der zweite Band das so nötige dige Register dieser Ausdrücke bringen möge). Diesen inden gegenüber verschwindet fast die Breite der Darund der wenigstens in der ersten Hälfte des Bandes iche Mangel an Anwendungen, welche die Mühe des is lohnen. Zum Glück hat Hamilton selbst eine vom tzer in dankenswerter Weise in der Vorrede mitgeteilte ıg dazu gegeben, welche Partien des Werkes beim ersten ı ohne Nachteil überschlagen werden können. Dennoch ır deutsche Anfänger besser auf die Eingangs genannten hinzuweisen sein, als auf das Hamilton'sche Originalwerk. ; überdies immer wieder betont werden, dass jeder Vere Quaternionentheorie weiter zu vervollkommnen mit Not-ceit auf die Ausdehnungslehre hinführt. (Wenn z. B. Résal noff den Ausdruck $S\alpha\beta$ als „geometrisches Product" von β auffassen, so ist dieses Product nichts anderes als das Product" der Ausdehnungslehre). Soviel Aufhebens auch Quaternionentheorie im Auslande gemacht wird, in der nte der Geometrie wird sie doch nur als vorübergehende elungsstufe des Calcüls erscheinen, welcher in der Aus-;slehre seinen umfassenden und endgiltigen Abschluss und ıllkommenste, weil sachgemässe Darstellung findet. Für ıtsche liegt daher, abgesehen vom historischen Interesse, ·eit eine Veranlassung vor, uns mit den Quaternionen be-zu machen, als es sich darum handelt, fremde Arbeiten ;sem Gebiete zu verstehen. Jedenfalls aber müssen m Herrn Uebersetzer dankbar sein für den grossen l an mühevoller Arbeit, womit er das Hamilton'sche werk in Deutschland eingeführt hat. Steht doch ın, dass solche Bestrebungen allmälig die Zahl jener lichen Mathematiker verringern werden, welche jede

Arbeit, in der *ab* nicht gleich *ba* ist, grundsätzlich perhorr
sciren. Schg.

D. Padeletti. Principii della teoria dei quaternioni elementarmente esposti. Batt. G. XX. 1-48.

Uebersichtliche Darstellung der Elemente der Quaternionentheorie, am Schluss mit einer kurzen Zusammenstellung de Hauptbegriffe und Formeln und funfzig Uebungsaufgaben. Di Grassmann'schen Bezeichnungen und Benennungen sind zwa nicht grundsätzlich adoptirt, aber überall, wo erforderlich, ge bührend hervorgehoben. Auch die Arbeiten von Bellavitis u. A sind berücksichtigt. Schg.

G. J. Mounier. Eene byzondere eigenschap der quaternionen. Nieuw Arch. VIII. 81-88.

Die Bedingung wird gesucht und gefunden, welcher zwe Quaternionen genügen müssen, damit das Product Null sei, oh dass eine von beiden Null ist. G.

C. S. Peirce. On the relative forms of quaternions. J. Hopkins Circ. 1882. 179.

Wenn das Symbol $(Y:Z)$ die Vertauschung der Y-Comp nente eines Vectors mit seiner Z-Componente bedeutet, und $1, i, j$ die Einheiten der Quaternionen sind, so ist

$$1 = (W:W)+(X:X)+(Y:Y)+(Z:Z),$$
$$i = (X:W)-(W:X)-(Y:Z)+(Z:Y),$$

während j und k aus i durch circulare Vertauschung von X, Y erfolgen. (W ist die vierte der homogenen Coordinaten.) Du Anwendung der Gesetze

$$(Y:Z)(Z:X) = (Y:X); \quad (Y:Z)(X:W) = 0$$

ilt man wieder die Grundgleichungen

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \quad ijk = -1 \text{ etc.}.$$

Hülfe dieser Symbole lassen sich die Quaternionen selbst leterminantenähnlichen Formen schreiben.

Schg.

J. WALKER. Solutions of two questions (5803, 6674). Ed. Times XXXVII. 46-47, 57.

Bestimmung der Lage gewisser Kreise als Uebungsaufgabe Anwendung der Quaternionen. Wn.

GRAEFE. Einige Sätze über abwickelbare Flächen abgeleitet mit Hülfe von Quaternionen. Hoppe Arch. LXIX. 1-18.

Der Verfasser leitet zunächst eine grössere Reihe von Sätzen , welche die Krümmung der Flächen im Allgemeinen betreffen, d giebt dann eine ausführliche Theorie der abwickelbaren ichen. Die Einfachheit der Formeln, welche aus dem Wegfall r Coordinaten resultirt, ermöglicht dem Verfasser die Lösung nplicirterer Aufgaben und die Aufstellung einer Reihe von tzen, deren allgemeinster mit der Frage zusammenhängt: Wie ss die Curve $\varrho = f(u, v)$ der Fläche $\varrho = f(u, v)$ beschaffen n, damit die geradlinige Fläche

$$\varrho = V(\alpha f' + \beta n + \gamma n f') + (a f' + b n + c n f')\lambda$$

e abwickelbare Fläche ist? (wobei α. β, γ, a, b, c Functionen ı v sind). Diese Frage gedenkt der Verfasser in einer späteren ɔeit zu beantworten. Schg.

PADELETTI. Su un calcolo nella teoria delle dinami ınalogo da quello dei quaternioni. Nap., Rend. XXI. 111-119.

Dem „Vector" der Quaternionen, welcher eine Strecke von

gegebener Richtung ausdrückt, stellt der Verfasser den Beg des „Segmentes" gegenüber, d. h. einer Strecke von gegebe Lage. Dasselbe soll für die Drehungen der Strecken und durch sie dargestellten Kräfte dasselbe leisten, wie der Ve für die Verschiebungen. Durch Aufstellung der Grundform und Operationen für Segmente wird gezeigt, dass diese Analo zwischen Vectoren und Segmenten wirklich besteht. Diese trachtungen werden dann erweitert, indem den gewöhnlic (Verschiebungs-) Quaternionen von der Form $B = b + \beta$ Drehungsquaternionen von der Form $A = a + \binom{\alpha}{\varrho}$ gegen gestellt werden. In der gewöhnlichen Bezeichnung der Qua nionen würde $A = a\left\{\cos A + \binom{U\alpha}{\varrho}\sin A\right\}$ sein. Es folgen Begriffe des Productes einer Kraft und einer solchen Quatern ferner eines Vectors und eines Segmentes, endlich zweier ternionen. Für das letztere wird der associative und distrib Charakter festgestellt. Soweit geht alles analog zu wie bei gewöhnlichen Quaternionen. Dagegen befolgt, abweichend dem Verhalten der letzteren, die Addition der neuen Quate nen andere Gesetze als die der Kräfte, so dass in einer Addit gleichung die Quaternionen nicht mehr durch die von ihnen gestellten Kräfte ersetzt werden können. Eine Anmerkung das Verhältnis fest zwischen den vom Verfasser eingeführte nennungen und Symbolen und denjenigen, welche Cli Everett, Bellavitis, Ball gebraucht haben.

Schg

Seydler. Zur Theorie der complanaren Biquaterni oder der doppelt complexen Grössen. Prag. Ber. 80-104.

Um für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

eine ebenso symmetrische Lösung zu finden, wie sie in

$$V = \varphi(x + iy) + \psi(x - iy)$$

Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ vorliegt, dehnt der Verfasser griff der complexen Multiplication (welcher er wegen der tativität der Factoren den Vorzug vor den Quaternionen wie er durch Grassmann für zwei Einheiten mittels der ngen $e_1 e_2 = e_2 e_1$, $e_1 e_1 = -e_2 e_2$ festgestellt ist, auf vier en aus, giebt also den Grössen e_1 und e_2 neben den resp. 1 und i noch zwei Werte h und k, wobei $k = hi$ gesetzt Eine aus den Einheiten 1, i, h, k abgeleitete Grösse q erich dann als complanare Biquaternion im Sinne Hamilton's. der Lösung der ursprünglich gestellten Aufgabe enthält eit noch Berechnungen der einfachen Functionen von q. hluss bildet eine geometrische Anwendung der gewonnesultate, aus der sich der Nutzen der complanaren Biquan für die Erweiterung von Resultaten der ebenen auf der räumlichen Geometrie ersehen lässt.

Schg.

Capitel 2.

Analytische Geometrie der Ebene.

A. Allgemeine Theorie der ebenen Curven.

OCKNICK. Sifferexempel till plana koordinatnetrien. Stockholm.

ie Sammlung von Aufgaben aus der analytischen Geoworin den bekannten Grössen immer bestimmte numerische beigelegt sind. E.

ZEUTHEN. Om stationäre kurver i el System. en T. (4) VI. 5-13.

Ein ebenes Curvensystem sei durch $f(xy\alpha) = 0$ dargestellt. In den meisten Lehrbüchern wird dann gesagt, dass die durch Elimination von α aus $f(xy\alpha) = 0$ und $\frac{\partial f(xy\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ entstandene Gleichung $\psi(xy) = 0$ einer stationären Curve dann eine einhüllende Curve des Systems darstellt, wenn sie nicht für einen gewissen Wert von α in dem System enthalten ist. Bei dieser Reservation werden aber zwei Umstände übersehen. Erstens kann es sich ereignen, dass zwar $f(xy\alpha) = \psi(xy)$ für $\alpha = \alpha_1$ ist, dass aber nicht zugleich α_1 gemeinschaftliche Wurzel von f und $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ ist. In diesem Falle ist $\psi = 0$ eine Curve, welche zugleich Curve des Systemes und einhüllende Curve der übrigen Curven ist. Zweitens kann es geschehen, dass $f(xy\alpha_1)$ nicht gleich $\psi(xy)$ wird, sondern $\psi(xy)$ Factor in $f(xy\alpha_1)$ ist. Dann wird, wenn nicht zugleich der erste Fall eintritt, $\psi(xy) = 0$ einen stationären Teil einer zerfallenden Curve des Systemes darstellen. Man muss daher in solchen Fällen die einzelnen Factoren von $f(xy\alpha_1)$ besonders untersuchen. Gm.

P. Gilbert. Exercices d'analyse infinitésimale. Math. II 17-20.

Ausdruck des Bogendifferentials ds einer Curve durch die Differentiale dq_1, dq_2 der halben Summe und der halben Differenz der Radienvectoren, welche jeden Punkt mit zwei festen Centren verbinden. In diesem Coordinatensysteme q_1, q_2 werden der Ellipsen- und Hyperbelbogen durch dasselbe Integral ausgedrückt. Mn. (Wn.)

B. Theorie der algebraischen Curven.

E. Holst. Et Par synthetiske Methoder isor til Br... ved Studiat af metriske Egenskaber. Christiania Verh. 18... No. 11.

)LST. Ein Paar synthetische Methoden in der rischen Geometrie mit Anwendungen. Lie Arch. VII 362.

ese beiden Abhandlungen, unter denen die letzte im lichen als eine Uebersetzung der ersten aufzufassen ist, en nach der Auffassung des Referenten die Aufmerksamer Geometer. Sie entwickeln beachtenswerte Methoden fern gleichzeitig hübsche Anwendungen derselben. Wir inken uns in diesem Referate auf die ebene Geometrie.

r Verfasser geht von einigen einfachen metrischen Bengen aus, die er zuerst in Clebsch Ann. IX. 341, 375 F. d. M. IX. 1877. 485) und im Bull. Soc. Math. de Fr. 52, (siehe F. d. M. XII. 1880. 553) entwickelt hat. So beschäftigt er sich mit dem fundamentalen Begriffe che Invariante", den Referent folgendermassen definiren . Eine Function von den Coordinaten gewisser Punkte oder n und von den Gleichungscoefficienten gewisser algebrai- Curven heisst eine metrische Invariante, wenn sie sich ber allen Bewegungen der Ebene als Invariante verhält. ann sich nun die interessante Aufgabe stellen, die ein- metrische Invariante aufzusuchen, bei deren Verschwinne gewisse projectivische (descriptive) Beziehung ausge- wird. So z. B. ist der (doppelte) Flächeninhalt eines s die einfachste metrische Invariante, deren Verschwinden kt, dass die drei Ecken auf einer Geraden liegen. An- its ist der Flächeninhalt eines Dreiseits, dividirt durch den sser des umgeschriebenen Kreises, die einfachste metri- nvariante, durch deren Verschwinden ausgedrückt wird, ie drei Seiten durch einen gemeinsamen Punkt gehen. ntsprechend bildet der Verfasser eine metrische Invariante ordinaten von sechs Punkten (oder Geraden), durch deren vinden ausgedrückt wird, dass dieselben einem Kegel- angehören. Für beliebige algebraische Curven ge- Ordnung lassen sich ähnliche Invarianten bilden. Die- Fälle, in denen die Entfernung zweier Punkte, der Winkel

zweier Geraden, die Entfernung eines Punktes von einer Gerade die Werte Null, Unendlich oder den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an nehmen, werden erschöpfend bestimmt. Neu und nützlich war dabei dem Referenten die auffallende Bemerkung, dass die Entfernung von zwei getrennten und unendlich entfernten Punkten nicht unendlich, sondern unbestimmt ist. Sind AB gegebene Punkte einer isotropen Geraden, so hat der Winkel APB einen bestimmten Grenzwert, wenn sich der Scheitel P in beliebiger Weise einem gegebenen auf der besprochenen Geraden gelegenen Punkte nähert. Nimmt man drei beliebige Erzeugende eines Hyperboloids, so hat das entsprechende Parallelepiped ein constantes Volumen. Interessante Sätze zwischen metrischen Invarianten, welche als Grenzfälle die Pascal'schen und Brianchon'schen Sätze umfassen, werden aufgestellt. Es besteht zwischen metrischen Sätzen ein sehr bemerkenswerter Dualismus, dessen Begrenzung indes nur angedeutet, aber leider noch nicht genau festgestellt wird. L.

E. Holst. Ein Beitrag zur methodischen Behandlung der metrischen Eigenschaften algebraischer Curven. Lie Arch. VII. 109-114.

Zur Auffindung von metrischen Eigenschaften einer algebraischen Curve kann man seinen Ausgangspunkt in den beiden folgenden evidenten Principien nehmen: Ein Product von n Factoren verschwindet oder wird unendlich dann und nur dann, wenn ein Factor gleich Null oder unendlich wird. Eine Summe von n endlichen Grössen ist immer endlich. Durch consequente Anwendung dieser Principien werden mehrere geometrische Sätze erhalten. L.

E. Holst. Analytischer Beweis eines geometrischen Satzes. Lie Arch. VII. 177-178.

Analytischer Beweis eines Satzes, der in der vorangehenden durch eine synthetische Methode erhalten wurde.

L.

LINDEMANN. Sur les courbes d'un système linéaire rois fois infini, qui touchent une courbe algébrique lonnée par un contact du troisième ordre. S. M. F., Bull. I. 21-40.

Ist $A = \Sigma\lambda_i\varphi_i = 0$ die Gleichung eines Gewebes von Cur-s^{ter} Ordnung, $f = 0$ eine Curve n^{ter} Ordnung, so sagen die chungen

$$A = 0, \quad dA = 0, \quad d^2A = 0, \quad d^3A = 0,$$
$$f = 0, \quad df = 0, \quad d^2f = 0, \quad d^3f = 0$$

dass eine dreipunktige Berührung zwischen einer Curve des ebes mit f stattfindet. Zur Bestimmung einer Curve, welche gesuchten Berührungspunkte auf f ausschneidet, hat man aus vorstehenden Gleichungen die λ und die ersten, zweiten und en Differentiale der homogenen Variablen x zu eliminiren. gl. F. d. M. IX. 1877. 485 und die daselbst gegebene Lite-.) Diese Resultante wird mittels symbolischer Rech- vollständig bestimmt und liefert in Uebereinstimmung mit vom Verfasser bereits auf anderem Wege in den Vorlesungen Clebsch entwickelten allgemeinen Resultaten eine Curve von Ordnung $4\left[s + \frac{3}{2}(n-3)\right]$. Gleichzeitig ist damit eine ex-e Darstellung der Formen gewonnen, welche in dem bei r Frage in Betracht kommenden Brill'schen Reciprocitäts- (Clebsch Ann. IV. 527, siehe F. d. M. III. 1871. 316) auf-ı. Der eingeschlagene Weg kann endlich dazu dienen, auch in beliebig vielfach lineares System von Curven die ex-e Darstellung der analogen Bedingungen zu liefern.

V.

J. S. Vaneček. Sur l'inversion générale. Lond., R. S. Pro XXXIII. 29-31.

Der Verfasser betrachtet in Verbindung mit einem Kegelschnitt C zwei Curven L, D, resp. von der Ordnung m, n. Die inverse Curve einer derselben in Bezug auf die andere ist eine Curve von der Ordnung $2mn$ mit $2n$ vielfachen Punkten von der Ordnung m und $2m$ vielfachen Punkten von der Ordnung n. Ferner findet folgender Satz statt: Wenn die eine Ecke α eines Polardreiecks $\alpha\alpha_1\alpha_2$ in Bezug auf einen Kegelschnitt C eine Curve L von der Ordnung m, die Ecke α_1 eine Curve D von der Ordnung n beschreibt, so bewegt sich die dritte Ecke α_2 auf einer Curve von der Ordnung $2mn$ mit denselben vielfachen Punkten wie oben, und zwar sind diese vielfachen Punkte die Schnittpunkte von C mit den Curven D, L. Cly. (Wn.)

Genese, Ch. Ladd. Solutions of a question (7028). Ed. Times XXXVII. 112-113.

Der Ort der Schnittpunkte der Tangenten einer Curve p^{ter} Klasse mit den darauf senkrechten Tangenten einer andern Curve q^{ter} Klasse ist vom Grade $2pq$. Wn.

C. Le Paige. Notiz über die $2k$-elementige neutrale Gruppe einer Involution k^{ter} Stufe und $(2k+1)^{ten}$ Grades. Wien. Ber. LXXXVI. 104-105.

Der Verfasser entwickelt die Covariante, durch deren Verschwinden die $2k$ Elemente der neutralen Gruppe gegeben werden. Scht.

C. Le Paige. Sur une représentation géométrique de deux transformations uniformes. Belg., Bull. (3) III. 760-7

C. Le Paige. Sur quelques transformations géométriques uniformes. Belg., Bull. (3) IV. 415-431.

LIE. Rapport. Belg., Bull. (3) III. 717

ıfache geometrische Deutung einer Transformation fünfter ;chster Ordnung mit Hülfe der Curven dritter Ordnung.

Mn. (Wn.).

L. Sur le centre des moyennes distances des points ne courbe unicursale. S. M. F., Bull. X. 137-139.

urch einfache Betrachtungen nach der Methode der anaen Geometrie gelangt der Herr Verfasser zu dem Theorem: Ort der Centra mittlerer Entfernungen derjenigen Punkte, er festen unicursalen Curve vom Grade ϱ und einem System urven m^{ter} Ordnung, deren Gleichung einen variablen Par im k^{ten} Grade enthält, gemeinsam sind, ist eine unicursale von der Ordnung $k\varrho$, welche die asymptotischen Richtungen rsprünglichen unicursalen Curve auch zu asymptotischen ngen, und zwar eine jede in der Multiplicität k hat." Der Verfasser macht darauf aufmerksam, dass der Grad dieses nicht von m abhängt, ferner, dass eine grosse Zahl beer Resultate in diesem Theorem enthalten ist, wobei der $= 1$ hervorgehoben wird. Am Schlusse findet sich eine ıdung auf ein Polygon, das einem festen Kegelschnitt chrieben und einem andern festen Kegelschnitt umıen ist. Mz.

ORDAN. Ueber Bündel von Kegelschnitten. n Ann. XIX. 529-553.

ehe Abschn. II. Cap. 2. p. 80.

. L. Russell. On certain geometrical theorems. . 2. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 35-37.

nthält Formeln zur Bestimmung des Kegelschnitts, welcher ınfpunktige, der Curve dritten Grades, welche eine neun-

punktige, endlich derjenigen Curve vierten Grades, welche eine vierzehnpunktige Berührung mit einer gegebenen Curve hat.
Cly. (Wn.)

W. Spottiswoode. Note on Mr. Russell's paper „On certain geometrical theorems. No. 2." Lond., R. S. Proc. XXXIII. 37-38.

Zeigt, dass die obige Methode angewandt werden kann zur Bestimmung von sechspunktigen Berührungen einer gegebenen Curve.
Cly. (Wn.)

H. J. Rink. Sur quelques applications géométriques simples du théorème d'Abel. Arch. Néerl. XVII. 460-478.

Die Arbeit schliesst sich an zwei Abhandlungen von Clebsch über denselben Gegenstand an, welche sich im Band LXIII. und LXIV. des Borchardt'schen Journals finden. Es werden in denselben einige neue und einfache geometrische Anwendungen des Abel'schen Theorems gegeben. Die erste Anwendung bezieht sich auf den Schnitt einer Curve dritter Ordnung mit einer Geraden; es werden auf diesem Wege viele bekannte Eigenschaften dieser Curven abgeleitet, unter anderen der Steiner'sche Satz über die in sie eingeschriebenen Vielecke, welchem durch Clebsch eine grosse Allgemeinheit gegeben ist. Ebenso wird weiter der Schnitt der Curve mit einer oder mehreren Linien zweiter Ordnung behandelt, und es werden einige bekannte Eigenschaften, welche sich hierauf beziehen, abgeleitet. Zum Schluss wird noch der Schnitt mit einer beliebigen Curve n^{ter} Ordnung besprochen. Auf diesem Wege wird das Theorem von Wiener (Clebsch Ann. III. 32, siehe F. d. M. II. 1869. 375) auf Neue bewiesen.
G.

F. Folie et C. Le Paige. Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Seconde partie. Belg., Mém. XLV. 1-1...

vorliegende Fortsetzung einer früher besprochenen Arbeit d. M. XII. 1880. 545-546) behandelt, ebenso wie die Arbeit selbst, nach einander Homographie, Involution, an-ıches Verhältnis. Ein weiteres Capitel ist Constructionen t, die hauptsächlich auf den involutorischen Eigenschaften

Die Verfasser geben an, dass ihre Methode die von Grassmann und Schröter als specielle Fälle, resp. als ıgen ergebe. Die zuletzt behandelten Aufgaben sind : Wenn neun Punkte einer Curve dritter Ordnung ge-nd, soll der Schnitt der Curve mit einer beliebigen Ge-'esp. mit einer, die durch ein oder zwei der gegebenen geht, bestimmt werden. Ferner soll, wenn neun Punkte sind, ein System von Dreiecken construirt werden, die ; auf die Curve conjugirt sind.

Mn. (Wn.).

PAIGE. Essai de géométrie du troisième ordre. tion (1883). Liège Mém. (2) X 1-104, 105-132; Belg., Bull. 85-112.

Verfasser fasst in streng systematischer Anordnung sherigen Untersuchungen über höhere Geometrie zusam-ır behandelt 1) die Homographie dritter Ordnung, 2) In-dritter Ordnung, 3) anharmonisches Verhältnis, 4) po-ıppen.

lem Zusatze beschäftigt sich der Verfasser, in Ergänzung rüheren Untersuchungen, mit der Construction homogra-Punktreihen und speciell mit folgender fundamentaler : Wenn eine Homographie dritter Ordnung und zweiten durch eine hinreichende Zahl von Bedingungen definirt soll zu zwei gegebenen Elementen das zugehörige dritte n werden. Mn. (Wn.).

PAIGE. Sur les courbes du troisième ordre. Bull. (3) IV. 334-344.

F. Folie. Rapport. Belg., Bull. (3) IV. 301-302.

Zieht man von einem Punkte einer Curve dritter Ordnung Radien nach den Berührungspunkten der Tangenten aller übrigen Curvenpunkte, so erhält man eine biquadratische Involution ersten Ranges, die durch eine Gleichung von der Form

$$a_x^4 + \lambda(aa')a_x^2 + a'^2_x = 0$$

definirt wird. Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich eine grosse Zahl von Eigenschaften der Curven dritter Ordnung ableiten, speciell solcher, die sich auf die Inflexionspunkte beziehen.

Mn. (Wn.).

R. A. Roberts. On tangents to a cubic forming a pencil in involution. Lond., M. S. Proc. XIII. 25-27.

J. J. Walker. On the covariant locus of the vertex of a pencil of tangents on a cubic in involution. Lond., M. S. Proc. XIII. 66-69.

Herr Roberts zeigt durch Untersuchung der kanonischen Form der Gleichung einer Curve dritter Ordnung U, dass der Ort der Punkte, von denen sechs Tangenten in Involution an die Curve gehen, aus zwölf Curven dritter Ordnung und den neun Inflexionstangenten von U besteht. Herr Walker fügt hinzu, dass diese Curven dritter Ordnung keinen Doppelpunkt haben, so lange dies nicht bei U der Fall ist, und dass das Produkt der Gleichungen derselben rational aus den Covarianten und Invarianten von U zusammengesetzt ist, während bekanntlich erst das Quadrat des Produkts der Gleichungen der neun Inflexionstangenten eine rationale Covariante ist.

V.

F. d'Arcais. Sopra alcuni teoremi sulle curve piane del terzo ordine. Ven. Ist., Att. (5) VIII. 673-685.

Sind die Punkte einer allgemeinen C_3 als doppelt-periodische Functionen eines Parameters u mit den Perioden ω, ω' dargestellt, so ist bekanntlich $u_1 + u_2 + \cdots u_{3n} \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$ die

ng dafür, dass die $3n$ entsprechenden Punkte auf einer C_n ı, und umgekehrt. Von diesem Theorem werden einfache Anıngen auf Punktgruppen auf der C_3 gemacht, die von Tanılpunkten gebildet sind, von denen die folgende erwähnt sein : Die $12n$ Berührungspunkte der von den Schnittpunkten iner C_n an die C_3 gelegten Tangenten liegen zu je $3n$ auf ırven n^{ter} Ordnung, wo m die Anzahl der Lösungen der uenz

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{3n} \equiv 0 \pmod{2}$$

= 0, 1 ist. V.

'. Davis. Note on binodal quartics. J. Hopkins Circ. 32. 242.

)ie kurze Note bezieht sich auf die Parameterdarstellung lliptischen C_4, enthält jedoch nichts Neues. V.

C. Gerade Linie und Kegelschnitte.

:. Story. On a system of conchordal conics. J. Hopkins c. 1882. 178.

:. Story. Analytical proof of some properties of nodal quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

)onchordal nennt der Verfasser das System aller ∞^3 Kegeltte, welche durch dieselben zwei festen Punkte gehen, al-Axe zweier Kegelschnitte eines solchen Systems die Verngslinie ihrer beiden nicht festen Schnittpunkte, Radicalım dreier Kegelschnitte eines solchen Systems den Punkt, lchem sich die drei Radical-Axen von immer je zwei dieser Kegelschnitte schneiden, endlich Radical-Kegelschnitt den schnitt, welcher durch die sechs Berührungspunkte der sechs nten geht, die an drei conchordale Kegelschnitte von ihrem al-Centrum aus gezogen werden können. Die analytische

Methode, mit deren Hilfe der Verfasser die bekannten (Salm Conic sections) in diesen Definitionen steckenden beiden Sä sowie einige andere auf drei conchordale Kegelschnitte be liche ebenfalls bekannte Sätze beweist, führen ihn in sei zweiten Note zu einem analytischen Nachweise von Eigensch der Curven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

Scht.

W. Abendroth. Anfangsgründe der analytischen G metrie der Ebene. Leipzig. Hirzel.

Der Herr Verfasser sagt im Vorwort, dass er weniger e kurzgedrängten Abriss des Lehrganges für den Schüler, als mehr eine leichtfassliche Darstellung der Elemente geben wo die nicht nur der Schüler bei der Repetition selbst verste sondern auch der weiter Vorgeschrittene als Vorbereitung umfassenderen Lehrbüchern und schwierigeren Vorlesungen nutzen könne. Das Buch zerfällt in drei Abschnitte: Die ger Linie, die Linien zweiten Grades als geometrische Orte allgemeine Sätze über die Kegelschnitte. Es beginnt mit Begriff der Function reeller Variablen und der graphischen stellung ihres Verlaufs. Nach Behandlung der geraden L und ihrer verschiedenen Gleichungsformen folgt der Kreis die Coordinatentransformation. Dann wird die Parabel geometr definirt, ihre Gleichung, die Gleichung einer ihrer Tangenten die zugehörige Construction gegeben; hierauf kommt dass bei der Ellipse und Hyperbel. Daran knüpft sich die Betr tung des Kegels und seiner Schnitte, die Polargleichungen Kegelschnitte. Aufgaben. Discussion der allgemeinen Gleich zweiten Grades; Sätze über Durchmesser und Tangenten; Q dratur der Ellipse und Parabel. Formeln. Die Darstellung sehr klar, und die äussere Ausstattung des Buches gut.

Mz.

IEGAND. Analytische Geometrie. 6te Aufl. Halle. W. Schmidt.

er Inhalt dieses Buches giebt die analytische Geometrie der von den Elementen an bis zu den Kegelschnitten ein- ıslich. Es eignet sich sehr gut für ein erstes Studium Wissenschaft. Ein besonderes Capitel ist betitelt: Me- der Tangenten. In diesem ist die Tangente an eine be- Curve definirt und dann die Anwendung hiervon auf die ıchnitte gegeben. Auch ist die Quadratur der Ellipse und ırabel gezeigt. Ueberall sind ferner passende Aufgaben ein- ıten. Gegen Ende des Buches werden einige Curven höherer mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung dis- wie die Cissoide u. a. m. Dann folgen einige transcen- Curven: Die logarithmische Linie, die Sinuslinie, die de. Erwähnt werden einige zur Cycloide gehörige Curven. nhang sind ferner noch vermischte Aufgaben gegeben.

Mz.

IOCHHEIM. Aufgaben aus der analytischen Geo- trie der Ebene. Leipzig. Teubner.

on diesem Buche liegt das erste Heft vor, welches in zwei lerte Teile zerfällt, nämlich in Aufgaben und Auflösungen. rden die gerade Linie, der Punkt und der Kreis behan- Das Buch soll den Studirenden der Mathematik auf der sität und der technischen Hochschule zur Einübung und en Verarbeitung der analytischen Geometrie dienen, jedoch in seinen ersten Heften beim Unterrichte in der obersten der Realschule Verwendung finden können. Von den hier enen 558 Aufgaben mögen nur einige erwähnt werden: eines Polygons, Bestimmung des Winkels, den zwei Ge- inschliessen, Gleichungen höheren Grades, welchen Systeme ;eraden Linien entsprechen, Strahlenbüschel, homogene oordinaten, involutorische Punktreihen, homogene Linien- naten, Pol und Polare, Radical-Axe und Radical-Centrum,

Kreisbüschel, Tactionsproblem. Ferner ist zu beachten sowohl numerische Rechnungen als auch analytische Oper beständig in Anwendung kommen. Man darf wohl sagen das Buch seinem Zweck vollkommen entspricht.

M

R. A. Roberts. A collection of examples and pro on conics and some of the higher plane curves Dublin. 1882. Darb. Bull. (2) VI. 264.

Von diesem Werk war dem Referenten selbst nur ein B zugänglich, und zwar im Bulletin von Darboux, wo es dass der Verfasser die meisten seiner Theoreme und Pro durch die Lectüre der wohlbekannten Bücher von Salmon ferner der Abhandlung von Casey und eines Werkes von Dar „Ueber eine besondere Art algebraischer Curven und Flä gewonnen hat.

Mi

X. Antomari. Relation entre les distances mutu 1° de quatre points situés sur un même cercle, 2° de points situés sur une même sphère. Nouv. Ann. 462-465.

Der Herr Verfasser erwähnt zuerst, dass die Herren R und Comberousse in ihrem „Traité de géométrie“ die i Ueberschrift angegebenen Relationen mit Hülfe des Mult tionssatzes von Determinanten nachweisen, und giebt dann andern Beweis. Sind $(x_1\, y_1) \dots (x_4\, y_4)$ die rechtwinkligen dinaten von vier Punkten A, B, C, D eines Kreises, ferner a_1, b die Abstände dieser Punkte von irgend einem Punkte O Ebene, so hat man vier Gleichungen:

$$a_1^2 + \alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma = 0,$$
$$b_1^2 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma = 0,$$
$$c_1^2 + \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma = 0,$$
$$d_1^2 + \alpha x_4 + \beta y_4 + \gamma = 0,$$

raus durch Elimination von α, β, γ die Gleichung

$$\Sigma \pm a_1^2 \,.\, x_2 \,.\, y_3 \,.\, 1 = 0$$

it. Wenn dann der Inhalt des Dreiecks *BCD* mit *A* bezeichnet rd, der von *CDA* mit *B* u. s. w., so ergiebt sich aus der sten Gleichung:

$$Aa_1^2 - Bb_1^2 + Cc_1^2 - Dd_1^2 = 0.$$

mmt man ebenso drei andere beliebige Punkte der Ebene O_{11}, O_4 (wie vorher O_1) hinzu, so erhält man noch drei andere eichungen:

$$Aa_2^2 - Bb_2^2 + Cc_2^2 - Dd_2^2 = 0, \text{ u. s. w.}$$

raus folgt dann die Gleichung

$$\Sigma \pm a_1^2 \, b_2^2 \, c_3^2 \, d_4^2 = 0.$$

sst man dann O_1 mit *A*, O_2 mit *B*, etc. coincidiren, so erhält n die verlangte Relation. Ganz das analoge Verfahren lässt auf die Kugel anwenden; auch kann man in gleicher Weise Relationen unter den gegenseitigen Entfernungen von fünf nkten einer Ebene, sechs Punkten des Raumes aufstellen.

Mz.

SYKORA. Enveloppe einer Geraden, welche zur Summe ler Quadrate der Abstände von einer Anzahl von Punkten eine constante Grösse hat. Prag. Ber. 1881. 23-40.

In ausführlicher analytischer Rechnung, wobei ein Punkt ch seine Coordinaten (x,y) und eine Gerade durch ihre Coorāten (u,v), die der Gleichung $ux + vy + 1 = 0$ entnommen l, bezeichnet werden, wird die fragliche Enveloppe durch eine ichung zweiten Grades in Liniencoordinaten ausgedrückt; sie also ein Kegelschnitt. Bleiben die gegebenen Punkte dieselu, und verändert sich nur die constante Summe, so erhält man e Reihe confocaler Kegelschnitte. Es wird nun die Construcı eines solchen Kegelschnittes durchgeführt und gezeigt, wie 1 von *n* gegebenen Punkten zu $n + 1$ solchen übergehen kann. Besondern wird nachher der Fall betrachtet, in welchem die egebenen Punkte gleichmässig auf der Peripherie eines Kreises

verteilt sind; der Kegelschnitt erweist sich dann, mit Aus des Falles $n = 2$, als Kreis. Am Schlusse der Arbeit w Enveloppe noch in Punktcoordinaten behandelt, und schli discutirt, wann sie Ellipse oder Hyperbel ist. M

E. Hunyady. Zusatz zu einer Abhandlung in Borch Journal LXXXIII. p. 76. Kronecker J. XCII. 307-311

Die Abhandlung (siehe F. d. M. IX. 1877. 494), auf dieser Zusatz sich bezieht, war betitelt: „Ueber die verschie Formen der Bedingungsgleichung, welche ausdrückt, dass Punkte auf einem Kegelschnitt liegen", und hatte den Zwe Theoreme von Pappus, Desargues, Newton, Pascal und (durch Gleichungen auszudrücken. In dieser Arbeit wird schliesslich auf das Theorem von Pappus Bezug genommen nach bei sechs Punkten 123456 eines Kegelschnitts das hältnis der Producte der Abstände des Punktes 5 von je Gegenseiten des Vierecks 1234 dasselbe bleibt, wenn sta Punktes 5 der Punkt 6 genommen wird. Dieses Theorem hier aus der Bedingungsgleichung

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 z_1 & x_1 y_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 & x_2 y_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6 z_6 & x_6 z_6 & x_6 y_6 \end{vmatrix} = 0$$

durch directe Umformung mit Hülfe von Determinantensät die andere Gleichung

$$(136)(145)(235)(246) - (135)(146)(236)(245) = 0$$

gewonnen. Hierbei ist die Bezeichnung eingeführt:

$$\Sigma \pm x_i y_k z_l = (ikl).$$

M

LSTENHOLME. Solution of a question (6446). Ed. Times XXVI. 70-71.

Ist

$$u \equiv (a,b,c,f,g,h)(x,y,1)^2 = 0$$

Gleichung eines Kegelschnitts in rechtwinkligen Coordinaten, sind die Directrices bestimmt durch die Gleichung

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\lambda u,$$

λ die Wurzel der Gleichung

$$(2) \qquad \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = h^2$$

Für schiefwinklige Coordinaten treten an Stelle der Gleichun- (1) und (2) die folgenden:

$$(1\text{a}) \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\cos\omega = 4\lambda u,$$

$$(2\text{a}) \qquad \lambda^2 - \lambda(a+b-2h\cos\omega) + (ab-h^2)\sin^2\omega = 0.$$

Wn.

E POLIGNAC Solution of a question (6735). Ed. Times XXVI. 93-94.

Ein ungeschlossenes Polygon sei einem Kegelschnitte einbrieben, einem andern umschrieben; es seien μ_1 und μ_2 zwei einander folgende, a_1 und a_2 zwei andere auf einander folle Seiten, in derselben Reihenfolge genommen. a_1 schneide n m_2, während m_1 der Schnittpunkt von a_2 mit μ_1 ist. Geht , während μ_1 und μ_2 fest bleiben, dagegen für a_1 und a_2 re und andere Seitenpaare genommen werden, die Linie $_2$ durch einen festen Punkt, so berühren beide Kegelschnitte nder doppelt. Wn.

V. GENESE. On linear syzygetic relations between ıe coefficients of ternary quadrics. Brit. Ass. Rep.

Die ternäre quadratische Form $(a,b,c,f,g,h)(x,y,z)^2$ stellt chiedene Curven oder Flächen dar, je nach der Wahl des

Coordinatensystems x, y, z. Betrachtet man z. B. x, y, z als lineare Coordinaten eines Punktes, so stellt die Form ei Kegelschnitt dar. Findet zwischen den Coefficienten die G chung

$$la + mb + nc + pf + qg + rh = 0$$

statt, so hat der Kegelschnitt bekanntlich die Eigenschaft, d sich in denselben Dreiecke einbeschreiben lassen, die in Be auf einen festen Kegelschnitt sich selbst conjugirt sind. Genü dabei die Coefficienten l, m, n, p, q, r noch der Bedingung

$$\begin{vmatrix} l & r & q \\ r & m & p \\ q & p & n \end{vmatrix} = 0,$$

so liegt der Kegelschnitt so, dass zwei feste Punkte in Bez auf denselben einander conjugirt sind.

In der vorliegenden Arbeit wird nun der Fall behand dass gleichzeitig zwei lineare Relationen zwischen den obig Coefficienten stattfinden. Es ergiebt sich dadurch der folgen zuerst von Hesse gefundene Satz: „Kegelschnitte, welche zw Diagonalen eines vollständigen Vierseits harmonisch teilen, teil auch die dritte harmonisch.“

Finden ferner drei lineare Relationen statt, so giebt es endlich viele Paare von conjugirten Punkten, die alle auf ei Curve dritten Grades liegen. Csy. (Wn.).

W. J. C. Sharp. Solution of a question (6242). Ed. T XXXVI. 123-124.

In der Ebene dreier Kegelschnitte A, B, C giebt es drei Tr von Punkten a, b, c von der Eigenschaft, dass A_b, B_c, C_a res tive mit B_a, C_b, A_c identisch ist. Dabei ist unter P_q die Po des Punktes q in Bezug auf den Kegelschnitt P zu verste Von den drei Dreiecken, die durch die drei Punkte a, d die drei Punkte b, durch die drei Punkte c gebildet wer sind je zwei in perspectivischer Lage. Sind jene neun Pu gegeben, so sind dadurch drei Kegelschnitte, zu d

in der oben genannten Beziehung stehen sollen, eindeutig immt. Wn.

PASCH. Bemerkungen zur Kegelschnittstheorie. Schlömilch Z. XXVII. 122-124.

Man kennt den folgenden Satz: „Sucht man auf den Seiten es Dreiecks *abc* diejenigen Punkte $\alpha\beta\gamma$, welche in Bezug auf en Kegelschnitt jedesmal der gegenüber liegenden Ecke congirt sind, so liegen $\alpha\beta\gamma$ auf einer Geraden D; zieht man durch Ecken des Dreiecks diejenigen Strahlen, welche jedesmal der genüber liegenden Seite conjugirt sind, so erhält man drei ahlen durch einen Punkt d, den Pol der Geraden D, (diese i Strahlen sind die Polaren von $\alpha\beta\gamma$)." Vergl. Steiner-Schröter, gelschnitte, II. Abteilung § 31, p. 153 f., Reye, Geometrie der ge, II. Aufl., I. Abteilung S. 191 f.

Vom Verfasser wird die Gleichung der Geraden D aufgelt mit Hülfe der Identität

$$(abc)f(xy) = (bcx)f(ay) + (cax)f(by) + (abx)f(cy),$$

in

$$f(xy) = \Sigma a_{ik}x_i x_k \text{ mit } a_{ik} = a_{ki};\quad i,k = 1,2,3$$
$$(abc) = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3,\ (bcx) = \Sigma \pm b_1 c_2 x_3 \text{ u. s. w.}$$

l $f(xx) = 0$ die Gleichung des Kegelschnitts ist. D ist dann gestellt durch

$$\frac{(bcx)}{f(bc)} + \frac{(cax)}{f(ca)} + \frac{(abx)}{f(ab)} = 0.$$

Linie D, welche die Seiten *abc* zu einem Polvierseit ergänzt, in Bezug auf das Dreieck *abc* (aufgefasst als Curve dritter sse) denselben Pol δ wie der Kegelschnitt. Der Punkt d, cher mit *abc* ein Polviereck bildet, hat in Bezug auf das ieck *abc* (aufgefasst als Curve dritter Ordnung) dieselbe are Δ wie der Kegelschnitt. Rg.

ILL. De l'involution de plusieurs points sur une conique. Nouv. Ann. (3) I. 62-79.

Giebt man einen Kegelschnitt in der Form

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

so sind seine Coordinaten als Functionen eines Parameters t
gendermassen darstellbar:

$$x = z\frac{2t}{1+t^2}, \quad y = z\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Drei Punkte auf diesem Kegelschnitt bilden eine Involution,
man zur Bestimmung der ihnen entsprechenden Werte von
Gleichung hat:

$$t^3 + \lambda t^2 + (a\lambda + b)t + c\lambda + d = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt für je zwei Wurzeln t und t'
selben

$$\frac{t^3 + bt + d}{t^2 + at + c} = \frac{t'^3 + bt' + d}{t'^2 + at' + c} = \lambda,$$

oder:

$$t^2t'^2 + att'(t+t') + c(t+t')^2 - (c+b)tt' - d(t+t') + bc - ad =$$

Die hierdurch definirten variabeln Dreiecke werden jetzt i
ziehung zu andern Kegelschnitten gesetzt und auf diese
Sätze über Polygone, welche Kegelschnitten ein- und umbeschr
sind, gewonnen. Wir führen folgende an: I. Gegeben seie
Kegelschnitte

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{(b+1)^2} - \frac{z^2}{(b-1)^2} = 0.$$

1) Diese bilden ein allgemeines System von zwei I
schnitten, so dass ein dem ersten eingeschriebenes Dreiecl
zweiten umschrieben ist. Die Parameter der Scheitel genüg
Gleichung

$$t^3 + \lambda t^2 + bt + \frac{\lambda}{b} = 0.$$

2) Die Verbindungslinien der Scheitel mit den Berüh
punkten ihrer Gegenseiten umhüllen die Curve

$$\left(\frac{x}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{2b}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{2b} - \frac{1}{b-3}\right)^{\frac{2}{3}} z^{\frac{2}{3}}.$$

Der Punkt, in dem diese drei Linien sich schneiden, be-
t einen Kegelschnitt

$$\frac{y^2}{(b+3)^2(b-1)^2}-\frac{x^2}{(b+3)^2}-\frac{z^2}{(b+1)^2}=0.$$

Betrachtet man die drei Kegelschnitte

$$x^2+y^2-z^2=0,$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{(b+1)^2}-\frac{z^2}{(b-1)^2}=0,$$

$$\frac{x^2}{4b}+\frac{y^2}{3+2b-b^2}+\frac{z^2}{(b-1)^2}=0,$$

len diese das allgemeine System dreier Kegelschnitte, so
in dem ersten eingeschriebenes Sechseck dem dritten um-
en ist, und gleichzeitig die Diagonalen, mit Ausschluss der
liagonalen, den zweiten berühren.

I. Betrachtet man den Kegelschnitt

$$x^2+y^2-z^2=0$$

e drei Geraden

$$y=tx,\quad y=t'x,\quad y=t''x,$$

Parameter t, t', t'' die Gleichung

$$t^3+\lambda t^2+bt+c\lambda=0$$

igen, während zwischen b und c die Relation

$$3c^2-4bc^2+6bc-1c-b^2=0$$

, so sind diese Linien die Diagonalen eines mit λ ver-
chen Sechsecks, welches dem gegebenen Kegelschnitt ein-
eben und einem andern umschrieben ist;

das Sechseck ist einem Kegelschnitt einbeschrieben, dessen
ing

$$\alpha x^2+\beta y^2-z^2=0$$

Geraden, welche die Scheitel abwechselnd verbinden, sind
ten des Kegelschnittes

$$\alpha' x^2+\beta' y^2-z^2=0,$$

α', β, β' den Gleichungen

$$\alpha^2+\alpha(b+c-2)+1-b-c+bc=0,$$

$$\beta^2+\beta\frac{b+c-2bc}{bc}+\frac{1-b-c+bc}{bc}=0$$

genügen. Die letzten Untersuchungen beziehen sich auf ähnliche Eigenschaften von Fünfecken. Rg.

X. Antomari. Sur deux propriétés relatives aux foyers et aux cercles focaux dans les coniques. Nouv. Ann. (3) I. 102-110.

Der Herr Verfasser geht von der bekannten Definition der Brennpunkte eines Kegelschnitts aus, dass sie Centra eines Kreises mit dem Radius Null sind, der die Curve doppelt berührt, und gelangt hierdurch zu der Erklärung des Kegelschnitts als Ort von Punkten, deren Entfernungen von einem Kreise mit dem Radius Null und von einer festen Geraden ein constantes Verhältnis haben. Diese Erklärung wird nun verallgemeinert auf Grund einfacher analytisch-geometrischer Betrachtungen, und lautet dann: „Ein Kegelschnitt ist der Ort aller Punkte, deren normale Entfernungen von einem festen Kreise und einer festen Geraden ein constantes Verhältnis haben; das Centrum des Kreises ist ein Brennpunkt des Kegelschnitts, und die feste Gerade ist senkrecht zur Focalaxe und geht durch zwei Punkte, die dem Kegelschnitt und dem Kreise gemeinsam sind.“ Nachher gelangt der Herr Verfasser noch zu dem weiteren Satz: „Jede Curve zweiten Grades ist der Ort von Punkten, deren Entfernungen von einem festen Kreise (diese Entfernungen unter einem constanten Winkel gemessen) zu den Entfernungen von einer festen Geraden ein constantes Verhältnis haben.“ Am Schlusse findet sich noch eine elementare geometrische Betrachtung, aus welcher der vorige Satz hervorgeht. Mz.

Weitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über Kegelschnitte im Allgemeinen in analytischer Behandlung von Townsend, E. W. Symons, G. F. Walker, Ch. Ladd, R. E. Riley, D. Edwardes, W. J. C. Sharp, Genese, Malet, G. Heppel, Matz finden sich Ed. Times XXXVI. 56-57, 75, 76; XXXVII. 21-22, 92, 97-98. Wn.

V. Symons, R. Knowles. Solutions of a question 577). Ed. Times XXXVI. 51.

[st einer Parabel ein Dreieck PQR so einbeschrieben, dass ınd PR die Normalen in Q und R sind, so liegt der Schwert des Dreiecks auf der Axe der Parabel, und die Seite QR durch einen festen Punkt der Axe. Wn.

---

ere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über e Parabel in analytischer Behandlung von E. W. 'mons, T. R. Terry, E. Rutter, G. F. Hopkins, . F. Walker, A. H. Curtis, S. Marks, J. S. Jenkins, Knowles, Wolstenholme finden sich Ed. Times XXXVI. ; XXXVII. 37-38, 56-57, 114, 116. Wn.

---

ammond, B. Easton. Solutions of a question (6117). . Times XXXVII. 111.

.st e die Excentricität einer Ellipse, deren grosse Axe $= 1$ nd ist E die Länge des Ellipsenquadranten, so ist

$$\int_0^a \frac{eEde}{(1-e^2)(a^2-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi a}{2(1-a^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

ır Satz wird durch einfache Transformationen eines Doppelrals nachgewiesen. Wn.

. Dawson, E. Rutter. Solutions of a question (6759). l. Times XXXVII. 51.

.st ϱ der Krümmungsradius einer Ellipse, ψ der Winkel der ente mit der grossen Axe, so ist die Gleichung der Ellipse

$$\varrho^{-\frac{2}{3}} = (ab)^{-\frac{4}{3}}\{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi\}.$$

'läche zwischen dem Ellipsenquadranten, den Axen und der ıte ist

$$\frac{3(a^4+b^4)+2a^2b^2}{32ab}\pi.$$

Das letzte Resultat lässt sich auf die Curve ausdehnen, deren Gleichung in den obigen Coordinaten ist $\varrho = a\cos^n\psi$.

Wn.

E. J. Nanson. Note on the geometry of conics. Mess. (2) XII. 40-41.

Die bekannten Sätze, dass in der Ellipse die Summe, in der Hyperbel die Differenz der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser constant ist, wird hier durch eine Methode abgeleitet, die auf beide Curven gleichzeitig anwendbar ist.

Glr. (Wn.)

P. H. Schoute. Trouver le lieu des centres des hyperboles équilatères qui ont un contact du troisième ordre avec une parabole donnée. S. M. F. Bull. X. 222-223.

Diese Frage aus der Kegelschnittslehre beantwortet der Verfasser dahin, dass der zum Punkte A der Parabel bezüglich der Directrix symmetrische Punkt das Centrum der gleichseitigen Hyperbel des Verfassers ist. Der Verfasser glaubt, dass sich zwei Parabeln im Endlichen vierpunktig berühren können, was nicht richtig ist, z. B. weil man das unendlich kleine Viereck immer als unendlich kleines Vierseit ansehen kann, folglich etc. Demnach ist Satz e) falsch, Problem g) gegenstandslos. Kr.

Wolstenholme. Solution of a question (2706). Ed. Tim. XXXVI. 44-45.

Es giebt stets zwei gleichseitige Hyperbeln, welche die Seiten eines gegebenen stumpfwinkligen Dreiecks berühren und durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des Dreiecks gehen. Die Mittelpunkte dieser Hyperbeln sind die Schnittpunkte des Neunpunktekreises mit dem umschriebenen Kreise des Dreiecks.

Wn.

Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über ›e und Hyperbel in analytischer Behandlung von OPENSHAW, G. F. WALKER, N. SARKAR, J. R. ›N, R. KNOWLES, W. J. C. SHARP, C. TAYLOR, ›IGH, A. L. SELBY, E. RUTTER, WOLSTENHOLME, DD, S. TEBAY, MATZ, J. O'REGAN finden sich ›es XXXVI. 46-47, 48, 99-100, 102, 118-120; XXXVII. 30, 36-37, ›3-94, 118-119. Wn.

D. Andere specielle Curven.

TORY. Analytical proof of some properties of al quartics. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

› Abschn. IX. Cap. 2. C. p. 607.

ARD. Interprétation de l'équation caractéristique verses courbes. Math. II. 25-30.

›erden die Gleichungen der Kegelschnitte, der Ketten- Tractrix, der Cissoide, der Strophoide und der Evolute ›e besprochen. Mn. (Wn.).

BLANC. Solution d'une question. Nouv. Ann. (3) I.

[nflexionspunkte der Curve $x^3+y^3-3kxy+1=0$ sind hschnitte der Coordinatenaxen mit der Curve. Zwei ($x, y = 0, -1; -1, 0$), die übrigen sind imaginär. sodann die Bedingung für das Zerfallen der Curve in de aufgesucht. O.

›IJE OF GENNAS. On a remarkable property be- g to some cubics. Analyst IX. 108-110.

Der Verfasser untersucht die Fälle, in denen die symmetr
Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt

$$y^2 = x^2 \frac{Ax+B}{Cx+D}$$

die Eigenschaft hat, dass, wenn man von dem Doppelpunkte Sehnen unter einem bestimmten Winkel zieht, die Verbind linie ihrer Endpunkte stets durch einen festen Punkt geht findet dies in zwei Fällen statt, einmal, wenn der gege Winkel 60° (oder 120°) beträgt. Dann ist $B = 3D$, und ist feste Punkt ist der Punkt

$$x = \frac{\gamma D}{C-3A}, \; y = 0.$$

Ein zweiter Fall ist der, in dem der Winkel 90° beträgt; $B = D$, und der feste Punkt ist

$$x = -\frac{B}{A}, \; y = 0.$$

Jn. (Wn.)

A. Mannheim. Théorèmes de géométrie. Mess. 190-191.

1) Ist c ein Punkt einer gegebenen Ellipse und m der Punkt, in dem eine von c ausgehende Linie eine confocale E berührt, so ist der Ort für m eine Curve dritten Grades mit Doppelpunkte in c, und die Tangenten der Curve in c s auf einander senkrecht. 2) Es sei A ein gegebener Kegels und c ein gegebener Punkt in derselben Ebene. Auf die c ausgehenden Transversalen projicire man ihre respectiven in Bezug auf A. Der Ort für diese Projectionen ist eine dritter Ordnung mit Doppelpunkt und senkrechten Tangenten

Glr. (Wn.)

M. Greiner. Curven dritter Ordnung mit Rück punkt. Hoppe Arch. LXVIII. 1-13.

Zunächst wird die Gleichung einer Curve dritter Or

ückkehrpunkt in der Form gewonnen:

$$F \equiv A^2C - mB^3 = 0,$$

l, B, C lineare Functionen von x, y, und m eine Constante. 0 gehört der Rückkehrtangente, $C = 0$ der Wendetangente, 0 der Geraden an, die den Rückkehrpunkt mit dem Wende- t verbindet. Ein Curvenpunkt p wird dann durch einen meter λ definirt, wobei $A:B:C = 1:\lambda:m\lambda^3$. Hierauf wird gerade und die conische Polare eines Punktes (x_0, y_0), dann Tangente in λ mit dem Tangentialpunkt besprochen. Es folgt Beziehung $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ unter den Parametern dreier auf Geraden liegenden Curvenpunkte; die Begleiterin einer en Geraden u. s. w. Liegen sechs Curvenpunkte auf einem elschnitte, so verschwindet die Summe ihrer Parameter, und Tangentialpunkte liegen gleichfalls auf einem Kegelschnitt. In cher und übersichtlicher Darstellung werden noch mannig- e Sätze gegeben. Am Schlusse der Arbeit werden noch die malen der Curve besprochen. Durch einen beliebigen Punkt n im Allgemeinen sechs Normalen, durch den Rückkehrpunkt n vier Normalen der Curve. Mz.

DORLET. Solution d'une question de mathématiques péciales. Nouv. Ann. (3) I. 256-265.

Auf einer gegebenen ebenen Curve dritten Grades mit dem kkehrpunkt O betrachtet der Herr Verfasser eine Reihe von kten

$$\ldots A_{-n}, A_{-(n-1)}, \ldots A_{-2}, A_{-1}, A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots,$$

lass die Tangente der Curve in jedem derselben die Curve larauf folgenden Punkte trifft, und löst die Aufgaben: 1) Wenn Coordinaten des Punktes A_0 gegeben sind, so sollen die rdinaten der Punkte A_n, A_{-n} gefunden und die Grenzlagen an- eben werden, gegen welche sich diese Punkte hinneigen, rend der Index n in's Unendliche wächst. 2) Es soll die e gefunden werden, welche die Grenzlage von A_{-n} durch- , während die ursprüngliche Curve sich so verändert, dass Rückkehrpunkt mit der Tangente in ihm und drei bestimmte

Curvenpunkte P, Q, R erhalten bleiben. 3) Es soll unters[...] werden, wie sich die Durchschnittspunkte, welche die unte[...] gesuchte Ortscurve mit den Seiten des Dreiecks PQR hat, [...] ändern, wenn die Ecken dieses Dreiecks auf Geraden, die d[...] den Punkt O gehen, beweglich angenommen werden.

Mz.

M. Greiner. Ueber den Ort der Berührungspunkte [...] Tangenten von einem Punkte an die Kegelschn[...] einer Schaar oder eines Büschels. Hoppe Arch. L. 30-44.

Nach der Methode der analytischen Geometrie, wobei [...] Fundamentaldreieck angenommen wird, dessen Seiten die [...]chungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ haben, wird bewiesen, dass [...] geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten, die [...] einem gegebenen Punkte p an die Kegelschnitte einer Sc[...] gezogen werden können, eine Curve U von der dritten Ord[...] ist, welche die sechs Schnittpunkte der vier gemeinschaftli[...] Tangenten der Kegelschnittschaar enthält und den Punkt p [...] Doppelpunkt hat. Hierauf wird die Wendepunktslinie cons[...] und noch weiteres über die Curve U angegeben. Nachher [...] bewiesen, dass der geometrische Ort der Berührungspunkte [...] Tangenten, die von einem gegebenen Punkte p an die K[...]schnitte eines Büschels gelegt werden können, eine Curve U [...] der dritten Ordnung ist, welche die vier Grundpunkte des K[...]schnittbüschels und den Punkt p enthält. Auch diese a[...] Curve U wird näher betrachtet; sie enthält ausser den fün[...]nannten Punkten noch die Centra von Geradenpaaren des K[...]schnittbüschels und den Punkt p', der zu p harmonisch in [...] auf das Büschel zugeordnet ist. Die nun angegebenen [...] Punkte bestimmen aber die Curve U noch nicht; man muss [...] eine Angabe hinzunehmen, z. B. dass p' der Tangential[...] von p ist, d. h. dass pp' Tangente von U in p ist.

Mz.

ARIN. Sur la droite de Simson. Math. II. 106-109, 122-127.

ätze über Curven dritter Ordnung. Mn. (Wn.).

. C. SHARP, W. J. C. MILLER. Solutions of a question 287). Ed. Times XXXVI. 35-38.

st von einem Dreieck eine Seite c der Grösse und Lage eine zweite Seite b der Grösse nach gegeben, so ist der ür den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises die Curve

$$(b+c-x)y^2 = x(x-b)(x-c),$$

i c längs der x-Axe liegt, während der Anfangspunkt der linaten der Schnittpunkt der Seiten b und c ist. Aehnliche hungen gelten für die Orte der Mittelpunkte der äusseren ırungskreise. Wenn der Flächeninhalt des einbeschriebenen es ein Maximum ist, so ist sein Radius das Doppelte des ındes der dritten Dreiecksseite vom Mittelpunkt des umebenen Kreises. Wn.

IcINTOSH. Solution of a question (6745). Ed. Times XXVI. 38-39.

Construirt man in einer Curve dritter Ordnung mit Doppel-, deren Doppelpunktstangenten auf einander senkrecht stehen, winklige Dreiecke, so dass der Scheitel des rechten Winkels mal im Doppelpunkte liegt, so gehen alle Hypotenusen durch festen Punkt der Curve. Für das Folium des Cartesius ist este Punkt der Scheitel des Blattes. Wn.

---

ere Aufgaben und Sätze über Curven dritter Ordıng von R. A. ROBERTS, G. F. WALKER, MATZ, . J. C. SHARP, J. L. MCKENZIE, A. MCINTOSH, WOODCOCK finden sich Ed. Times XXXVI. 43, 84, 88-89; XXVII. 54-55. Wn.

A. H. CURTIS. Geometrical proof that the caust reflexion of a cardioid produced by rays proce from its cusp is an epicycloid. Mess. (2) XII. 33-34

Einfacher geometrischer Beweis des im Titel bezeic Satzes. Glr. (Wn

---

J. PLEYL. Zur Cardioide. Hoppe Arch. LXVIII. 166-18

Der Herr Verfasser giebt zuerst die Cardioide als ge schen Ort von Punkten, die nach einem bestimmten Gese den Punkten eines Kreises abgeleitet werden; hierauf gewi ihre Gleichung und ermittelt aus analytischen Betrachtunge Gestalt. Ist a Radius des Kreises, so hat jede durch den kehrpunkt der Cardioide gehende Gerade mit dieser Curv zwei fernere Punkte P und S gemein, deren Abstand $4a$ b die Tangenten der Cardioide in P und S sind zu einander recht und mögen sich in Q treffen; die Normalen der Ca in denselben Punkten sollen sich in R schneiden; dann ist ein Rechteck. Auf die Veränderlichkeit dieses Rechtecks, rend P und S die Cardioide durchlaufen, gründet der Her fasser eine mechanische Construction dieser Curve.

M

P. A. MACMAHON. The cassinian. Mess. (2) XII. 118-1

Im Messenger für 1877 (cf. F. d. M. IX. 1877. 504) hat Hart die Rectification der Cassinischen Curve für den Fa handelt, dass dieselbe aus zwei Ovalen besteht. In der liegenden Arbeit wird diese Methode auf den Fall ausge dass die Cassinoide eine geschlossene Curve bildet.

Glr. (Wn.)

TOWNSEND, J. J. WALKER. Solutions of a que (6891). Ed. Times XXXVII. 72-73.

nd A, B, C die Foci eines Cartesischen Ovals, O der drei-
Focus, N die Länge des von einem Punkte G auf die Axe
en Lotes, so ist

$$N^2 = \frac{AG.BG.CG}{OG}.$$

Wn.

Zeuthen. Om mekanisk Konstruktion af Descartes' aler ved Hjälp af Snore. Zeuthen T. (4) VI. 145-154.

ür die sogenannten Descartes'schen Ovale gilt bekanntlich elation $df_1 + ef_2 = b$, wo d, e, f Constanten, f_1 und f_2 die nungen eines Punktes der Curve von zwei Brennpunkten hnen. Zufolge dieser Eigenschaft können solche Curven Fäden auf ähnliche Weise wie eine Ellipse construirt n, falls d und e commensurabel sind. Es giebt aber andere Fälle, wo dieses gemacht werden kann, und Des- hat schon ein solches Beispiel genannt. Wie Chasles gt hat, haben diese Curven nämlich einen dritten Brenn-, dessen Existenz sich durch elementar analytische Be-ung sofort ergiebt. Der Verfasser zeigt, dass die drei hungen

$$\begin{aligned} rf_2 - qf_3 &= p(a_2 - a_3), \\ pf_3 - rf_1 &= q(a_3 - a_1), \\ qf_1 - pf_2 &= r(a_1 - a_2), \end{aligned}$$

, q, r Constanten, a_1, a_2, a_3 die Abscissen der Brennpunkte be-n, das nämliche Oval darstellen werden. Aus diesen folgt eue Relation

$$lf_1 + mf_2 + nf_3 = c,$$

n zugleich $lp + mq + nr = 0$. Aus dieser wird ersichtlich, durch gleichzeitige Benutzung aller drei Brennpunkte eine truction durch Fäden möglich wird, sobald unter p, q, r homogene Gleichung der Geraden mit ganzen Coefficienten ht. Der Verfasser knüpft hieran die Bemerkungen, dass die hnte Construction sofort die Bestimmung der Tangenten t, und dass die mechanische Construction immer möglich

ist, sogar durch zwei Brennpunkte, wenn man den einen aus-
halb der Ebene der Curve wählt. Gm.

WOLSTENHOLME. Complete determination of the r
foci and of the vector equation of the pedal of
given ellipse with respect to any proposed point.
Lond., M. S. Proc. XIII. 70-76.

Der Inhalt der Arbeit ist im Titel bereits angegeben; es
nur in der Kürze der Gang derselben skizzirt. Die Fusspun
curve der Ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ in Bezug auf den Pol
dessen Coordinaten X, Y sind, hat die Gleichung

$$(x^2+y^2-xX-yY)^2 = a^2(x-X)^2+b^2(y-Y)^2.$$

Verlegt man den Coordinatenanfang nach O, so wird dieselb

$$(x^2+y^2+xX+yY)^2 = a^2x^2+b^2y^2.$$

O ist ein Doppelbrennpunkt dieser Curve; um die einfachen F
zu finden, bestimmt der Herr Verfasser die Constante p so, d
die Gerade $x+iy=p$ die Curve berührt. Man hat für $\frac{y}{x}$
Gleichung

$$(p(x-iy)+xX+yY)^2 = a^2x^2+b^2y^2,$$

und diese muss gleiche Wurzeln haben; daraus ergiebt sich
Bedingungsgleichung, welche durch Trennung des Reellen
Imaginären in zwei Gleichungen zerfällt. Wenn dann wi
der Ellipsenmittelpunkt Coordinatenanfang ist, so hat man
die Coordinaten (xy) der gesuchten Foci die Gleichungen:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(x-X)^2}{b^2}-\frac{(y-Y)^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{x(y-Y)}{a^2} = \frac{y(x-X)}{b^2},$$

wodurch zwei reelle Brennpunkte F_1, F_2 und zwei imaginäre
stimmt werden. Sucht man λ aus der Gleichung

$$\frac{X^2}{a^2-\lambda}+\frac{Y^2}{b^2-\lambda} = 1$$

ierauf k aus der Gleichung

$$k^2(a^2+b^2-\lambda)-2ka^2b^2+\lambda a^2b^2 = 0,$$

mmt

$$x = \frac{X}{1-\frac{k}{a^2}}, \quad y = \frac{Y}{1-\frac{k}{b^2}}.$$

erden nun die Brennpunkte geometrisch bestimmt. Hierauf der Herr Verfasser zur Vectorgleichung der Fusspunkt- über. Die Abstände eines Curvenpunktes von O, F_1, F_2 en resp. mit r, r_1, r_2 bezeichnet, und schliesslich erhält man Gleichung $lr_1+mr_2 = r$, wo l und m Constanten.

Mz.

STENHOLME. Determination of the foci of the pedal a given parabola with respect to any proposed int, and investigation of different forms of the ctor equation of the pedal. Lond., M. S. Proc. XIII. 77-79.

Es wird hier das Entsprechende für die Parabel, was in der gehenden Arbeit für die Ellipse geleistet wurde, gemacht. Fusspunktcurve (Pedale) einer Parabel $y^2 = 4ax$ in Bezug inen Pol O mit den Coordinaten X, Y hat die Gleichung

$$a(y-Y)^2+(x-X)(x^2+y^2-xX-yY) = 0.$$

ird nun wieder p so bestimmt, dass die Gerade $x+iy = p$ 'edale berührt; dies führt auf folgende zwei Gleichungen hen den Coordinaten (x, y) der gesuchten Brennpunkte:

$$(x-X)^2 = y^2-4ax; \quad (x-X)y+2a(y-Y) = 0.$$

nmt man b aus der Gleichung

$$Y^2 = 4b(X+b-a),$$

iierauf k aus der Gleichung

$$b = a(1+k)^2,$$

$$x = X+2ak, \quad y = \frac{Y}{1+k}.$$

Es folgt nun die geometrische Construction der Brennpunkte; dann wird die Vectorgleichung (wie in der vorigen Arbeit) hergeleitet. Mz.

H. Hart. On the linear vectorial equation of the central pedal of a conic. Mess. (2) XII. 33.

Einfache Methode zur Ableitung der Gleichung der Fusspunktcurve in der oben genannten Form.

Glr. (Wn.).

H. M. Jeffery. On certain quartic curves having a tacnode at infinity at which the line at infinity is the multiple tangent. Lond., M. S. Proc. XIII. 86-96.

Die hier betrachteten Curven vierter Ordnung sind in der Gleichung enthalten:

$$k\alpha^4 = u_2$$

und zerfallen in drei Arten, je nachdem der Satellitkegelschnitt ($u_2 = 0$), welcher stets die Curve vierter Ordnung an zwei Stellen dreifach berührt, eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist. Weitere Abarten treten auf, wenn die vierfache Asymptote ($\alpha = 0$) durch das Centrum dieses Kegelschnitts geht oder einer seiner Asymptoten parallel ist. Da nun ein Berührungsknotenpunkt im Unendlichen, nämlich der unendlich entfernte Punkt der vierfachen Asymptote ($\alpha = 0$) vorhanden ist, in welchem die unendlich entfernte Gerade mehrfache Tangente ist, so ist die Klasse der Curve vierten Grades höchstens die achte, kann aber auch die sechste, fünfte und vierte werden. Es wird nun eine genaue Discussion der fraglichen Curven vorgenommen, die Tangentialgleichung derselben aufgesucht und auch die Beziehungen unter den Constanten aufgestellt, welche statthaben, wenn zu den genannten Singularitäten noch weitere hinzutreten.

Mz.

MAHLER. Ueber eine Curve vierter Ordnung.
oppe Arch. LXVIII. 440-442.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen geht der Herr Ver-
r zur Betrachtung derjenigen Curve über, die durch Elimi-
n von u aus den Gleichungen

$$x^2+y^2-u^2 = 0, \quad y-ux = 0$$

orgeht; diese Curve ist vierter Ordnung und hat die Glei-
g

$$x^4+y^2x^2-y^2 = 0.$$

rird dann ihre sehr einfache Construction gegeben; ferner
gt, dass sie symmetrisch gegen die Coordinatenaxen läuft
zwei der Y-Axe parallele Asymptoten hat, nämlich die Tan-
en des Kreises

$$x^2+y^2 = 1$$

einen Durchschnitten mit der X-Axe. Der Coordinatenan-
ist Rückkehrpunkt und Wendepunkt zugleich. Die von
n der vier Curvenzweige, der x-Axe und anliegenden Asym-
eingeschlossene Fläche ist gegeben durch

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Krümmungsradius der Curve im Coordinatenanfang ist von
Grösse $\frac{1}{2}$.

Mz.

MMER. Geometrischer Ort der Punkte, von welchen
s zwei feste Strecken unter gleichen Winkeln er-
heinen. Hoppe Arch. LXVIII. 18-37.

Die beiden Strecken sollen in einer Ebene liegen. Dann
er fragliche Ort im Allgemeinen eine Curve vierter Ord-
bestehend aus der unendlich fernen Geraden und einer Curve
r Ordnung, was evident, wenn man beachtet, dass die ge-
e Curve durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel er-

zeugt wird, welche die Kreispunkte und bez. die Endpunkte der beiden Strecken zu Basispunkten haben.

Der Verfasser behandelt, analytisch, nun die Fälle, in denen die C_3 in einen Kegelschnitt und eine Gerade zerfallen ist, und gelangt, neben evidenten, zu folgenden Ergebnissen: 1) Sind die Strecken parallel, so müssen sie gleiche Länge haben, und der Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, welche durch die Endpunkte der Strecken geht. 2) Die Strecken sind ungleich, aber so gelegen, dass die Verbindungslinien ihrer Endpunkte auf einander senkrecht stehen und die eine derselben von der andern halbirt wird. Dann erhält man als Ort die Verbindungslinie derjenigen Endpunkte, welche die andere halbirt, und den Kreis durch die beiden andern Endpunkte und den Schnittpunkt der Strecken selbst. Rg.

Rusch. Ein Beitrag zur Trisection. Hoppe Arch. LXVIII 444-448.

Der Herr Verfasser erwähnt zuerst die Dreiteilung des Winkels auf mechanischem Wege; hierauf erklärt er die von Nikomedes zum Zweck der Trisection erfundene Conchoide und giebt dann eine andere Curve an, durch welche die Trisection gleichfalls vollzogen werden kann. Dies wird dann durch die Methode der analytischen Geometrie verificirt.

Mz.

W. Hillhouse. On a new curve for the trisection of an angle. Analyst IX. 181-184.

Der Verfasser teilt eine Methode mit zur mechanischen Beschreibung der Curve

$$x^2 = \frac{(2a^2-y^2)^2}{4a^2-y^2}$$

und wendet diese Curve zur Trisection eines Winkels an.

Jn. (Wn.).

V. Jensen. Elementär analytisk Fremstilling af Kurver beskrevne ved en bevägelig Trestangsforbindelse. Zeuthen T. (4) VI. 154-163.

In dem Viereck $ABCD$ sind die Punkte A und D fest. Die ten $AB = CD = a$ können sich bezw. um A und D drehen, wird der Ort des Mittelpunktes M der dritten Seite BC, dessen ige $2b$ ist, gesucht. Legt man das Coordinatensystem so, dass Punkte A und D die Coordinaten $(-c, 0)$ und $(c, 0)$ erhalten, ergiebt sich die Gleichung der Curve in rechtwinkligen Coorn aten u. A. in der Form

$$y^2(x^2+y^2+b^2+c^2-a^2)^2+x^2(x^2+y^2+b^2-c^2-a^2)^2 = 4b^2c^2y^2.$$

diese Gleichung knüpft der Verfasser eine elementare Unterhung der Form und Lage der Curve, ihrer Tangenten und gularitäten und erläutert dieselbe durch Beispiele und zahlhe Figuren. Gm.

Hart. On the evolute of the symmetrical bicircular quartics. Quart. J. XVIII. 382-384.

Die hier behandelte Curve vierter Ordnung entsteht, wenn n vom Mittelpunkt O eines Kegelschnittes Normalen OT auf Tangenten desselben fällt und auf jeder Normalen zwei chweit vom Fusspunkte T entfernte Punkte P, P' so annimmt, s $OP \cdot OP' = \text{const.}$ Aus der leicht zu ermittelnden Polarchung der Curve wird dann die Enveloppe ihrer Normalen unden. V.

Cayley. Solution of a question (6766). Ed. Times XXXVI. 64. Wn.

wnsend. On the atriphthaloid and atriphthalid of Dr. Haughton. Ed. Times XXXVII. 102-108.

Eingehende Discussion der Curve, deren Gleichung in Polar-

Coordinaten

$$r^2(r-h)+k^3\sec^2\omega = 0$$

ist, wo h und k positive Constanten bezeichnen. Diese, A thalide genannte, Curve ist die einfachste Form der Mer curve derjenigen Fläche, welche die Oberfläche des Meer ihren regelmässigen oscillatorischen Bewegungen um den G gewichtszustand annehmen kann (ohne Berücksichtigun Reibung). Auch das Volumen des durch Rotation obiger entstehenden Körpers wird berechnet. W

R. Tucker. The radial of an ellipse. Quart. J. XVIII.

Wenn von einem Punkte gerade Linien ausgehen, gleich und parallel zu den Krümmungsradien einer geg Curve sind, so heisst der Ort der Endpunkte dieser g Linien: Radiale der gegebenen Curve. Hier wird nur Ellipse $\alpha^2y^2+\beta^2x^2 = \alpha^2\beta^2$ betrachtet und ihre Radiale zug auf den Mittelpunkt gesucht; die Polargleichung Radiale ist

$$r^2(\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi)^3 = \alpha^4\beta^4.$$

Mit Benutzung des Princips, dass die Radiale immer di bleiben muss, auf was für rechtwinklige Axen die geg Curve auch bezogen wird, erhält der Verfasser das Entspre für die allgemeine Gleichung der Ellipse

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c = 0,$$

wobei auch die andern Kegelschnitte mit einbegriffen sein k

M

Moret-Blanc. Solution d'une question. Nouv. Ann 114-117.

Die allgemeine Gleichung der Tangenten an die $27y^2 = 4x^3$ ist $y = mx-m^3$. An den Nachweis hierfür k sich Bestimmungen über geometrische Oerter. So wird nac Ort der Punkte gefragt, von denen man zwei Tangenten

urve ziehen kann, welche zwei conjugirten Durchmessern eines egelschnitts parallel sind. Es ergiebt sich eine Parabel. O.

E. W. Symons, C. H. Swift. Solutions of a question (6431). Ed. Times XXXVI. 75-76.

Der Ort eines Punktes von der Beschaffenheit, dass die von m an eine gegebene Ellipse gezogenen Normalen ein harmonisches Büschel bilden, ist die Curve

$$(a^2x^2+b^2y^2-c^4)^3+54a^2b^2c^4x^2y^2 = 0; \quad (c^2 = a^2-b^2).$$

Wn.

. W. Symons, G. F. Walker. Solution of a question (6395). Ed. Times XXXXI. 77-78.

Sind von einem Punkte der Evolute einer Ellipse die drei ormalen an die Ellipse gezogen, so ist der Ort für den Mittelunkt des durch die Fusspunkte gehenden Kreises

$$4(a^2x^2+b^2y^2)^3 = a^2b^2(a^2-b^2)^2x^2y^2.$$

ine der gemeinsamen Sehnen des Kreises und der Ellipse geht rner durch den Mittelpunkt der Ellipse. Wn.

Veitere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über geometrische Oerter von E. Anthony, C. Morgan, J. Young, E. W. Symons, H. Hayash, E. Rutter, G. F. Walker, J. H. Turrell, Wolstenholme, Genese, T. Woodcock, R. Knowles, W. B. Grove, Ch. Ladd, W.J.C.Miller, D.Edwardes, G.M.Reeves, Townsend, Nash, A. H. Curtis finden sich Ed. Times XXXVI. 49, 91, 92-93, 100, 109-110, 111-113, 113-114; XXXVII. 53.

Wn.

H. Résal. Sur quelques applications du théorème de Savary, relatif aux enveloppes des courbes planes. Nouv. Ann. (3) I. 7-15.

Das Theorem von Savary ist folgendes: Rollt in einer Eb eine Curve S auf einer festen S'; ist A der augenblickliche rührungspunkt, R der Krümmungsradius von S, R' derjenige S' in A, ma irgend eine in der Ebene von S gezogene Cu Am die Länge der von A auf ma gezogenen Normale, φ Winkel, den die Richtung von Am mit derjenigen von R bil ϱ der Krümmungsradius von ma im Punkte m und endlic der Krümmungsradius der Enveloppe von ma im gleichen Pu m, so besteht die Relation

$$\left(\frac{1}{\varrho'-p}+\frac{1}{\varrho+p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}.$$

Hier ist p gleich der Länge der Normale Am, und ausserde vorausgesetzt, dass die Curven S und S' ihre Convexitäten ander gegenüber setzen; im andern Falle würde beim grö der beiden R, R' in vorstehender Formel das Minuszei stehen.

Aus diesem Theorem werden nun verschiedene Aufschl über Enveloppen gewonnen. Zuerst seien S und S' zwei Kr dann handelt es sich um die Enveloppe einer Hypocycloide Epicycloide. Darauf wird die Enveloppe der Evolvente e mit S concentrischen Kreises gesucht u. a. m. Die Resultate in der Arbeit selbst nachzusehen. Mz.

C. B. S. Cavallin. Ett geometriskt medalvärde. Zeuthe (4) VI. 95-96.

Beweis der folgenden Sätze: 1) Wenn ein bewegliches V eck, welches einer geschlossenen convexen Linie umgeschrie ist, um dieselbe eine ganze Umdrehung macht, bis es in se ursprüngliche Lage zurückkehrt, indem während der ganzen wegung die Winkel constante bleiben, so wird der Mittelw des Perimeters gleich dem Perimeter eines gleichwinkligen P gons sein, welches einem Kreise mit dem nämlichen Umkr wie die gegebene Curve, umgeschrieben ist. 2) Wenn eine schlossene convexe Curve auf zwei festen Geraden rollend ganze Umdrehung macht, so ist der Mittelpunkt des zwisc

Berührungspunkten liegenden Bogens immer der nämliche alle Curven mit gleichem Umfange. Gm.

HABICH. Sur les roulettes. Math. II. 145-148.

Rollt eine ebene Curve A auf einer Geraden D, und beschreibt dabei ein mit A fest verbundener Punkt m die Curve C, beschreibt m, wenn die Fusspunktcurve von A in Bezug auf m auf der Curve C rollt, die Gerade D. Die Steiner'schen Sätze über Flächeninhalt und Bogenlänge von Rollcurven ergeben sich aus obigem Satze. Mn. (Wn.).

M. JEFFERY. On a tangential property of regular hypocycloids and epicycloids. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 105. Cly.

M. JEFFERY. On the rectifiable spherical epicycloid or involute of a small circle. Brit. Ass. Rep. 1882. Csy.

MINCHIN. Solution of a question (6892). Ed. Times XXXVII. 44-45. Wn.

V. WOOD. Solution of a problem. Analyst IX. 60.

Diejenige Curve, bei der die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die Tangente mit der Abscissenaxe bildet, der Bogenlänge proportional ist, ist die Kettenlinie. (Bekannt). Jn. (Wn.).

CÉSARO. Sur la tractrice. Math. II. 217-219.

Es wird eine gewisse Dualität zwischen der Tractrix und der logarithmischen Spirale abgeleitet. Mn. (Wn.).

E. W. Symons, Hammond. Solution of a question (6583). Ed. Times XXXVI. 54.

Die Gleichung

$$\left(\frac{1+p^2}{q}\frac{d}{dx}\right)^n \cdot \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} = 0$$

stellt diejenige Curve dar, deren $(n-1)^{te}$ Evolute ein Kreis ist.

Wn.

W. H. Besant. Solution of a question (6253). Ed. Times XXXVI. 63.

Wn.

Lösungen weiterer Aufgaben über transcendente Curven von W. J. C. Sharp, C. Morgan, D. Edwardes finden sich Ed. Times XXXVI. 67-68, 107.

Wn.

Capitel 3.

Analytische Geometrie des Raumes.

A. Allgemeine Theorie der Flächen und Raumcurven.

Th. Craig. On certain metrical properties of surfaces. Sylv., Am. J. IV. 297-320.

Fläche in einem Raume von $n+1$ Dimensionen wird die durch eine Gleichung zwischen $n+1$ Coordinaten x beschränkte Mannigfaltigkeit genannt. Die x sind als orthogonal aufgefasst; sie werden zur Bestimmung der Fläche als Functionen von n Parametern u ausgedrückt, dann die Grundformeln entwickelt, das Linienelement und das Flächenelement in den Parametern dargestellt. Mit der Fläche S wird eine andere Fläche Σ in Verbindung gebracht, deren Coordinaten y gegebene Functionen

... x sind. Der Quotient der zwei Flächenelemente für gleiche ...nzen der Parameter wird durch eine Determinante dar...stellt, deren Elemente die partiellen Differentialquotienten der ... nach den x und die Richtungscosinus der Normalen beider ...chen sind, ein Resultat, welches für drei Dimensionen ohne ...eweis von Neumann aufgestellt sein soll. Substituirt man den ... die Richtungscosinus der Normale von S, so geht Σ in ...e sogenannte Einheitskugel, $d\Sigma : dS$ in das Krümmungsmass ...n S über. Letzteres wird in der Form ausgedrückt $V' : V^{n+2}$ ... einfachster Analogie mit dem Gauss'schen Ausdruck für ... $= 2$. Hier ist V bestimmt durch $dS = V du_1\, du_2 \ldots du_n$, ...sserdem wird V^2 durch die Determinante n^{ten} Grades von den ... Coefficienten der Producte der du in der Entwickelung des ...uadrats des Linienelements, d. i. von den n^2 Fundamental...rössen erster Ordnung ausgedrückt. Setzt man für letztere die ...undamentalgrössen zweiter Ordnung im Gauss'schen Sinne, so ...eht V in V' über. Die Gleichung, deren Wurzeln die Haupt...rümmungsradien ϱ sind, ist die Determinante von $E'_{ik}\varrho - E_{ik} V$ ...leich Null gesetzt, wo E_{ik}, E'_{ik} die Fundamentalgrössen erster ...nd zweiter Ordnung bezeichnen. Hieraus folgt leicht das Pro...duct der Hauptkrümmungen als Krümmungsmass und die Summe ...der Radien, die Null gesetzt, die Minimalfläche bedingt. Es ...erden noch einige Relationen an drei Dimensionen entwickelt ...d auf n Dimensionen angewandt, die indes nicht einfach ge...g zur Wiedergabe sind. Dann wendet sich der Verfasser zu ...n Curven und bestimmt das osculirende „k-flat“ (lineares Ge...de von k Dimensionen), welches sich leicht durch Elimination ...r Coefficienten zwischen den linearen Gleichungen ergiebt, ...lche den Durchgang des k-flats durch consecutive Curvenpunkte ...dingen. H.

...I. Craig. Note on areas of corresponding surfaces. J. Hopkins Circ. 1882. 209-210.

Das Verhältnis zweier correspondirender Flächenelemente ...ird mittels einfacher Determinantenumformung als vierreihige

Determinante dargestellt. Wie der Herr Verfasser nachträglich bemerkt hat, findet sich die bez. Formel bereits, wenn auch ohne Beweis, bei C. Neumann, Clebsch Ann. XI. p. 306.

My.

A. Picart. Note sur les paraboloïdes du second ordre osculateurs aux surfaces. Nouv. Ann. (3) I. 163-171.

Ist $Z = f(X, Y)$ die Gleichung einer Fläche, x, y, z ein Punkt derselben, und setzt man $X = x + (X - x)$; $Y = y + (Y - y)$ ein, so folgt, die Entwickelbarkeit nach Taylor vorausgesetzt, bekanntlich:

$$Z - z = p(X-x) + q(Y-y) + \frac{1}{2}[r(X-x)^2 + 2s(X-x)(Y-y) + t(Y-y)^2] + \dots$$

Bricht man die Entwickelung nach den hingeschriebenen Gliedern ab, so hat man die Gleichung eines die Fläche im Punkte x, y, z osculirenden Paraboloides. Es werden zunächst mehrere Beziehungen zwischen diesem Paraboloide und der Fläche besprochen, und dann wird die Enveloppe einer Schaar solcher Paraboloide untersucht, deren Osculationspunkte auf einer gegebenen Curve der Fläche liegen, besonders unter der Annahme, dass diese Curve eine asymptotische Linie der Fläche ist. Da die Axen der betrachteten Paraboloide der Z-Axe parallel sind, dieselben also von der zufälligen Wahl des Coordinatensystems abhängen, so vermag der Referent diesen Paraboloiden und den sich daran anschliessenden Untersuchungen eine besondere Bedeutung für die Geometrie nicht beizulegen.

A.

C. Seidelin. Om Konstruktion af Tangenter til Róringskurven mellem en Omdrejningsflade og en omskreven Kegle eller Cylinder. Zeuthen T. (4) VI. 33-35.

Neue Construction der Tangente der Berührungscurve einer Umdrehungsfläche mit einem umgeschriebenen Kegel oder Cylinder mit Hülfe der osculirenden Kegelschnittsfläche.

Gm.

P. Mansion. Principe fondamental relatif au contact de deux surfaces qui ont une génératrice commune. Belg., Bull. (3) III. 753-760.

E. Catalan. Rapport. Belg., Bull. (3) III. 716-717.

Zwei Flächen, die durch eine beliebig gegebene Curve erzeugt werden und deren Gleichungen $(n+1)$ Parameter enthalten, haben eine Berührung k^{ter} Ordnung in allen Punkten einer gemeinsamen erzeugenden Curve, wenn sie diese Eigenschaft in Punkten jener gemeinsamen Erzeugenden haben.

Mn. (Wn.).

S. Lie. Ueber Flächen, die infinitesimale und lineare Transformationen gestatten. Lie Arch. VII. 179-193.

Eine continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen $x_1, \dots, x_n$ mit r Parametern enthält (Gött. Nachr. 1874. siehe F. d. M. VI. 1874. 93) r infinitesimale Transformationen

$$A_k f = X_{k1} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_{kn} \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

welche paarweise in der Beziehung $(A_i A_k) = \Sigma c_{iks} A_s$ stehen. Soll nun eine Function $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (oder eine Gleichung $\varphi = 0$) diese Gruppe gestatten, so ist das gleichzeitige Bestehen der Relationen

$$A_1 \varphi = 0, \dots, A_r \varphi = 0$$

erforderlich und hinreichend (Clebsch Ann. XI. p. 535. s. F. d. M. IX. 1877. 261), so dass φ eine arbiträre Function von r unabhängigen Lösungen unseres vollständigen Systems bezeichnet, wobei vorausgesetzt, dass man von singulären Lösungen absieht. Wünscht man andererseits alle Functionen φ, die eine in der Gruppe enthaltene Untergruppe gestatten, so bestimmt man zunächst durch algebraische Operationen (Lie Arch. I. s. F. d. M. VIII. 1876. 212) alle in der Gruppe enthaltenen Untergruppen und verfährt sodann nach den soeben angegebenen Regeln. Diese schon früher vom Verfasser entwickelte Theorie wird in der vorliegenden Note für einen speciellen Fall im Detail durch-

geführt, nämlich für drei Variable x, y, z und für die allgemeine projectivische Gruppe. Es handelt sich also um die allgemeine Bestimmung aller Flächen, die eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe gestatten. Zusammen mit Klein behandelte der Verfasser schon 1870 dieses Problem unter der speciellen Voraussetzung, dass die Transformationen der Untergruppe permutabel sind. Neuerdings beschäftigte sich Poincaré beiläufig mit demselben Problem, in dem er jedoch einige Beschränkungen einführte. Die vorliegende Note bezweckt eine erschöpfende Erledigung der Aufgabe. Unter den erhaltenen Resultaten mögen die folgenden hervorgehoben werden. Gestattet eine Fläche mehr als zwei infinitesimale und lineare Transformationen, so ist sie entweder ein Kegel oder eine Developpable einer Curve dritter Ordnung, oder eine Fläche zweiten Grades. Nimmt eine Figur (Fläche oder Curve) durch Ausführung aller Bewegungen und Aehnlichkeitstransformationen ∞^4 Lagen an, so ist sie eine Kugel oder Gerade. Daher hat die Plücker'sche Liniengeometrie und die vom Verfasser begründete Kugelgeometrie eine ausgezeichnete Stellung unter allen möglichen geometrischen Interpretationen einer vierfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit. L.

S. Lie. Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Translationsbewegung einer Curve erzeugt werden. Lie Arch. VII. 155-176.

Der Verfasser beschäftigte sich schon in mehreren früheren Abhandlungen gelegentlich (Christiania Forh. 1872. Lie Arch. IV., siehe F. d. M. XI. 1879. 528; Clebsch Ann. XIV. s. F. d. M. XI. 1879. 587) mit Flächen, die durch Translationsbewegung einer Raumcurve c erzeugt werden, welche somit durch Gleichungen der Form

$$x = f_1(c) + \varphi_1(k), \quad y = f_2(c) + \varphi_2(k), \quad z = f_3(c) + \varphi_3(k)$$

darstellbar sind. Eine erste evidente Eigenschaft dieser Flächen, denen Voss (Klein Ann. XIX. 1-27, s. F. d. M. XIII. 1881. 56…) den Namen Translationsflächen beigelegt hat, ist, dass sie ausser der schon besprochenen Erzeugung immer eine zweite derartige

;ung durch Translation einer Curve (k) gestatten. Die vor-
le Note erledigt die schwierige Frage nach allen Flächen, mehr als zwei Weisen durch Translation einer Curve er- verden können. Dieses Problem ist deswegen bemerkens- veil es einen überraschenden Zusammenhang mit der all- en Theorie der algebraischen ebenen Curven (Kegel) vierter g darbietet. Gestattet nämlich eine Fläche nicht allein tionserzeugungen durch zwei Curven c_1 und k_1, sondern derartige Erzeugungen durch zwei weitere Curven k_2, so befriedigen die Tangenten dieser vier Raumcurven eine gemeinsame algebraische Relation vierten Grades

$$F_4\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

abei kann F_4 eine beliebige irreductible oder reductible Function vierter Ordnung von zwei Argumenten bezeichnen. man die in F_4 eingehenden arbiträren Constanten in be- er Weise, und zwar so, dass $F_4 = 0$ entweder eine irre- e Relation darstellt oder in eine Gleichung dritten Grades ne ersten Grades zerfällt, so giebt es immer eine ganz be- transcendente Fläche, die unserer Wahl entspricht. Zer- $= 0$ in zwei irreductible Gleichungen zweiten Grades, so s zwei zugehörige Flächen; die eine entspricht der An- dass c_1 und c_2 die eine Gleichung, k_1 und k_2 die zweite ; die zweite Fläche entspricht der Annahme, dass c_1 und k_1 , c_2 und k_2 die zweite Gleichung erfüllen. Dieser letzte ll liefert die von Scherk (Crelle XIII. 185) entdeckte Mini- ne mit ∞^1 Translationserzeugungen zusammen mit ihren vischen Verallgemeinerungen und Ausartungen. L.

:. Sur une propriété des surfaces gauches.
II. 82-85.

alytischer Beweis des Satzes von Hachette.

Mn. (Wn.).

O. Böklen. Ueber die Krümmung der Flächen
Schlömilch Z. XXVII. 369-374.

Es wird zuerst ein confocales System dreier Flächen zw Grades nebst einem Kegel, dessen Axen die Normalen der Flächen im Scheitelpunkte sind, und eine den Kegel berühr weitere confocale Fläche betrachtet, die Kegelwinkel in s Axenebenen, die Winkel zwischen den Focallinien und dens im besondern Falle, die Hauptkrümmungsradien der drei Flä und die Abstände des Mittelpunktes von den drei Berühr ebenen im Durchschnitt analytisch ausgedrückt. Mit Anwen auf eine Fläche zweiten Grades A, welche eine beliebige Fläc berührt, ergeben sich folgende Sätze. Die Focallinien aller chen A, welche F in einem Punkte S berühren, liegen auf Ke deren gemeinsame Axe die Normale von F ist. Berühren ausserdem die Krümmungslinien von A und F, so liegen Focallinien von A auf coaxialen Kegeln. Sämmtliche Flä zweiten Grades A, welche mit einer beliebigen Fläche F in ei Punkte S eine Berührung zweiter Ordnung haben, sofern Verhältnisse der Hauptkrümmungsradien von A und F g sind, sind dadurch charakterisirt, dass ihre Focallinien auf ei System von confocalen Kegeln liegen. Gehen die Ebenen Focallinien der Flächen zweiten Grades, welche mit einer Flä in einem Punkte eine Berührung zweiter Ordnung haben, d einen Punkt der Normale, so liegen sie zugleich auf einem Ke und umgekehrt. Durch jeden Punkt einer beliebigen Flä gehen zwei Gerade, auf welchen die Brennpunkte aller Rotati flächen liegen, die mit der Fläche eine Berührung zweiter (nung haben; diese Rotationsflächen sind durch Drehung ei Kegelschnittes um die Axe der Brennpunkte entstanden. I Axen gehen durch den Mittelpunkt des kleinen Hauptkrümmu kreises der Fläche. Berührt ein Ellipsoid eine Fläche in zwe Ordnung, so schneidet die Ebene der Focalellipse die Norm zwischen dem Berührungspunkte und dem Mittelpunkte des k neren Hauptkrümmungskreises, die Ebene der Focalhype schneidet zwischen beiden Mittelpunkten und diejenige der i

nären Ellipse jenseits vom Mittelpunkte des grösseren Haupt-rümmungskreises. Die Focalellipsen liegen auf Kegeln, welche ie Focallinien des Berührungspunktes einschliessen, die Focal-yperbeln auf Kegeln, welche sie trennen. H.

E SALVERT. Mémoire sur les ombilics coniques. Brux. S. sc. VII. 143-248.

. JORDAN. Rapport sur ce mémoire. Brux., S. sc. VII. A. 49-50.

Die vorliegende Arbeit, welche die Fortsetzung einer früher esprochenen Arbeit desselben Verfassers bildet (cf. F. d. M. III. 1881. 567-572), behandelt die Krümmung in singulären unkten von krummen Flächen. Die in der früheren Arbeit be-ährte Methode, die darin besteht, stets die drei Variabeln x, y, z leichmässig zu behandeln, ist hier absolut notwendig; denn es t unmöglich, die gestellte Frage mittels der gewöhnlich benutz-en Derivirten $p, q, r, s, t \dots$ zu lösen, da diese Grössen für singu-äre Punkte sämmtlich unbestimmt werden.

Der Verfasser untersucht die Krümmungen der verschiedenen benen Schnitte, welche man durch einen singulären Punkt einer läche legen kann. Er nennt diese Punkte Nabelpunkte (om-lics) in weiterem Sinne, eine Bezeichnung, die völlig gerechtfer-gt ist wegen der vollkommenen Analogie der Krümmungsver-ltnisse dieser Punkte mit denen der Nabelpunkte in gewöhn-hem Sinne. Eine analoge Rolle, wie die Flächennormale bei r Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der nicht singulä-ı Punkte, spielt in der vorliegenden Frage eine andere Linie, Axe des in dem singulären Punkte an die Fläche gelegten ngentenkegels. Dasselbe Verfahren, das in der früheren Arbeit Krümmung eines Normalschnitts ergiebt, führt hier auf die ümmung eines durch die Kegelaxe gelegten ebenen Schnitts. n den Ausdruck für diese Krümmung zu bilden, muss man, die Zahl der vorkommenden Terme eine sehr grosse ist, eine gekürzte Bezeichnung gebrauchen, die der Verfasser bereits seiner früheren Arbeit benutzt hat; dieselbe besteht darin, dass

überall im Zähler und Nenner der Differentialquotienten Zeichen d fortgelassen wird, so dass im Zähler nur die zu rentiirende Function steht, im Nenner die Variable, nac differentiirt wird. Ausserdem wird von der häufig ben Bezeichnung höherer Differentialquotienten mittels symbo Potenzen Gebrauch gemacht; und diese Symbole werden Unterschiede von gewöhnlichen Potenzen, durch doppelte thesen kenntlich gemacht.

Es seien nun x', y', z' neue den ursprünglichen p Coordinaten, deren Anfangspunkt der betrachtete singulär x, y, z ist. Dass der Punkt ein singulärer ist, wird du Gleichungen ausgedrückt:

$$(1) \qquad \varphi(x,y,z) = 0, \quad \frac{\varphi}{x} = 0, \quad \frac{\varphi}{y} = 0, \quad \frac{\varphi}{z} = 0.$$

Die Gleichung des Tangentenkegels ist ferner, wie bekan

$$\left(\left(x' \cdot \frac{\varphi}{x} + y' \cdot \frac{\varphi}{y} + z' \cdot \frac{\varphi}{z}\right)\right)^2 = 0, \quad \text{oder} \quad F(x', y', z') =$$

Die Richtungscosinus p, q, r der Kegelaxe sind dann dur Gleichungen bestimmt:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1,$$

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}}{p} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}}{q} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}}{r},$$

wobei p, q und r die Argumente von F sind. Durch die axe und diejenige Erzeugende des Kegels (Tangente im lären Punkte), welche die Richtungscosinus a, b, c hat, s ein ebener Schnitt gelegt. Dann ist der Krümmungsradiu selben durch die Formel bestimmt

$$R = \pm \frac{3}{2} \frac{a\frac{\partial F}{\partial p} + b\frac{\partial F}{\partial q} + c\frac{\partial F}{\partial r}}{\left(\left(a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z}\right)\right)^3 \sqrt{(qc-rb)^2 + (ra-pc)^2 + (pb-}}$$

eine Formel, die der in der früheren Arbeit für einen N schnitt in einem gewöhnlichen Punkte der Fläche abgel

ichung

$$R = \frac{\pm \Delta_1 \varphi}{\left(\left(a\frac{\varphi}{x} + b\frac{\varphi}{y} + c\frac{\varphi}{z}\right)\right)^2}$$

z analog ist.

Nachdem der Verfasser die eben genannte Formel auf die Doppelpunkte der Fresnel'schen Wellenfläche angewandt , untersucht er weiter die Bedingungen dafür, dass der be- htete singuläre Punkt ein conischer Nabelpunkt (ombilic conique) d. h. dass 1) der Tangentenkegel ein Rotationskegel sei, lie durch die verschiedenen Erzeugenden des Kegels gelegten nitte dieselbe Krümmung haben. Die erste dieser Bedingun- erfordert, dass

$$\frac{\varphi^2}{x^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}}{\frac{\varphi^2}{yz}} = \frac{\varphi^2}{y^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{xy}\frac{\varphi^2}{yz}}{\frac{\varphi^2}{zx}} = \frac{\varphi^2}{z^2} - \frac{\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}}{\frac{\varphi^2}{xy}}$$

Zum Ausdruck für die zweite Bedingung gelangt der Ver- ser auf genau demselben Wege, auf dem er in der früheren eit die sphärischen (d. h. gewöhnlichen) Nabelpunkte bestimmt te, die bisher von allen Autoren allein in Betracht gezogen d. Nur ist das frühere Verfahren hier auf höhere Differential- otienten, resp. auf Terme von höherer Ordnung anzuwenden. s Charakteristische der Ableitung besteht in einer Ausdehnung r berühmten Lagrange'schen Methode der Multiplicatoren, die n gewöhnlich als nur auf lineare Gleichungen anwendbar an- ht, auf nicht lineare Gleichungen. So gelangt der Verfasser t einer in Anbetracht der scheinbaren Complication der Formeln merkenswerten Leichtigkeit zur Bestimmung der Coordinaten es conischen Nabelpunktes, sowie der Grösse seines Krüm- ngsradius R. Die Resultate, die ganz analog den früheren Bezug auf sphärische Nabelpunkte sind, sind in folgenden acht ichen Verhältnissen, oder um zu addiren in sieben völlig sym- etrischen Gleichungen enthalten:

(3)

$$\overline{\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^3\left[\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{yx}\right)^3+\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^3-3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right]}$$

und zwei analoge, welche durch Circular-Permutationen der x, y, z daraus hervorgehen

$$=\frac{\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\cdot\frac{\varphi^3}{y^3}-\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\cdot\frac{\varphi^3}{z^3}+3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{\varphi^3}{yz^2}+\frac{\varphi^3}{y^2z}\right)}{\left(\frac{\varphi^2}{yz}\right)^3\left[\frac{\varphi^2}{z^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{z^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{yx}\right)^3-\frac{\varphi^2}{y^2}\left(2\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{y^2}\right)\left(\frac{\varphi^2}{zx}\right)^3+3\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(\frac{\varphi^2}{yx}+\frac{\varphi^2}{zx}\right)\right]}$$

und zwei analoge, endlich:

$$=\frac{\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yz}\cdot\frac{\varphi^3}{x^3}+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{zx}\cdot\frac{\varphi^3}{y^3}+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{xy}\cdot\frac{\varphi^3}{z^3}-3\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^3}{xyz}}{\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}\left[\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\right)^2+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{x^2}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}\right)^2+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\right)^2-3\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}\right]}$$

$$=\frac{1}{R}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\frac{\varphi^2}{yz}\frac{\varphi^2}{zx}\frac{\varphi^2}{xy}}\frac{\sqrt{\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(2\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}+\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{yz}\right)+\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}\left(2\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}+\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{zx}\right)+\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\left(2\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}+\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{xy}\right)}}{\left[\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}\left(\frac{\varphi^2}{yx}\frac{\varphi^2}{zx}-\frac{\varphi^2}{x^2}\frac{\varphi^2}{yz}\right)+\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}\left(\frac{\varphi^2}{zy}\frac{\varphi^2}{xy}-\frac{\varphi^2}{y^2}\frac{\varphi^2}{zx}\right)+\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}\left(\frac{\varphi^2}{xz}\frac{\varphi^2}{yz}-\frac{\varphi^2}{z^2}\frac{\varphi^2}{xy}\right)\right]}.$$

einem Schlussparagraphen giebt der Verfasser Anwendun-
r von ihm abgeleiteten Formeln auf einige Beispiele, die
h zur Prüfung der Richtigkeit der Formeln dienen. Er
zu dem Zwecke drei einfache Fälle derart aus, dass man
on der Richtigkeit der für diese Fälle durch die obige
e gegebenen Formeln auch a priori, oder wenigstens durch
ntungen, die von jener Theorie unabhängig sind, leicht
ngen kann. Um eine Idee von dieser Art der Bestätigung
en, genügt es, das letzte Beispiel anzuführen. Dasselbe
die Fläche dritter Ordnung

$$x+y+z=\frac{m(x^2+y^2+z^2+2\lambda yz+2\mu zx+2\nu xy)}{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+2\delta yz+2\varepsilon zx+2\eta xy},$$

Gleichung neun unbestimmte Constanten $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\eta,\lambda,\mu,\nu$
, während m ein gegebener linearer Parameter ist. Der
er ist auf dies Beispiel durch die Ueberlegung geführt,
lie Coordinaten jedes einzelnen conischen Nabelpunktes
Gleichungen genügen müssen, nämlich den obigen mit (1), (2)
bezeichneten Gleichungen; dass also, nach Elimination der
naten, noch neun Bedingungsgleichungen für die in der
ngleichung enthaltenen Coefficienten übrig bleiben. Die
e ist nun, in der Fläche (4) die unbestimmten Constanten
bestimmen, dass die Fläche wenigstens einen conischen
unkt besitzt. Die Gleichungen (2) und (3) führen auf die
nen

$$\alpha=\beta=\gamma=g,\quad \delta=\varepsilon=\eta=h,\quad \lambda=\mu=\nu=k;$$

ese Werte der Constanten hat die Fläche (4) einen co-
Nabelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten, welche
man auch den Grössen g, h, k beilegen mag. Der Krüm-
adius für alle ebenen Schnitte, die durch den Nabelpunkt
sind, hat nach der letzten Gleichung (3) den Wert

$$(6)\qquad R=m\cdot\frac{k^{\frac{3}{2}}(1+2k)^{\frac{1}{2}}}{gk-h}.$$

chtigkeit dieses Resultats aber kann man sehr leicht direct
eisen. Denn mit Benutzung von (5) kann man die Glei-

chung der Fläche folgendermassen schreiben:

$$x+y+z = \frac{m[(1-k)(x^2+y^2+z^2)+k(x+y+z)^2]}{(g-h)(x^2+y^2+z^2)+h(x+y+z)^2}.$$

Aus dieser Form aber erkennt man sofort, dass die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Rotationsaxe diejenige durch den Anfangspunkt gehende Linie ist, welche mit den positiven Axen gleiche Winkel bildet. Daraus ist klar, dass der Anfangspunkt ein singulärer Punkt ist und allen Bedingungen eines conischen Nabelpunktes genügt. Bestimmt man ferner die Meridiancurve der Rotationsfläche und berechnet mit Hülfe derselben direct den Krümmungsradius im Anfangspunkt, so gelangt man unabhängig von der allgemeinen Theorie auf den Wert (6).

Die allgemeine Theorie giebt somit, mit Ausschluss jedes Zweifels und jeder Unsicherheit, die Grundlagen zur Bestimmung bemerkenswerter Punkte, die als conische Nabelpunkte bezeichnet werden und eine Singularität höherer Art darstellen. Trotzdem können dieselben nach dem Obigen bei jeder Oberfläche auftreten, deren Gleichung wenigstens neun unbestimmte Constanten enthält. Mn. (Wn.).

R. Lipschitz. Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. Berl. Ber. 1882. 1077-1087.

Die Untersuchung wird durchweg für eine n-fache Mannigfaltigkeit geführt, auf welche sich überall die Raumbegriffe leicht verständlich erweitern lassen. Fläche heisst die durch die Gleichung $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) =$ const. zwischen den orthogonalen Coordinaten auf $(n-1)$ Unabhängige beschränkte Mannigfaltigkeit. Mögen hier die Summen Σ und Σ' sich beziehungsweise auf die Zeigerwerte 1 bis n und 1 bis $n-1$ erstrecken. Durch die Fläche ist die Krümmung eines Normalschnitts

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Sigma \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_\beta \partial x_\gamma} dx_\beta\, dx_\gamma}{\sqrt{N}\,\Sigma \partial x^2}; \quad N = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2$$

stimmt, ein Ausdruck, der, wenn man die Richtungscosinus der **rmale**

$$\xi_\beta = N^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta}$$

führt, übergeht in

$$(4) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{\Sigma d\xi dx}{\Sigma dx^2}.$$

· **Bestimmung** der Maxima und Minima, also der Hauptkrüm-**ngen,** dienen, wie der Verfasser früher nachgewiesen, die **leichungen:**

$$d\xi_\beta - \frac{1}{\varrho} dx_\beta = 0,$$

aus nach Elimination der dx_β:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} - \frac{1}{\varrho}, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} - \frac{1}{\varrho}, & \ldots, & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_{n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_1}, & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} - \frac{1}{\varrho} \end{vmatrix} = 0.$$

r von $\frac{1}{\varrho}$ freie Term, d. i. die Functionaldeterminante, drückt **her das** Product der Hauptkrümmungen aus. Setzt man

$$\xi_\beta = \nu_\beta \xi_n,$$

lässt sich der Zähler in (4) in doppelter Weise transformiren:

$$(19) \quad \begin{cases} \Sigma d\xi dx = \xi_n \Sigma' d\nu dx = \xi_n \sum_\alpha' \sum_\beta' \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta \\ \qquad = \xi_n \sum_\alpha' \sum_\beta' \frac{\partial x_\alpha}{\partial \nu_\beta} d\nu_\alpha d\nu_\beta. \end{cases}$$

s wird nun gesetzt:

$$(16) \qquad \xi_n^{-2} \Sigma dx^2 = \sum_\alpha' (\sum_\beta' P_{\alpha\beta} d\nu_\beta)^2,$$

$$(17) \qquad \frac{1}{\xi_n} \sum_\alpha' \sum_\beta' \frac{\partial \nu_\alpha}{\partial x_\beta} dx_\alpha dx_\beta = \sum_\alpha' \left[\frac{1}{\varrho_\alpha} (\sum_\beta' P_{\alpha\beta} d\nu_\beta)^2\right].$$

ie Möglichkeit erhellt aus der Bestimmung der P. Betrachtet

Diese Arbeit und die des Referenten „Ueber Flächen gegebener Mittelpunktsfläche und über Krümmungsverwandtsch (Referat siehe Seite 656 dieses Bandes) sind in Folge ei im Gespräch erhaltenen Anregung von beiden Verfassern glei zeitig ohne Verabredung ausgeführt worden. Die ursprüngli gestellte Aufgabe ist beiden gemein, im weiteren Verlauf bew ten sich indessen die Untersuchungen nach verschiedenen Ric tungen. Herr Hoppe stellt zunächst die Coordinaten eines Pun tes x, y, z, einer gegebenen Mittelpunktsfläche Ω durch zwei b liebige Parameter dar und kommt zur Lösung des Problems a folgende Gleichungen: Ist für die Fläche Ω das Quadrat d Linienelements

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2, \quad \text{ist } t^2 = eg - f^2,$$

und sind p, q, r die Richtungscosinus der Normale, werden die e sprechenden Grössen für die gesuchte Fläche Ω', die die gegebe Ω zur einen Mittelpunktsfläche hat, durch Accente bezeichn bezeichnet ferner ϱ den zugehörigen Hauptkrümmungsradius Fläche Ω', so hat man

$$t^2 p' = \frac{\partial\varrho}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}g - \frac{\partial x}{\partial v}f\right) - \frac{\partial\varrho}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}f - \frac{\partial x}{\partial v}g\right)$$

und die analogen Gleichungen und daraus durch Quadriren Addiren:

$$t^2 = g\left(\frac{\partial\varrho}{\partial u}\right)^2 - 2f\frac{\partial\varrho}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varrho}{\partial v} + e\left(\frac{\partial\varrho}{\partial v}\right)^2.$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung f mit deren Integration das Problem gelöst ist. Man über schon hieraus, dass man statt ϱ stets setzen darf $\varrho + \text{const.}$, dass, wenn eine Fläche Ω' die verlangte Eigenschaft hat, ihr parallelen Flächen dieselbe Eigenschaft haben, was von herein evident ist; zweitens, dass das allgemeine Integral willkürliche Function enthält. Weil endlich nur die Funda talgrössen erster Ordnung vorkommen, ist das Problem für auf einander abwickelbaren Flächen Ω gelöst, wenn es für gelöst ist. Dieser Ausspruch lässt sich, wie Referent in Arbeit gezeigt hat, noch etwas erweitern. Man kann di gebene Fläche Ω, nachdem man sie gebogen hat, noch

sen Dehnung aussetzen, ohne dass die Lösung des Problems gewisse Beziehungen zwischen den gegebenen Flächen alterwerden. Im weiteren Verlauf entwickelt nun der Herr Verr eine Reihe von Formeln, durch die er zur Darstellung der tkrümmungen von Ω', der zweiten Mittelpunktsfläche $\Omega_{,,}$ Krümmungslinie von Ω und der Curve constanter erster tkrümmung kommt. Durch diese Betrachtungen wird er len Gesichtspunkt geführt, den Referent in der citirten Arbeit seinem Ausgangspunkt gleich Anfangs gewinnen musste.

Es entsprechen nämlich der ersten Schaar der Krümmungs- und der Schaar der Curve constanter erster Hauptkrüm- auf Ω' eine Schaar geodätischer Linien auf Ω und die ar der Orthogonalen. Wählt man diese Linien zu Parameter-, so ist $e = 1$, $f = 0$, $g = t^2$. Dann ergiebt sich $\varrho = -u$, die Coordinaten der gesuchten Fläche werden

$$x' = x - u\frac{\partial x}{\partial u} \text{ etc.}$$

Coordinaten der zweiten Mittelpunktsfläche $\Omega_{,}$ werden

$$x_{,} = x - \frac{t}{\frac{\partial t}{\partial u}}\frac{\partial x}{\partial u} \text{ etc },$$

ate, die bis auf einen formellen Unterschied mit denen eferenten übereinstimmen. Hierdurch ist das vorliegende m vollständig darauf zurückgeführt, auf der gegebenen ein beliebiges orthogonal-geodätisches System zu suchen. beschäftigt sich der Verfasser mit der Integration für le Fälle, indem er bei orthogonal-geodätischen Parametern $t = UV$, und $t = uV + V_{,}$, die bei Rotationsflächen und wickelbaren Flächen zutreffen; auch für Flächen zweiten ist das Problem als vollständig gelöst zu betrachten.

ebrigens möge dem Referenten gestattet sein, hier auf le Druckfehler in seiner Arbeit aufmerksam zu machen. ite 322 in der Formel XIII muss es dreimal heissen $\frac{\partial t_{,}}{\partial u}$, $\frac{\partial t_{,}}{\partial v}$; auf Seite 324 Zeile 5 v. u. ist in der Formel hinzu-

zufügen das Glied $-t_1\frac{\partial t_1}{\partial u}$; Seite 325 Zeile 5 v. u. muss ste
t_1 statt t_1^2. Endlich sei darauf hingewiesen, dass Herr Bian
in der Arbeit Ricerche sulle superficie elicoidali (Batt. G. XV
9-40, s. F. d. M. XI. 1879. 546.) die Lösung des Problems
Aufsuchung der Fläche aus gegebener Mittelpunktsfläche ber
mitteilt und auf bestimmte Fälle anwendet. A.

F. August. Ueber Flächen mit gegebener Mittelpunk
fläche und über Krümmungsverwandtschaft. Hoppe A
LXVIII. 315-352.

Eine mit zwei Parametern u, v variirende Tangente ei
gegebenen Fläche M_1 ist nur dann Normale einer constan
Fläche P, wenn sie mit dem einen Parameter u längs einer Kü
sten als deren Tangente variirt. Dann aber ist stets M_1 Mit
punktsfläche von P, letztere schneidet also auf der Tang
eine Strecke gleich dem einen ihrer Hauptkrümmungsradien ϱ_1
und der Endpunkt beschreibt bei Variation von u eine Kr
mungslinie. Die Grösse ϱ_1 ist durch den Ausdruck

$$\varrho_1 = -\int(\alpha dx_1 + \beta dy_1 + \gamma dz_1)$$

für Variation längs der Fläche M_1, oder in u, v durch

$$\varrho_1 = -\int\left(\sqrt{e_1}\,du + \frac{f_1}{\sqrt{e_1}}\,dv\right)$$

anfänglich bekannt, wo α, β, γ Richtungscosinus jener Tang
an die Kürzeste sind und

$$e_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \cdots;\ f_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \cdots$$

ist, und, da ϱ_1 einen willkürlichen constanten Addenden hat
gehört zu jeder Schaar Kürzester eine Schaar paralleler Flä
P, mithin ist die Aufgabe, zu einer gegebenen Mittelpunktsfl
die Urflächen zu finden, in gleicher Allgemeinheit gelöst d
die, auf ersterer eine Schaar Kürzester zu construiren.

Es wird nun die zweite Mittelpunktsfläche M_2 in Betr

;en, und zwar direct aus der ersten hergeleitet als Ort des
›idenzpunktes der Tangenten, welche nicht blos mit u variiren.
ırgiebt sich, dass ein Coincidenzpunkt, ausser für $\partial v = 0$,
bei Variation in conjugirter Richtung mit dieser stattfindet,
mmt durch

$$\text{(IX)} \qquad E_1 du + F_1 dv = 0,$$

$$E_1 = p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} + \cdots; \quad F_1 = p_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} + \cdots$$

.. Richtungscosinus der Normale sind, und die u längs den
ɩesten variiren. Die Linien (IX) sind es dann, welchen die
ite Schaar Krümmungslinien auf P entspricht. Für die Strecke
der Tangente bis zur zweiten Mittelpunktsfläche M_2 wird der
t gefunden:

$$\varrho_0 = \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2\sqrt{e_1}\, t_1^2}{f_1 \frac{\partial e_1}{\partial v} - e_1 \frac{\partial g_1}{\partial u}}, \quad (t_1^2 = e_1 g_1 - f_1^2).$$

man also auf M_1 ein System sich in conjugirten Richtungen
eidender Curven, dessen eine Schaar Kürzeste sind, so ent-
ht ihm auf M_2 ein eben solches System, wo die andere Schaar
este sind, und auf P das System der Krümmungslinien.
ıuf werden die Fundamentalgrössen der Flächen P und M_2
ickelt dargestellt unter Annahme orthogonal geodätischer
meter auf M_1.

Krümmungsverwandt nennt der Verfasser Flächen P, P', die
ntsprechenden Punkten in beiden Hauptkrümmungen be-
ngsweise übereinstimmen, und bei denen mindestens ein
m von Krümmungslinien der einen Fläche einem solchen
ınderen entspricht. Dieselbe ist im Allgemeinen unsymme-
ı oder einseitig. Entsprechen sich aber beide Systeme von
ımungslinien, so heisst die Krümmungsverwandtschaft sym-
sch oder vollkommen. Auf einseitig krümmungsverwandte
ıen kommt man durch jede Deformation von M_1 in M_1', wo-
$'_1 = 1$, $f'_1 = 0$; $t'_1 = t_1 V$ wird. Dieser Bedingung entspricht
Biegung, zu welcher aber noch eine Dehnung hinzutreten

kann. Die Krümmungsverwandtschaft ist vollkommen, wenn ausserdem

$$E_1 F'_1 - E'_1 F_1 = 0.$$

Bei einfacher Krümmungsverwandtschaft bewahren die Linien

$$(E'_1 du + F'_1 dv) \pm (E_1 du + F_1 dv) = 0$$

auf P und auf M_2 ihre Längen. Es wird nun die Aufgabe der Abbildung nach einseitiger Krümmungsverwandtschaft unter Annahme orthogonaler geodätischer Parameter auf M_1 allgemein gelöst, dann die Anwendung auf abwickelbare und Canalflächen gemacht. Ist M_1 abwickelbar, und lässt man eine Ebene mit einem System Gerader und orthogonaler Trajectorien auf ihr rollen, so bildet sich das System als ein orthogonal geodätisches System ab, und die Trajectorien erzeugen die Fläche P. Sie sind dann die normalen Querschnitte der Canalfläche P. Man kann daher die Aufgabe, alle Urflächen zur abwickelbaren Mittelpunktsfläche zu finden, als identisch betrachten mit der, alle in dem genannten Sinne zugehörigen Canalflächen zu bilden. Da nun alle Abwickelbaren durch Biegung aus einander hervorgehen, so sind alle Canalflächen einseitig krümmungsverwandt. Die Biegung von M_1 kann man bestimmt denken durch Biegung ihrer Gratlinie. Aendert man blos deren Torsion, so bleibt sich die Canalfläche vollkommen krümmungsverwandt, und zwar sind hierin alle vollkommen krümmungsverwandten Flächen einer Canalfläche enthalten. Alle bisher behandelten Fragen werden nun besonders untersucht für den Fall, in dem M_1 in eine Linie, Mittelpunktslinie, degenerirt. Einer solchen entspricht als Fläche P die Enveloppe einer Schaar von Kugeln, und die zugehörigen Krümmungslinien sind Kreise. Die allgemeinste Fläche, die einer Fläche mit einer Mittelpunktslinie M_1 derart einseitig krümmungsverwandt ist, dass den cyklischen Krümmungslinien Krümmungslinien entsprechen, ist gleichfalls eine Fläche mit einer Mittelpunktslinie M'_1, welche, von gewissen Singularitäten abgesehen, ganz beliebig sein darf. Bei vollkommener Krümmungsverwandtschaft sind M_1 und M'_1 gleichzeitig doppelt gekrümmt, und es giebt eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von P' zu P gleichzeitig eben, und die Mannigfaltigkeit der P' ist grösser

hzeitig gerade, hier sind die P Rotationsflächen, mithin auch P'. Schliesslich werden die Rotationsflächen nach der da-verbundenen Vereinfachung besonders behandelt. H.

HOPPE. Nachtrag zur Flächentheorie. Hoppe Arch. LXVIII. 39-440.

Der Nachtrag schliesst sich an den § 27 der Flächentheorie Herrn Verfassers an (s. auch Grunert Arch. LIX. 262, s. L. M. VIII. 1876. 479); es werden in ihm folgende Sätze be-sen:

1) Die orthogonalen Trajectorien derjenigen Kürzesten auf Mittelpunktsfläche, welche einer Schaar von Krümmungslinien der Urfläche entsprechen, entsprechen den Curven constanter hôriger Hauptkrümmung auf der Urfläche. 2) Den zwei ptkrümmungsrichtungen auf der Urfläche entsprechen conju-e Richtungen auf jeder der beiden Mittelpunktsflächen.

A.

HOPPE. Ueber das Minimum des Winkels zwischen wei conjugirten Tangenten auf positiv gekrümmter Fläche. Hoppe Arch. LXIX. 19-30.

Ist das Quadrat des Linienelementes, dargestellt in den be-gen Parametern u, v,

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2;$$

p, q, r die Richtungscosinus der Normale, und ist

$$= p\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \cdots;\quad F = p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \cdots,\quad G = p\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \cdots,$$

$$P = Ge + 2Ff + Eg;\quad Q = EG - F^2,$$

ind die beiden Werte von $\frac{dv}{du} = k$, welche den charakteri-n Richtungen entsprechen, die Wurzeln der quadratischen hung

$$\text{(I)}\qquad (GP - 2gQ)k^2 + 2(FP - 2fQ)k + (EP - 2eQ) = 0.$$

Der Krümmungsradius jedes der beiden durch diese Richtu gelegten Normalschnittes ist

$$\varrho = \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2};$$

und der Minimal-Winkel ϑ ist, wenn $\varrho_2 > \varrho_1$, bestimmt durc Gleichung

$$\cos \vartheta = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2 + \varrho_1}.$$

Geht man von einem Flächenpunkte in einer der eben cha terisirten Richtungen zum Nachbarpunkte, und so fort, so e man eine durch die Differentialgleichung (I) charakterisirte C deren also durch jeden Punkt zwei hindurch gehen, welche e Winkel bilden, der durch die Krümmungslinien halbirt Dieses Curvensystem nennt der Herr Verfasser ein conju Minimalsystem. Sollen die Parameterlinien dasselbe bilden muss

$$\frac{E}{e} = \frac{G}{g} \quad \text{und} \quad F = 0 \text{ sein.}$$

Geht man von Krümmungsparametern aus, d. h. sind die K mungslinien die Curven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, so wir Gleichung der conjugirten Minimalcurven

$$E\,du^2 - F\,dv^2 = 0.$$

Die Integration der Differentialgleichung der conjugirten Mi curven gelingt u. A. bei Rotationsflächen. Ist die Rotations gegeben durch die Gleichungen

$$x = t\cos v; \quad y = t\sin v,$$

während z und t so als Functionen von u gegeben sind,

$$\frac{dt}{du} = \cos\tau, \quad \frac{dz}{du} = \sin\tau \text{ ist,}$$

so sind die Curven dargestellt durch

$$\pm v = \int \frac{\sqrt{d\tau \cdot du}}{t\sin\tau}.$$

Ferner gelingt die Integration für die Flächen zweiten G bei welchen man auf elliptische Functionen geführt wird. Ellipsoid z. B. ist in Krümmungsparametern dargestellt

$$x^2 = \frac{a^2(c^2-b^2)}{d}(u-a^2)(v-a^2),$$
$$y^2 = \frac{b^2(a^2-c^2)}{d}(u-b^2)(v-b^2),$$
$$z^2 = \frac{c^2(b^2-a^2)}{d}(u-c^2)(v-c^2),$$

$$d = (b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)$$

Die Differentialgleichung der Curven wird

$$\frac{du}{\sqrt{(u-a^2)(u-b^2)(u-c^2)}} = \pm\frac{dv}{\sqrt{(v-a^2)(v-b^2)(v-c^2)}}.$$

anlich ist die Gleichung beim zweischaligen Hyperboloid. Bei a elliptischen Hyperboloid kommt man auf niedere Transodenten. A.

WEINGARTEN. Ueber die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Berl. Ber. 1882. 453-456.

Verschiebung im Sinne dieses Aufsatzes ist eine solche ohne eardehnung, die jedoch auch Biegung zulässt. Ferner ist zur ıtlichkeit zu bemerken, dass die geodätischen Dreiecke nur specielle Vertreter beliebiger Flächenstücke auftreten. Die ersuchung beginnt mit der Verschiebung unendlich kleiner iecke und benutzt den von Gauss gegebenen Ausdruck der erenz eines Dreieckwinkels auf der Fläche und des Winkels ebenen Dreieck von gleichen Seiten:

$$A-A^0 = \frac{1}{12}\sigma^0(2\alpha+\beta+\gamma),$$

σ^0 den Inhalt des ebenen Dreiecks, α,β,γ die Flächenkrümıgen in den Eckpunkten bezeichnen. Hieraus folgt sofort bei rendung auf alle drei Winkel, dass α,β,γ bei Verschiebung Werte behalten müssen. Ein unendlich kleines Dreieck a sich also nur so verschieben, dass seine Ecken auf Linien ıtanten Krümmungsmasses fortrücken, und wenn die Bahn s Eckpunktes beliebig sein soll, so muss die Fläche selbst

linien jenes Orthogonalsystem zum sphärischen Bilde haben, i
die Enveloppe der Ebene

$$ux + vy + wz + P = 0,$$

wo P das allgemeine Integral von (1) ist. Hiermit ist der Ga
für die allgemeinste Behandlung des Problems aufgefund
Man geht z. B. von der Gleichung aus:

$$(3) \qquad 2(\varrho - \varrho_1)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho \partial \varrho_1} + \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} = 0.$$

Dieselbe wird befriedigt durch einen Ausdruck von der F

$$\sum_1^4 A_i \sqrt{(\varrho + a_i)(\varrho_1 + a_i)}.$$

Nun lassen sich vier derartige Ausdrücke bilden, indem statt
Constanten A_i die Constanten B_i, C_i, D_i gesetzt werden. D
vier Ausdrücke mögen der Reihe nach gleich u, v, w, p ge
werden; dann können die Constanten A_i, B_i, C_i, D_i so besti
werden, dass die Gleichung (2) erfüllt wird. Man kommt so
die allgemeine Lösung der Aufgabe, alle Flächen zu fin
deren Krümmungslinien zur sphärischen Abbildung ein Sys
confocaler sphärischer Kegelschnitte haben. Dies hatte der V
fasser früher auf andere Weise entwickelt. Auch Bonnet h
bereits mit Hülfe eines bekannten Satzes von Joachimsthal
wiesen, dass sich jede ebene Krümmungslinie sphärisch als
Kreis abbilden muss, woraus sich weiter ergiebt, dass die A
suchung der Flächen mit zwei Systemen ebener Krümmu
linien auf die Untersuchung derjenigen Flächen hinauskon
deren Krümmungslinien sich sphärisch in zwei orthogo
Kreisschaaren abbilden.

Das ist der Inhalt der ersten Note. Die zweite bespri
wie man aus gegebenen Lösungen des Problems ohne neue I
gration durch eine beliebige Inversion andere Lösungen herle
kann. Hervorzuheben ist eine Verallgemeinerung des Probl
der sphärischen Abbildung, welches darin besteht, dass man
Fläche Σ auf eine Kugel S so abbildet, dass beide Fläche
entsprechenden Punkten von einer veränderlichen Kugel be
werden. Aus dieser Abbildung kann leicht die frühere

specieller Fall hergeleitet werden; da sie aber selbst die bemerkenswerte Eigenschaft hat, dass den Krümmungslinien auf Σ orthogonale Liniensysteme auf S entsprechen, und da sich diese Eigenschaft bei der Transformation durch reciproke Radien erhält, so ist sie in vieler Beziehung interessant. Auch lässt sich hierbei die Bildfläche S, welche im Allgemeinen eine Kugel ist, durch eine Ebene ersetzen, und diese Art der Abbildung einer Fläche auf eine Ebene führt ebenfalls zu bemerkenswerten Beziehungen, von denen einige besprochen werden. Die beiden letzten Noten enthalten noch eine Reihe von Bemerkungen über die Integration der Gleichung (3). Wie der Herr Verfasser bereits früher bewiesen hat, lässt sich die oben aufgestellte Bedingung (2) immer dann erfüllen, wenn man vier particuläre Integrale der Gleichung (3) kennt, welche durch eine homogene Gleichung zweiten Grades verbunden sind. Dies kann nun auf einen speciellen Fall der Gleichung (3) angewendet werden. Ist nämlich $A = 0$ und $B = 0$, dagegen

$$C = i[f(\varrho + i\varrho_1) - \varphi(\varrho - i\varrho_1)],$$

so wird die Gleichung (3):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\varrho_1} = i[f(\varrho + i\varrho_1) - \varphi(\varrho - i\varrho_1)]z.$$

Bildet man nun die Differentialgleichungen

$$(4) \qquad P'' = P[f(x) + m];$$

$$(5) \qquad Q'' = Q[\varphi(x_1) + m],$$

wo m eine Constante bedeutet, und nennt P_1 und P_2 zwei particuläre Integrale der ersten Gleichung, in welchen für x gesetzt ist $(\alpha + \beta i)$, nennt man analog Q_1 und Q_2 zwei Integrale der zweiten, wo für x_1 gesetzt ist $(\alpha - \beta i)$, so erhält man die vier Lösungen der Gleichung (3)

$$u = P_1Q_2 + P_2Q_1, \quad w = P_1Q_1 - P_2Q_2,$$
$$v = i(P_2Q_1 - P_1Q_2), \quad p = P_1Q_1 + P_2Q_2,$$

welche die Relation (2) erfüllen. Wenn die Functionen f und φ conjugirt sind, und Q_1 und Q_2 bezüglich zu P_1 und P_2 conjugirt sind, dann wird das so definirte sphärische System reell, und zwar isothermisch. Dies System ist durch die Function f und die

Constante m definirt. Ersetzt man P_1 und P_2 durch zwei andere particuläre Integrale der Gleichung (4), so erhält man Systeme, welche aus dem ersten durch Inversion hervorgehen. Alle diese Systeme, welche als äquivalent gelten können, nennt der Verfasser „correspondirend“ der Gleichung

$$y'' = y[f(x)+m].$$

Auf die Form (3) lässt sich auch eine aus der Geometrie und der mathematischen Physik bekannte Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\partial\varrho_1} = -\frac{m(m+1)}{(\varrho-\varrho_1)^2}z$$

zurückführen. Es wird angedeutet, dass man auf diese Weise alle Flächen finden kann, welche zur sphärischen Darstellung der Krümmungslinien die Isothermensysteme haben, welche den drei Gleichungen genügen:

$$y' = y\left[\frac{m(m+1)}{x^2} - h^2\right],$$

$$y'' = y\left[\frac{m(m+1)}{\sin^2 x} - h^2\right],$$

$$y''' = y[m(m+1)k^2\sin^2 x + h].$$

Hierin sind alle bekannten Fälle enthalten. Man findet so unendlich viele algebraische Flächen mit algebraischen Krümmungslinien. Endlich wird noch (in der letzten Note) gezeigt, wie man aus der Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\partial\beta} = i[f(\alpha+i\beta) - \varphi(\alpha-i\beta)]z$$

eine unbegrenzte Zahl von Gleichungen derselben Form herleiten kann, welche alle integrabel sind, wenn die Ausgangsgleichung es ist. A.

H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. Résal J. (3) VIII. 251-296.

Dieser Artikel ist die Fortsetzung der Abhandlung, welche T. VII. 375 beginnt (s. F. d. M. XIII. 1881. 591). Der nächste Gegenstand ist die Theorie der „Conséquents.“ Die Discussion

ler Curvenformen schliesst sich an die Schnitte der Curven mit linem festen Bogen an. Es wird gefragt, ob eine in einem Schnittpunkte beginnende Halbcharakteristik, ohne vorher einen Knoten gebildet zu haben, den Bogen zum zweitenmal und öfter chneidet; der zweite heisst dann der „Conséquent". Dagegén erden die Doppelpunkte, in denen Berührung stattfindet, nicht s Endpunkte, wie die Knoten, sondern als Verzweigungs- ınkte betrachtet, so dass ihnen zwei Conséquents nachfolgen ınnen. Es werden viele Sätze über den Curvengang bewiesen, e jedoch nur im Zusammenhang Bedeutung haben. Es folgt e Theorie der Grenzcykel, dann Beispiele, dann die Unter- chung der Cykel ohne Berührung und Beispiele.

H.

H. Craig. A geometrical theorem. J. Hopkins Circ. 1882. 178.

Der Verfasser stellt ohne Beweis den Satz auf: „Zieht man arallel allen Hauptnormalen einer geschlossenen Curve im Raume om Mittelpunkte einer Kugel Radien, so teilt die Curve der ndpunkte die Oberfläche in zwei gleiche Teile." Dieser Satz st jedoch nicht ohne Einschränkung richtig. Stetigkeit der Ur- urve bis auf die zweite Ordnung muss zunächst vorausgesetzt verden, damit die sphärische Curve überhaupt Teile der Kugel- läche begrenzen kann. Letztere wird dann unter Umständen in nehr als zwei Teile geteilt. Aber auch wenn es nur zwei sind, könnnen sie jedes beliebige rationale Verhältnis haben. Fügt man ingegen die Bedingung hinzu, dass die sphärische Curve keine Doppelpunkte habe, so gilt der Satz ohne Ausnahme.

H.

S. A. Christensen. Vindskjäve Kurvers Polarflade og Evoluter. Zeuthen T. (4) VI. 17-19.

Zusammenstellung einiger Sätze über Polarflächen und Evo- uten windschiefer Curven. Gm.

S. Lie. Bestimmung aller Raumcurven, deren Krümmungsradius, Torsionsradius und Bogenlänge durch eine beliebige Relation verknüpft sind. Christiania Verh. 1882. No. 10. p. 1-6.

Die Aufgabe, alle Raumcurven zu bestimmen, deren Krümmungsradius ϱ und Torsionsradius r gegebene Functionen von der Bogenlänge s sind, verlangt nach Hoppe die Integration einer Riccati'schen Gleichung erster Ordnung. Aus seinen Untersuchungen folgt leicht, obgleich er es kaum explicite ausgesprochen hat, dass man alle Raumcurven angeben kann, die eine gegebene Relation der Form

$$\Omega\left(s, \int\frac{ds}{\varrho}, \int\frac{ds}{r}\right) = 0$$

erfüllen. Die vorliegende Note giebt die allgemeine Bestimmung aller Raumcurven, die eine beliebig gegebene Relation der Form

$$W(s, \varrho, r) = 0$$

befriedigen. Hierbei ist indess zu bemerken, dass die Formeln, welche dieses bemerkenswerte Resultat bieten, mit Imaginärem behaftet sind, welches im allgemeinen Falle kaum weggeschafft werden kann. Die angewandte Methode beruht auf der allgemeinen Theorie der Differentialinvarianten. L.

A. H. Curtis. Solution of a question (6807). Ed. Times XXXVI. 104-105.

Wenn in einer Curve die Differenz zwischen den Radien der absoluten und der sphärischen Krümmung constant ist, so haben die Orte der Mittelpunkte der absoluten und sphärischen Krümmung zwischen entsprechenden Punkten gleiche Bogenlängen. Wn.

A. J. C. Allen. Notes on solid geometry. Mess. (2) XII. 26-28.

Beweise bekannter Sätze 1) über Regelflächen, 2) über

aumcurven von constanter Krümmung und Torsion, 3) über **lche** Raumcurven, bei denen Krümmungs- und Torsionsradius **constantem** Verhältnis stehen. Glr. (Wn.).

B. Theorie der algebraischen Flächen und Raumcurven.

. Cayley. Determination of the order of a surface. Mess. (2) XII. 29-32.

Eine Ebene *OBC* und eine fest mit derselben verbundene **nie** *OA* mögen um den Punkt *O* rotiren; eine variable Ebene, **durch** einen festen Punkt *w* geht, möge *OA* in *A* und die **bene** *OBC* in *BC* schneiden. Beschreibt dann *BC* eine Regel**che** von der Ordnung *n*, so beschreibt der Punkt *A* eine Fläche **n der** Ordnung 4*n*. Dieser Satz, dessen Beweis hier mitge**lt wird**, ist eine Erweiterung von Newton's organischer Con**uction** von Curven. Der Satz wurde zuerst von Herrn C. **aylor** in seiner „Introduction to the geometry of conics" (1881) **ufgestellt**, während die Bestimmung der Ordnungszahl der **lächen** von Herrn Cayley herrührt. Glr. (Wn.).

W. L. Tanner, Ch. Ladd. Solution of a question (6998). Ed. Times XXXVII. 91.

Entwickelung der Bedingungen dafür, dass eine gegebene Linie auf einer Fläche n^{ter} Ordnung liegt. Wn.

M. Nöther. Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven. Kronecker J. XCIII. 271-318.

Diese Abhandlung bildet einen Auszug aus der in den Abhandlungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1883 erschienenen Arbeit von Nöther. Zu

gleicher Zeit ist eine Arbeit von Halphen in dem Journal l'école polytechnique vol. XXXIII. p. 1-200 erschienen, wel ganz ähnliche Resultate, wie die Arbeit von Nöther, gewin Es ist hierin ein ganz bedeutender Schritt in der allgemei Theorie der Raumcurven vorwärts getan, und zwar basiren Untersuchungen auf der Anwendung algebraisch-functionenth retischer Sätze, wie solche Sätze bei den ebenen Curven ja so hervorragende Rolle spielen. Die gewonnenen Resultate den dann zur Aufstellung der verschiedenen Species aller Cur bis zur siebzehnten Ordnung hin verwendet; auch noch ei allgemeine Beispiele sind angegeben. Die ganze Abhandl zerfällt in drei Teile.

Der erste Teil beginnt mit dem Restsatz, dem Specialgr pensatz und dem Riemann-Roch'schen Satz für ebene Curven, stellt im Anschluss daran einen Restsatz für Flächen, einen R satz für Raumcurven und einen Specialgruppensatz für diesel auf. An Stelle der adjungirten Curven $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung ebenen Curven λ^{ter} Ordnung treten hier adjungirte Fläc $(\mu+\gamma-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn die Raumcurve den teilweisen Sch zweier Flächen μ^{ter}, resp. ν^{ter} Ordnung bildet. Dann wird Raumcurve m^{ter} Ordnung als Schnitt eines Kegels m^{ter} Ordn mit einem Monoide n^{ter} Ordnung dargestellt (welche sich auss dem nur noch in Geraden schneiden) und die Ungleich $n \geqq \frac{m}{2}$ gefolgert. Aus dieser Darstellung ergeben sich fer die drei Sätze:

I. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ei ebene Curve die Projection einer Raumcurve von der Ordnung und dem Geschlechte p sei, ist für $p \geqq m-2$ die, dass a adjungirten Curven $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $h-1$ Doppelpunk der ebenen Curve passiren, auch durch den h^{ten} Doppelpunkt h durch gehen. Für $p < m-2$ herrscht keine Bedingung. (D Doppelpunkte der ebenen Curve entsprechen scheinbaren Pun ten der Raumcurve, da letztere immer ohne wirkliche Dopp punkte vorausgesetzt wird.)

II. Kann man durch $h-\frac{i}{2}(i+1)$ Doppelpunkte der Pro-ctionscurve eine adjungirte Curve $m-i-3$ legen; wenn $-i-3 \overline{\gtrless} \frac{m-1}{2}$, so geht dieselbe auch durch die übrigen $(i+1)$ Doppelpunkte.

III. Sei

$$> mi-\frac{1}{6}(i+1)(i+2)(i+3)+1+k, \text{ wo } k=0,1,2,\ldots, i=1,2,\ldots,$$

n kann. Stellen dann die h Doppelpunkte der ebenen rve für die ajungirten Curven $(m-i-3)^{\text{ter}}$ Ordnung mehr als $-\frac{1}{6}i(i+1)(i+2)+k$ lineare Bedingungen dar, so liegt die umcurve auf wenigstens ∞^k Flächen i^{ter} Ordnung.

Durch eine beliebige eindeutige Transformation der Raum-ven in ebene Curven findet der Verfasser noch den Satz: Die nstantenzahl der Gesammtheit aller Raumcurven von der Ord-ng m und dem Geschlecht p ist $=4m$ für $m \geqq \frac{3}{4}(p+4)$, gegen $\geqq 4m$ für $m<\frac{3}{4}(p+4)$.

Der zweite Teil stellt zunächst für ebene Curven den Satz if: Soll auf einer ebenen Curve f_μ von der Ordnung μ und ine vielfache Punkte die Gruppe $G_{\alpha\mu-\beta}$ $(0 \leqq \beta < \mu)$ von $\mu-\beta)$ Punkten derart sein, dass unter Berücksichtigung von $=0$ möglichst viele Curven von jeder beliebigen Ordnung $\geqq \alpha$ hindurch gehen, so ist notwendig und genügend, dass $G_{\alpha\mu-\beta}$ ne auf einer Geraden liegende Gruppe von β Punkten zum est hat.

Dieser Satz wird dann auf Flächen übertragen und lautet ann: Die Raumcurven m^{ter} Ordnung, welche auf einer Fläche ter Ordnung liegen sollen und das grösstmögliche Geschlecht π aben, müssen eine ebene Restcurve besitzen. Und zwar ist

$$\pi=\frac{1}{2}(\beta-1)(\beta-2)+\frac{1}{2}(\alpha\mu-2\beta), \quad (\mu+\alpha-4),$$

renn die Ordnung der Restcurve β und die Ordnung der Fläche,

welche die Raumcurve m^{ter} Ordnung und die Restcurve a schneidet, gleich α ist.

Nun wird die Frage aufgestellt, wann durch eine Raumcu m^{ter} Ordnung vom Geschlecht p eine Fläche μ^{ter} Ordnung hindu geht, und das Resultat gefunden, dass es noch eine line ∞^{λ}-Schaar von Flächen μ^{ter} Ordnung giebt, wo λ die grös Zahl bedeutet, welche den Ungleichungen

$$\mu m < 2(N_\mu - \lambda) \quad \text{und} \quad p > \mu m - (N_\mu - \lambda),$$

$$N\mu = \frac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3) - 1$$

genügt. (Giebt es keine positive Zahl λ, so giebt es auch kei Flächen μ^{ter} Ordnung). Speciell giebt es eine Fläche μ^{ter} O nung durch die Raumcurve von der Ordnung m und dem G schlechte p, wenn $\mu m < 2N_\mu$ und $p \geqq \mu m - N_\mu + 1$, oder we $\mu m \leqq 2N_\mu$ und $p > \mu m - N_\mu + 1$ ist.

Die vorige Fragestellung führt dann unmittelbar zu der neu Wann geht durch eine Raumcurve m^{ter} Ordnung vom Geschlecht welche bereits auf einer Fläche μ^{ter} Ordnung liegt, eine Flä ν^{ter} Ordnung ($\nu \geqq \mu - 3$)? Auch hier ist die Antwort, dass noch eine lineare ∞^{λ}-Schaar von Flächen ν^{ter} Ordnung und Allgemeinen keine weitere giebt, welche durch die Raumcu m^{ter} Ordnung hindurch geht, wo λ die grösste Zahl ist, die Ungleichungen

$$\nu m < 2(W_{\nu,\mu} - \lambda) \quad \text{und} \quad p > \nu m - W_{\nu,\mu} + \lambda$$

genügt. Dabei bedeutet $W_{\nu,\mu}$ die Mannigfaltigkeit aller Cu $\mu - \nu^{ter}$ Ordnung, welche auf der gegebenen Fläche μ^{ter} Ord von allen Flächen ν^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden; es also

$$W_{\nu,\mu} = N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1 = \frac{1}{6}(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3) + \frac{1}{2}\mu\nu(\nu-\mu$$

Es giebt speciell eine Fläche ν^{ter} Ordnung durch unsere C wenn

$$\nu m < 2W_{\nu,\mu} \quad \text{und} \quad p > \nu m - W_{\nu,\mu}$$

ist. Ist die letzte Ungleichung erfüllt, aber $\nu\mu \gtreqless 2W_{\nu,\mu}$, so es durch die auf der Fläche μ^{ter} Ordnung gelegene Raum

Ordnung entweder noch eine Fläche ν^{ter} Ordnung, oder die hen ν^{ter} Ordnung schneiden die Raumcurve in Specialpunkt-pen. Aus $\nu m \geqq 2 W_{\nu,\mu}$ ergiebt sich auch eine obere Grenze ν.

Wie schon gesagt wurde, giebt es für $\nu m \geqq 2 W_{\nu,\mu}$ noch zwei lichkeiten, und so wird weiter untersucht, wann die eine andere eintritt, wann also noch eine Fläche ν^{ter} Ordnung h die Curve m^{ter} Ordnung, welche sich auf einer gegebenen Ordnung befindet, hindurch geht, und wann nicht. Dazu kann eder die Restmethode benutzt werden, welche die Frage für gegebene Curve auf eine solche für eine corresiduale Curve führt, oder die Methode des ebenen Schnittes, welche mit des zu Anfang des zweiten Teiles gegebenen Satzes für e Curven die Frage entscheiden lehrt.

Der Verfasser setzt nun aus einander, wie man alle irreduc-n Raumcurven m^{ter} Ordnung vom Geschlechte p erhalten . Man nimmt zunächst an, dass die Curve auf einer Fläche Ordnung liegt, und dass diese Fläche die Fläche niedrigster ung ist, welche durch die Raumcurve hindurchgeht. Dann es noch eine Fläche ν^{ter} Ordnung geben, welche die Raum-e m^{ter} Ordnung ebenfalls enthält, und welche noch eine Rest-e von der Ordnung $m' = \mu\nu - m$ ausschneidet. Construirt also umgekehrt solche Restcurven von der Ordnung m', he aus der Fläche μ^{ter} Ordnung durch eine Fläche ν^{ter} Ord- ausgeschnitten werden, so erhält man die gesuchten Raum-en m^{ter} Ordnung als Restcurven dieser Curven. Die Aufstel- solcher Restcurven m'^{ter} Ordnung erledigt sich aber nach vorhergehenden Sätzen. Bei angenommenem μ sind für ν verschiedene Werte zu setzen, die Grenzen für ν bestimmen den früheren Ungleichungen gemäss. Um alle Raumcurven Ordnung und vom Geschlecht p zu erhalten, muss man dem ch einander die Werte 2, 3, ..., beilegen. Der höchste Wert, μ annehmen kann, ist der kleinste Wert, welcher den beiden leichungen

$$2N_\mu - m\mu > 0 \quad \text{und} \quad N_\mu - m\mu + p > 0$$

eich Genüge leistet.

Der Schluss des zweiten Teiles wird noch dazu benutzt, Zahl der Constanten einer Raumcurve m^{ter} Ordnung vom schlechte p genau zu geben, oder doch für dieselbe eine gena untere Grenze als die am Ende des vorigen Teiles gegeb Zahl $4m$ zu finden. Dazu werden folgende Grössen defi A_μ, resp. A_ν sei für eine Fläche μ^{ter} Ordnung, resp. ν^{ter} Ordn die Zahl der Bedingungen, um durch eine gegebene Raumc m^{ter} Ordnung und vom Geschlechte p hindurch zu gehen. Fer sei $S_{\mu,\nu}$ die Zahl der wirklichen Doppelpunkte, welche der vo ständige Durchschnitt zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung a weist, dessen einer Teil eine solche Raumcurve μ^{ter} Ordn vom Geschlecht p ist. Endlich sei $\sigma_{\mu,\nu}$ die Zahl der Beding gen, damit der vollständige Durchschnitt zweier Flächen μ^{ter} u ν^{ter} Ordnung in zwei Curven mit $S_{\mu,\nu}$ Schnittpunkten zerf Dann ist

$$\sigma_{\mu,\nu} \overline{\gtrless} S_{\mu,\nu}$$

und

$$u = A_\mu + A_\nu - \sigma_{\mu,\nu}.$$

Der dritte Teil giebt eine Einteilung der Curven und e Aufzählung aller Curven bis zur siebzehnten Ordnung nach d sem Einteilungsprincip. Das Gesammtgebiet der Raumcurv von gegebener Ordnung m und gegebenem Geschlecht p bild eine algebraische im Allgemeinen reducible Mannigfaltigke Die Raumcurven, welche demselben irreductiblen Gebiete ang hören, bilden eine Curvenfamilie. Ein anderes Einteilungsprinc giebt uns die Ordnungszahlen der Flächen niedrigster Ordnun auf denen die Curven liegen können; demnach unterscheidet d Verfasser Curvenspecies. Die Species sind Unterabteilungen d Familien. Es werden dann die Aufzählung der Raumcurve bis zur siebzehnten Ordnung vorgenommen, indem bei jed Ordnung zunächst nach den Geschlechtszahlen und dann weit nach den Species vorgegangen wird. Zugleich wird, so we möglich, die Zusammengehörigkeit der Species zu Familien z gegeben. Rn.

ILL. Sur des polygones dont les côtés sont tangents . une courbe et dont tous les sommets sont sur la courbe. S. M. F. Bull. X. 127-131.

. Auf einer unicursalen Curve m^{ten} Grades werden die Punkte ch die Werte eines Parameters t ausgedrückt; und es wird n durch einfache analytische Betrachtungen das Theorem be- sen: Zieht man in einem Punkte t einer unicursalen Curve Grades eine Tangente, welche die Curve in den Punkten $T_2, \ldots, T_{m-2}$ schneidet, und ist die Gleichung, aus welcher $T_2, \ldots, T_{m-2}$ als Function von t gefunden wird, also $f(T,t) = 0$, ogen für T und t, so treffen sich die Tangenten, die die Curve den Punkten T_1, $T_2, \ldots$ hat, paarweise in Punkten B, welche ebfalls auf der Curve liegen; die Tangenten, welche die Curve den B hat, treffen sich zu dreien in Punkten C der Curve, . w. Wenn man ferner von einem Punkte einer solchen ve an dieselbe Tangenten zieht, so liegen deren Berührungs- kte paarweise auf je einer Curventangente, die Berührungs- kte dieser letzteren Tangente zu dreien wieder auf Curven- genten, u. s. w. Der Herr Verfasser betrachtet dann im Be- dern Curven von der Gleichung

$$\alpha^m - \beta^p \gamma^{m-p} = 0,$$

α, β, γ drei lineare Functionen bezeichnen. Nachher wird e Raumcurve betrachtet, welche die Gleichungen

$$x = t^p, \quad y = t^q, \quad z = t^r$$

t; construirt man in einem Punkt dieser Curve die Schmie- gsebene, welche die Curve in Punkten T trifft, so ist die eichung zwischen t und T homogen; die Schmiegungsebenen, lche die Curve in den Punkten T hat, bilden ein Polyeder, sen Kanten die Curven treffen; construirt man weiter in diesen effpunkten an die Curve die Schmiegungsebenen, so treffen se sich zu dreien wieder auf der Curve u. s. w. Die Gleichung r $\frac{T}{t}$ lautet hier:

$$(z^p-1)qr(q-r)+(z^q-1)rp(r-p)+(z^r-1)pq(p-q)=0$$

wo $\frac{T}{t}=z$ gesetzt ist.

Mz.

C. Raumgebilde ersten, zweiten und dritten Grades.

Ch. Brisse. Application des propriétés des polynômes homogènes à la discussion de l'équation en S.

Nouv. Ann. (3) I. 193-207.

Sind λ, μ, ν die Winkel, welche die drei positiven Coordinatenaxen eines beliebigen Parallelcoordinatensystems mit einander bilden, so ist der Ausdruck

$$\sigma = x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu,$$

welcher bekanntlich das Quadrat der Entfernung des Punktes x, y, z vom Anfangspunkt ausdrückt, gleich einer Summe von drei positiven und verschiedenen Quadraten, welche für keine reellen Werte von x, y, z verschwindet, ausser für

$$x=0,\ y=0,\ z=0.$$

Ist ferner

$$\varphi = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$

eine homogene Function zweiten Grades mit reellen Coefficienten, so fragt es sich, für welche Werte des Parameters S der Ausdruck

$$\varphi - S\sigma$$

in ein Product von zwei linearen Factoren zerfällt. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass S der folgenden Gleichung dritten Grades genüge:

$$\text{(I)}\qquad \Delta(S) = \begin{vmatrix} A-S, & B''-S\cos\nu, & B'-S\cos\mu \\ B''-S\cos\nu, & A'-S, & B-S\cos\lambda \\ B'-S\cos\mu, & B-S\cos\lambda, & A''-S \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung (I) ist es, mit deren Discussion sich die Arbeit beschäftigt. Als Anwendung knüpft sich daran die Classification der Flächen zweiter Ordnung, die Aufsuchung ihrer Kreisschnitte, die Aufstellung der Bedingung für die Umdrehungs-

für beliebige, also im allgemeinen schiefwinklige
ılcoordinaten. Die Methode der Untersuchung ist etwa
le.

Die Gleichung (I) hat nur reelle Wurzeln; denn, wäre
Vurzel gleich $S = u+iv$, so wäre

$$\varphi - S\sigma = \varphi - u\sigma - iv\sigma = (P+iQ)R.$$

man x, y, z von Null verschieden, so dass $P = 0, Q = 0,$
ss $v\sigma = 0$ sein; σ ist nicht Null, also muss die Constante
:h Null sein.

Zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (I) geben für
σ) zwei Zerlegungen von verschiedenem Charakter, wobei
de Charaktere unterschieden werden:

$$P^2+Q^2, P^2-Q^2, -P^2-Q^2, P^2, -Q^2, 0,$$

enen aber der vierte als specieller Fall im ersten und
n, der fünfte als specieller Fall im zweiten und dritten,
chste endlich in allen vorhergehenden enthalten ist. Sind
S und S' zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung (I) und
$>S$, so kann nicht gleichzeitig sein:

$$\begin{aligned} \varphi - S\sigma &= P^2 + Q^2, \\ \varphi - S'\sigma &= P'^2 + Q'^2; \end{aligned}$$

ıonst wäre

$$(S'-S)\sigma = P^2 + Q^2 - P'^2 - Q'^2;$$

ıt unmöglich, da die linke Seite stets positiv ist, ausser für
, $y = 0$, $z = 0$, die rechte aber negativ wird, wenn $P = 0$,
), aber nicht $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

derselben Art lassen sich auch die übrigen Teile der Be-
ıng beweisen.

Sind nun die drei Wurzeln der Gleichung (I) ver-
ɜn, und ist

$$S < S' < S'',$$

iebt sich leicht, dass

$$\begin{aligned} \varphi - S\sigma &= P^2 + Q^2, \\ \varphi - S'\sigma &= P'^2 - Q'^2, \\ \varphi - S''\sigma &= -P''^2 - Q''^2, \end{aligned}$$

und zwar mit Ausschluss der Charaktere 4, 5 oder 6. Die F in welchen zwei oder drei Wurzeln einander gleich sind, erg sich hieraus leicht durch Grenzbetrachtungen; nämlich, wenn

$$S = S' < S'',$$

so ist

$$Q = Q' = 0,\ P = P';$$

also

$$\varphi - S\sigma = P^2;\ \varphi - S''\sigma = -P''^2 - Q''^2.$$

Wenn

$$S < S' = S'',$$

so ist

$$P' = P'' = 0;\ Q' = Q'';$$

also

$$\varphi - S\sigma = P^2 + Q^2;\ \varphi - S''\sigma = -Q''^2.$$

Wenn

$$S = S' = S'',$$

so müssen alle Ausdrücke Null sein, also

$$\varphi - S\sigma = 0.$$

4) Ist eine und nur eine der drei Wurzeln von (I) g Null, so ist φ selbst in ein Product zerfällbar, also von der drei Formen

$$P^2 + Q^2,\ P^2 - Q^2, -P^2 - Q^2.$$

Sind zwei der drei Wurzeln von (I) gleich Null, die dritte so ist φ von einer der beiden Formen P'^2 oder $-Q''^2$. die drei Wurzeln der Gleichung (I) Null wären, so wä identisch Null. Diese drei Behauptungen lassen sich auch kehren.

5) Aus diesen Betrachtungen kann man nun Schlüsse die Form der Function φ machen, die sich folgendermassen zusammenfassen lassen: Bezeichnen $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ die Werte $+1$, je nachdem die Wurzeln S, S', S'' positiv, negativ oder Null und bezeichnen X, Y, Z reelle homogene Functionen ersten G von x, y, z, so lässt sich φ stets in die Form bringen:

$$\varphi = \varepsilon X^2 + \varepsilon' Y^2 + \varepsilon'' Z^2.$$

6) Die Anwendung auf die Discussion der Fläche zw

nung mit der allgemeinsten Gleichung

$$f = \varphi+2Cx+2C'y+2C''z+D = 0,$$

ür man schreiben kann:

$$\varepsilon X^2+\varepsilon' Y^2+\varepsilon'' Z^2+2Cx+2C'y+2C''z+D = 0,$$

nun keine Schwierigkeit. Hat die Gleichung (I) kein Mal Wurzel Null, so ergeben sich die Flächen mit einem einzigen telpunkt, im Ganzen sechs Typen. Hat sie einmal die Wurzel l, so ergeben sich die Paraboloide, die elliptischen und hyperischen Cylinder und die imaginären oder zwei sich schneidende lle oder imaginäre Ebenen; im Ganzen sieben Typen. Hat zweimal die Wurzel Null, so ergeben sich die parabolischen inder oder zwei parallele Ebenen reell, zusammenfallend oder ijugirt, im Ganzen vier Typen.

7) Aufsuchung der Kreisschnitte. Wenn die Gleichung (I) ter verschiedene und von Null verschiedene Wurzeln hat, so nn φ, wie oben gezeigt ist, in folgende drei Formen gebracht rden:

$$\varphi = P^2+Q^2+S\sigma,$$
$$\varphi = P'^2-Q'^2+S'\sigma,$$
$$\varphi = P''^2-Q''^2+S''\sigma.$$

Benutzung der zweiten Form ergiebt sich demnach leicht

$$(P'-Q')(P'+Q')+S'\left(\sigma+\frac{2C}{S'}x+\frac{2C'}{S'}y+\frac{2C''}{S'}z+\frac{D}{S'}\right)=0.$$

raus folgt, dass alle Ebenen parallel den Ebenen $P'\mp Q' = 0$ Fläche in Kreisen schneiden. Ausser diesen beiden Kreisaaren, die in reellen Ebenen liegen, giebt es entsprechend der en und dritten Form noch zwei Kreisschaaren, deren Ebenen allel sind den Ebenen $P\pm iQ = 0$, und zwei solche, deren nen parallel sind den Ebenen $P''\pm iQ'' = 0$. Dieser Fall n eintreten bei den ersten der oben betrachteten Typen. Hat Gleichung (I) lauter verschiedene Wurzeln, deren eine Null so folgt, wenn etwa die mittlere Wurzel S' Null ist,

$$\varphi = P'^2-Q'^2,$$

):

$$f = (P'-Q')(P'+Q')+2Cx+2C'y+2C''z+D.$$

e Ebene parallel den Ebenen $P'\mp Q' = 0$ schneidet die Fläche

in einer reellen Geraden, welche als Kreis mit unendlich fer[ne] Mittelpunkt betrachtet werden kann. Die vier anderen Kre[is-]schaaren, welche paarweise Wurzeln S und S'' entspreche[n,] bleiben bestehen und liegen, wie oben, in imaginären Ebene[n.] Dieser Fall kann eintreten beim hyperbolischen Paraboloid, de[m] hyperbolischen Cylinder und bei zwei sich schneidenden reell[en] Ebenen. Ist nicht die mittlere Wurzel Null, sondern eine ande[re,] so ergeben sich statt zweier Kreisschaaren zwei Schaaren ima[gi-]närer Gerader, zwei andere Kreisschaaren werden reell, und [die] beiden letzten werden imaginär. Dieser Fall kann eintre[ten] beim elliptischen Paraboloid, dem elliptischen Cylinder, d[em] imaginären Cylinder und zwei sich schneidenden imaginä[ren] Ebenen. Sind zwei Wurzeln der Gleichung (I) gleich, a[ber] von Null verschieden, so ergeben sich, wie man sofort erke[nnt,] Umdrehungsflächen der sechs ersten Typen. Sind zwei Wurz[eln] gleich Null, so ergeben sich Flächen, welche man ansehen k[ann] als gewisse Grenzgestalten von Umdrehungsflächen; dieser F[all] tritt ein bei den vier letzten Typen. Zum Schluss ist der ku[rze] Nachweis zugefügt, dass ausser den durch (I) gefundenen Kre[is-]schaaren keine anderen auf der Fläche existiren. A.

Ch. Brisse. Réduction de l'équation générale des s[ur-]faces du second ordre en coordonnées obliques. Nouv. Ann. (3) I. 207-217.

In dieser Arbeit wird die Reduction der allgemeinen Gleich[ung] der Flächen zweiter Ordnung in schiefwinkligen Coordina[ten] von einem anderen Ausgangspunkte vorgenommen, als in [der] vorigen, nämlich durch Aufsuchung der Hauptrichtungen. U[nter] Zugrundelegung desselben Coordinatensystems, wie in der vori[gen] Arbeit, wird zunächst die Einführung neuer Axen (x', y', z') [be-]sprochen. Schneiden dieselben eine Kugel mit dem Radi[us 1] um den Anfangspunkt in den Punkten a, b, c; a', b', c'; a'', b'', [c'',] so wird

$$x = ax' + a'y' + a''z',$$
$$y = bx' + b'y' + b''z',$$
$$z = cx' + c'y' + c''z',$$

d die Axe der x' bildet mit den ursprünglichen Axen die inkel α, β, γ, wo

$$\cos\alpha = a \qquad + b\cos\nu + c\cos\mu,$$
$$\cos\beta = a\cos\beta + b \qquad + c\cos\lambda,$$
$$\cos\gamma = a\cos\mu + b\cos\lambda + c \qquad, \text{ etc.}$$

r Winkel, den die Richtungen a, b, c und a', b', c' mit einander len, ist bestimmt durch:

$$\cos V = (aa' + bb' + cc') + (bc' + b'c)\cos\lambda$$
$$+ (ca' + a'c)\cos\mu + (ab' + a'b)\cos\nu.$$

jenige Ebene, welche conjugirt ist zu den Geraden, deren htung bestimmt ist durch

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

parallel zu der Ebene:

$$a + B''b + B'c)x + (B''a + A'b + Bc)y + (B'a + Bb + A''c)z = 0,$$

nn die Coefficienten der Gleichung der Fläche $f = 0$ wie in r vorigen Arbeit bezeichnet werden. Sollen jene Geraden auf r conjugirten Ebene lotrecht stehen, so müssen die Coefficienten r Gleichung der Ebene den Cosinus der drei Winkel propor- nal sein, welche die Gerade mit den drei Axen bildet, also:

$$A\,a + B''b + B'\,c = S(a + b\cos\nu + c\cos\mu),$$
$$B''a + A'b + B\,c = S(a\cos\nu + b + c\cos\lambda),$$
$$B'a + B\,b + A''c = S(a\cos\mu + b\cos\lambda + c)$$

er

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (A-S)a + (B''-S\cos\nu)b + (B'-S\cos\mu)c = 0. \\ (B''-S\cos\nu)a + (A'-S)b + (B-S\cos\lambda)c = 0. \\ (B'-S\cos\mu)a + (B-S\cos\lambda)b + (A'-S)c = 0. \end{cases}$$

a nicht zugleich $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ sein kann, führt die imination von a, b, c wieder auf die Gleichung

$$\Delta(S) = 0$$

r vorigen Arbeit, woran nun die weiteren Folgerungen leicht knüpft werden. Namentlich zeigt sich, dass eine einfache urzel der Gleichung in S eine bestimmte Hauptrichtung ergiebt; ne doppelte Wurzel dagegen ergiebt unzählig viele Hauptrich- ngen, welche sämmtlich einer Ebene parallel sind. (Rotations-

flächen). Eine dreifache Wurzel giebt für die Hauptrichtung jede beliebige Richtung. (Kugeln).

Sehr einfach findet man auch den Nachweis, dass zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung in S zwei auf einander senkrechte Hauptrichtungen ergeben, wenn man die beiden Wurzeln S und S' in die drei Gleichungen (II) einsetzt, sie das eine Mal mit a', b', c', das andere Mal mit $-a$, $-b$, $-c$ multiplicirt und dann addirt. Ebenso ergiebt sich leicht der Zusammenhang zwischen den drei Hauptrichtungen und den Stellungen der Ebenen der Kreisschnitte. Nach diesen Vorbereitungen wird nun die Reduction der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in schiefwinkligen Parallelcoordinaten durchgeführt; indem die Gleichung erst auf drei beliebige conjugirte Richtungen als Axen transformirt wird, dann specieller auf die drei Hauptrichtungen.

Das Interesse, welches die Arbeit, ebenso wie die vorige, beansprucht, liegt wohl wesentlich darin, dass durch sie gezeigt ist, wie auch bei schiefwinkligen Coordinaten sich die Discussion der Flächen zweiten Grades nicht wesentlich complicirter gestaltet, als bei rechtwinkligen. A.

A. J. C. Allen. On the general equation of the second degree referred to tetrahedral coordinates. Lond., M. S. Proc. XIII. 165-172.

Die Arbeit enthält eine kurze und sehr elegante Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in tetraedrischen Coordinaten, ein Problem, mit welchem sich fast gleichzeitig auch, wie der Herr Verfasser bemerkt, Herr Hart (Lond., M. S. Proc. XII. p. 135, siehe F. d. M. XIII. 1881. 522) beschäftigt hat, indessen unter Anwendung einer anderen Methode. Sind a, b, c drei in einer Seitenfläche liegende Kanten des Coordinatentetraeders, a', b', c' die drei ihnen bezüglich gegenüberstehenden Kanten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Coordinaten eines Punktes P, nämlich die Volumina der Tetraeder mit der Spitze P und den Grundflächen $a'bc$, $ab'c$, abc', abc, jedes dividirt durch das Volumen des Coordinaten-

traeders, ebenso $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ die Coordinaten eines Punktes P_0 s., und ist $P_0 P = r$, so ist

$$r^2 = a^2(\beta-\beta_0)(\gamma_0-\gamma)+b^2(\alpha-\alpha_0)(\gamma_0-\gamma)+c^2(\alpha-\alpha_0)(\beta_0-\beta)$$
$$+c'^2(\gamma_0-\gamma)(\delta-\delta_0)+b'^2(\beta_0-\beta)(\delta-\delta_0)+a'^2(\alpha_0-\alpha)(\delta-\delta_0)$$

nd

$$(\alpha-\alpha_0)+(\beta-\beta_0)+(\gamma-\gamma_0)+(\delta-\delta_0)=0.$$

t dann

$$\frac{\alpha-\alpha_0}{\lambda}=\frac{\beta-\beta_0}{\mu}=\frac{\gamma-\gamma_0}{\nu}=\frac{\delta-\delta_0}{\varrho}=r$$

e Gleichung einer Geraden, so ist

$$\lambda+\mu+\nu+\varrho=0$$

nd

$$a^2\mu\nu+b^2\nu\lambda+c^2\lambda\mu+a'^2\lambda\varrho+b'^2\mu\varrho+c'^2\nu\varrho=1.$$

un sei

$$u_{1,1}\alpha^2+u_{2,2}\beta^2+u_{3,3}\gamma^2+u_{4,4}\delta^2+2u_{1,2}\alpha\beta+\cdots=\varphi(\alpha\beta\gamma\delta)=0$$

ie Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung, $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$ ihr Mittelunkt, r ein Halbmesser, welcher zur Richtung $\lambda\mu\nu\varrho$ gehört, ann ist

$$r^2=-\frac{\varphi(\alpha_0\beta_0\gamma_0\delta_0)}{\varphi(\lambda,\mu,\nu,\varrho)}.$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_0}=\frac{\partial\varphi}{\partial\delta_0},$$

nd die Bedingung, dass r^2 ein Maximum oder Minimum werde, kommt darauf hinaus, dass $\varphi(\lambda\mu\nu\varrho)$ ein Minimum, resp. Maximum werde. Hieraus leitet der Verfasser die Gleichung ab:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2}+\frac{c^2\varphi}{2}, & u_{1,3}+\frac{b^2\varphi}{2}, & u_{1,4}+\frac{a'^2\varphi}{2}, & 1 \\ u_{1,2}+\frac{c^2\varphi}{2}, & u_{2,2} & u_{2,3}+\frac{a^2\varphi}{2}, & u_{2,4}+\frac{b'^2\varphi}{2}, & 1 \\ u_{1,3}+\frac{b^2\varphi}{2}, & u_{2,3}+\frac{a^2\varphi}{2}, & u_{3,3} & u_{3,4}+\frac{c'^2\varphi}{2}, & 1 \\ u_{1,4}+\frac{a'^2\varphi}{2}, & u_{2,4}+\frac{b'^2\varphi}{2}, & u_{3,4}+\frac{c'^2\varphi}{2}, & u_{4,4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Dies ist eine cubische Gleichung für $\varphi=\varphi(\lambda,\mu,\nu,\varrho)$; die entsprechenden Werte von r sind dann die Quadrate der Halbaxen,

deren Richtungen alsdann auch leicht bestimmt werden können. In ähnlicher Weise werden die Axen eines Schnittes mit einer Durchmesserebene bestimmt. Es wird φ zu einem Maximum oder Minimum gemacht, indem zu den übrigen Bedingungen tritt:

$$l\lambda + m\mu + n\nu + p\varrho = 0,$$

wobei

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0$$

die Gleichung der Durchmesserebene ist.

Hieraus wird in einfacher Weise zur Bestimmung von φ die quadratische Gleichung abgeleitet:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} & , u_{1,2} + \frac{c^2\varphi}{2}, & u_{1,3} + \frac{b^2\varphi}{2}, & u_{1,4} + \frac{a'^2\varphi}{2}, & 1, & l \\ u_{1,2} + \frac{c^2\varphi}{2}, & u_{2,2} & , u_{2,3} + \frac{a^2\varphi}{2}, & u_{2,4} + \frac{b'^2\varphi}{2}, & 1, & m \\ u_{1,3} + \frac{b^2\varphi}{2}, & u_{2,3} + \frac{a^2\varphi}{a}, & u_{3,3} + & , u_{3,4} + \frac{c'^2\varphi}{2}, & 1, & n \\ u_{1,4} + \frac{a'^2\varphi}{2}, & u_{2,4} + \frac{b'^2\varphi}{2}, & u_{3,4} + \frac{c'^2\varphi}{2}, & u_{4,4} & , 1, & p \\ 1 & , 1 & , 1 & , 1 & , 0, & 0 \\ l & , m & , n & , p & , 0, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine andere Aufgabe ist die Aufsuchung des Kegels, welcher die Fläche längs eines Kegelschnittes berührt, dessen Ebene die Gleichung hat

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta = 0.$$

Die Gleichung desselben ist

$$\varphi(\alpha\beta\gamma\delta) + k(l\alpha + m\beta + n\gamma + p\delta)^2 = 0,$$

wo k bestimmt ist durch die Gleichung ersten Grades:

$$\begin{vmatrix} u_{1,1} + kl^2, & u_{1,2} + klm, & u_{1,3} + kln, & u_{1,4} + klp, \\ u_{1,2} + klm, & u_{2,2} + km^2, & u_{2,3} + kmn, & u_{2,4} + kmp \\ u_{1,3} + kln, & u_{2,3} + kmn, & u_{3,3} + kn^2, & u_{3,4} + knp \\ u_{1,4} + klp, & u_{2,4} + kmp, & u_{3,4} + knp, & u_{4,4} + kp^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Es werden ausserdem noch manche Aufgaben gelöst, die hier nicht besprochen werden können. Nur das letzte Resultat möge noch Platz finden. Ist die Gleichung eines Ellipsoides

$$u_{1,1}\alpha^2 + u_{2,2}\beta^2 + u_{3,3}\gamma^2 + u_{4,4}\delta^2 = 0,$$

so das Coordinatentetraeder demselben conjugirt, so ist das
nen des Ellipsoids

$$8\pi V\cdot\frac{\sqrt{-\alpha\beta\gamma\delta}}{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2},$$

:, β, γ, δ, die Coordinaten des Centrums sind, also

$$u_{1,1}\alpha = u_{2,2}\beta = u_{3,3}\gamma = u_{4,4}\delta,$$

V das Tetraedervolumen bedeutet.
Demnach ist der Ort der Centra aller Ellipsoide, welche
Coordinatentetraeder conjugirt sind und constantes Volumen
n, bestimmt durch eine Gleichung von der Form

$$\alpha\beta\gamma\delta = \lambda(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^4,$$

l eine Constante bedeutet. A.

'. Walker, Ch. Ladd. Solutions of a question (6601).
3. Times XXXVI. 25-26.

Eine Fläche zweiten Grades $u = 0$ ist ihre eigene reciproke
re in Bezug auf eine Fläche, deren Gleichung ist

$$2uu_0 = \left(x_0\frac{du}{dx}+y_0\frac{du}{dy}+z_0\frac{du}{dz}+w_0\frac{du}{dw}\right)^2,$$

eine homogene Function von x,y,z,w und u_0 dieselbe Func-
von x_0, y_0, z_0, w_0 ist. O.

Iannheim. Sur les surfaces homofocales du second
·dre. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 322-331.

Ist ein Ellipsoid O gegeben, und legt man durch einen ge-
nen Punkt des Raumes die drei zu dem Ellipsoid confocalen
ıen zweiter Ordnung, so existiren zwischen O und jenen
Flächen gewisse geometrische Beziehungen, die in der vor-
nden Arbeit entwickelt werden. Dieselben führen zur Be-
nung der Hauptkrümmungsradien der confocalen Flächen.
Schluss der Arbeit bildet ein vom Verfasser gefundener
der sich auf einen einem Ellipsoid umschriebenen

Winkel von gegebener Grösse bezieht (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 627). Cly. (Wn.)

A. Mannheim. Sur les centres de courbure principaux des surfaces homofocales du second ordre. Lond., R. S. Proc. XXXIII. 421-425.

Diese Fortsetzung der obigen Arbeit enthält geometrische Beziehungen zwischen den sechs Hauptkrümmungsmittelpunkten dreier confocaler Flächen, die durch einen gegebenen Punkt gehen. Cly. (Wn.)

O. Staude. Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides. Klein Ann. XX. 147-185.

O. Staude. Ueber geodätische Bogenstücke von algebraischer Längendifferenz auf dem Ellipsoid. Klein Ann. XX. 185-186.

Der Verfasser beginnt mit einer Aufzählung der zahlreichen Untersuchungen, welche die Uebertragung von Focaleigenschaften der Kegelschnitte auf Flächen zweiten Grades zum Ziel haben, und welche sich an die Namen Jacobi, Joachimsthal, Darboux, Chasles, Plücker, MacCullagh, Amiot knüpfen. Diesen Untersuchungen, deren analytische Hülfsmittel wesentlich algebraischer Natur sind, stehen Untersuchungen gegenüber, welche an Ellipsen-Constructionen wie die Graves'sche aus einer confocalen Ellipse mittels eines geschlossenen Fadens anknüpfen, und welche ebenso wie diese Construction, die ja ihrer Natur nach mit der Längenbestimmung des Ellipsenbogens operirt, transcendenten Charakter haben. Bekannt ist die Chasles'sche Construction der Krümmungscurve auf dem Ellipsoid aus einer andern Krümmungscurve derselben Art durch einen geschlossenen Faden, sowie die ebenfalls von Chasles herrührende Construction der Krümmungscurve auf einer von zwei gegebenen confocalen Flächen zweiten Grades mittels eines Fadens, dessen Enden auf der andern befestigt sind. An diese transcendenten Constructionen schliesst

ich auch die in der vorliegenden Abhandlung untersuchte Fadenonstruction des Ellipsoides aus zwei gegebenen confocalen 'lächen an. Die bei der analytischen Behandlung auftretenden 'ranscendenten sind hyperelliptische Integrale vom Geschlecht = 2. Die ersten Paragraphen besprechen die zur Ableitung der esuchten Construction nötigen Hülfsmittel, namentlich die ellipischen Coordinaten, Sätze über Krümmungscurven und geodäische Linien auf den Flächen zweiten Grades, sowie über die emeinsamen Tangenten zweier confocaler Flächen. Diese Hülfsnittel führen den Verfasser dann zu folgender Construction: Ian schlinge einen geschlossenen Faden um die Combination weier confocaler Flächen, eines Ellipsoids und eines einschaligen Hyperboloids, und spanne den Faden durch einen beweglichen Punkt P derart, dass er beständig jedes der beiden durch das Ellipsoid getrennten Stücke des Hyperboloids berührt. Dann beschreibt P ein den gegebenen Flächen confocales Ellipsoid und die Halbirungslinie des Winkels der bei P zusammenstossenden Fadenstücke ist die Normale des Ellipsoids. Hieran schliesst der Verfasser die Angabe der Relation, die zwischen der Länge des Fadens und dem Parameter des construirten Ellipsoids besteht. Aus diesem Resultate wird dann die Chasles'sche Fadenconstruction der Krümmungscurve auf einer von zwei gegebenen confocalen Flächen, sowie die oben erwähnte Graves'sche Construction abgeleitet. Dann werden noch die Fadenconstruction des Ellipsoids aus einem confocalen Ellipsoid und seiner Focalhyperbel und aus einem confocalen einschaligen Hyperboloid und seiner Focalellipse besonders und ausführlich behandelt, weil diese Specialfälle der allgemeinen Construction noch besondere Eigentümlichkeiten bieten. Den Schluss der ersten Abhandlung bildet eine Uebersicht über diejenigen Focaleigenschaften der drei centrischen Flächen zweiten Grades, auf welche die Fadenconstruction des Ellipsoids aus seinen Focalcurven unmittelbar überleitet.

In der zweiten Abhandlung wird aus der allgemeinen Fadenconstruction des Ellipsoids ein Satz abgeleitet, der sich auf Längendifferenzen geodätischer Linienstücke auf dem Ellipsoid be-

zieht und eine Verallgemeinerung des folgenden bekannten Satzes ist. Betrachtet man zwei confocale Ellipsen in der Ebene, und zieht von zwei beliebigen Punkten der äusseren Ellipse die Tangentenpaare an die innere, so ist die Differenz der von diesen Tangentenpaaren überspannten Bögen der inneren Ellipse algebraisch ausdrückbar, nämlich gleich dem Ueberschuss der Summe der Tangentenlängen des einen Paares über die Summe der Tangentenlängen des andern Paares. Scht.

A. McMurchy, Ch. Ladd, J. Hammond, Matz. Solutions of questions (6537, 5099). Ed. Times XXXVII. 53-54, 122-123.

Bezeichnet r den Abstand eines Ellipsoidpunktes vom Mittelpunkte, p das vom Anfangspunkt auf die Tangentialebene gefällte Lot, n die Länge des Stücks der Normale, welches innerhalb des Ellipsoides liegt, φ den Winkel zwischen den Tangentialebenen in den Endpunkten jenes Normalenstücks, so ist

$$np = \frac{2a^2b^2c^2}{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-p^2(a^2+b^2+c^2-r^2)},$$

$$2a^2b^2c^2\operatorname{tg}^2\varphi = n^2p^3(2p-n)-(2a^2-np)(2b^2-np)(2c^2-np).$$

Wn.

Moret-Blanc. Solution d'une question (1369). Nouv. Ann. (3) I. 422-423.

Durch den Mittelpunkt eines Ellipsoides ziehe man rechtwinklige Ebenen A, B, C. Sind dann α, β, γ die Winkel, welche diese Ebenen mit einer festen Diametralebene P bilden, a und b die Axen des Schnittes der Oberfläche mit der Ebene P, a_1, b_1, c_1 endlich die halben Durchmesser dieses Schnittes in den Geraden (A, P), (B, P), (C, P), so ist

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2}+\frac{\sin^2\beta}{b_1^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c_1^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$

O.

'FEIFFER. Formeln für den Inhalt der Kegelfläche.
r. Berlin.

Der Herr Verfasser specialisirt zuerst die allgemeine Flächen-
el für die Kegelflächen überhaupt, dann für diejenigen mit
ischer Basis, wenn der Fusspunkt der Höhe des Kegels zu-
hst noch ein beliebiger Punkt in der Basisebene ist, und dann
er, wenn dieser Höhenfusspunkt in einer der beiden Axen
Basis gelegen ist. Dies führt auf ein Integral von der
n:

$$\int \sqrt{A + B\cos\varphi + C\cos^2\varphi} \, . \, d\varphi,$$

hes mit aller erforderlichen Sorgfalt, wobei die Lehre von
elliptischen Integralen und Functionen volle Anwendung
t, ausgewertet wird. Auch wird gelegentlich auf den Kegel
Kreisbasis und auf anderweitige Berechnungsweisen hinge-
st. Mz.

---

tere Lehrsätze und Lösungen von Aufgaben über
lächen zweiter Ordnung von W. J. C. SHARP, M. S.
EYER, W. H. BLYTHE, CURTIS, J. HAMMOND finden
ch Ed. Times XXXVI. 124; XXXVII. 86-87, 108, 124.
Wn.

'. BRAUNMÜHL. Geodätische Linien und ihre Enve-
ppen auf dreiaxigen Flächen zweiten Grades.
lein Ann. XX. 557-587.

Der Herr Verfasser leitet zunächst die Weierstrass'schen
eln für eine geodätische Linie ab und bringt dieselben,
entlich auch die dabei auftretenden Constanten, in eine für
Berechnung möglichst bequeme Form. Alsdann teilt er die
ltate einer solchen numerischen Berechnung mit, um ein
lich durchgeführtes Zahlenbeispiel für die Rechnung mit
relliptischen Functionen zu haben. Daran schliessen sich
eln, welche die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes
geodätischen Linie, welche von einem Nabelpunkte aus-

gehen, durch einen Parameter darstellen. Der folgende T
Arbeit schliesst sich eng an eine frühere Arbeit des Verf
(Clebsch Ann. XIV. 557, s. F. d. M. XI. 1879. 5:9) und a
Arbeit des Herrn von Mangoldt (Kronecker J. XCI. 23-54,
F. d. M. XIII. 1881. 578) an. Um festzustellen, bis zu we
Punkte hin eine geodätische Linie, die von einem geg
Punkte ausgeht, die Eigenschaft hat, wirklich Kürzeste zu
werden die Enveloppen der geodätischen Linie für das dre
Ellipsoid untersucht, ihre Integralgleichungen angegebe
Grenzen bestimmt, zwischen denen der Berührungspunkt
geodätischen Linie mit ihrer Enveloppe liegt. Zum Zweck
Untersuchungen wird der Begriff der halben Perioden eing
und die Gestalt der Enveloppen discutirt. Nach einer Be
tung der Hauptschnitte wird die analytische Darstellung
Enveloppen durch hyperelliptische Functionen durchgeführt.
letzten Teile der Arbeit beschäftigen sich im Wesentliche
demselben Gegenstand, den die citirte Arbeit des Herrn
Mangoldt behandelt. Es handelt sich um die Untersuchun
dreiaxigen zweischaligen Hyperboloids und namentlich der G
curve, welche die Punkte erster und zweiter Art nach der D
tion des Herrn von Mangoldt trennt. (Punkte erster Art
solche, für welche die von ihnen ausgehenden geodätischen L
nie aufhören, Kürzeste zu sein.) Der Herr Verfasser ve
ständigt die einschlägigen Betrachtungen in mehrfacher Bezie
besonders dadurch, dass er jene Grenzcurve wirklich analy
darstellt. Dies ist der in der Einleitung vom Herrn Verf
selbst im Wesentlichen dargestellte Gedankengang der A
Die geometrischen Resultate sind durch mehrere Figuren
läutert.

Eine Mitteilung des Formel-Apparates ist in diesem Ref
untunlich. Es genüge die Bemerkung, dass die Rechnung
Ausgangspunkt von Krümmungslinienparametern in einer
Liouville gewählten Form nimmt, und dass unter Benutzun
Methode von Weierstrass zur Anwendung des Jacobi'schen
kehr-Problems auf die Summe der beiden Abel'schen Inte
$(p = 2)$ und der Rosenhain'schen Formeln die Darstellung

'unctionen erreicht wird. Die Darstellung ist in hohem Grade ch Klarheit und Eleganz ausgezeichnet. A.

TAGLINI e CREMONA. Sulla memoria del prof. R. de Paolis: „Sopra alcune principali forme invariative della superficie di 3° ordine". Rom., Acc. L. (3) VI. 12.

Eine ganz kurze Inhaltsangabe, an deren Schluss gesagt ist, die Arbeit viele interessante neue Resultate enthalte, sowohl geometrischer als in algebraischer Beziehung, und deshalb der ademie zur Einreihung in die Atti dell' Accademia empfohlen rd. A.

D. Andere specielle Raumgebilde.

BRILL. Nachtrag zum Catalog mathematischer Modelle. Darmstadt. L. Brill.

In diesem Nachtrag wird Mitteilung von neueren Modellen macht, welche in dem Institut des Herrn L. Brill verfertigt käuflich zu beziehen sind. Es sind dies

1) Elf Drahtgestelle zur Darstellung von Minimalflächen tels Seifenlösung.

2) Zwei Modelle für Fadenconstructionen des Ellipsoids (aus alcurven und confocalen Flächen) von Herrn STAUDE.

3) Dreiaxiges Ellipsoid aus Gyps, längs eines Kreisschnittes legbar.

4) Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doperaden von Herrn FINSTERWALDER.

5) Einige Dupin'sche Cycliden; von demselben.

6) Flächenstreifen mit constanter positiver Krümmung, biegaus dünnem Messingblech.

7) Zwei die Wellenfläche betreffende Modelle.

8) Catenoid aus biegsamem Messingblech, in eine Schrau
fläche zu biegen. A.

E. Hunyady. Ueber den geometrischen Ort der Keg
spitzen der durch sechs Punkte gehenden Kegelfläch
zweiten Grades. Kronecker J. XCII. 304-306.

Die Gleichung des gesuchten Ortes ist von Cayley (C
1861. I. p. 1216) folgendermassen aufgestellt:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} x_1^2, & y_1^2, & z_1^2, & p_1^2, & x_1y_1, & x_1z_1, & x_1p_1, & y_1z_1, & y_1p_1, & z_1p_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_6^2, & y_6^2, & z_6^2, & p_6^2, & x_6y_6, & x_6z_6, & x_6p_6, & y_6z_6, & y_6p_6, & z_6p_6 \\ 2x, & 0, & 0, & 0, & y, & z, & p, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 2y, & 0, & 0, & x, & 0, & 0, & z, & p, & 0 \\ 0, & 0, & 2z, & 0, & 0, & x, & 0, & y, & 0, & p \\ 0, & 0, & 0, & 2p, & 0, & 0, & x, & 0, & y, & z \end{vmatrix} =$$

wo x, y, z, p die Coordinaten der Kegelspitzen, $x_1, y_1, z_1, p_1, \ldots$
x_6, y_6, z_6, p_6, die der sechs gegebenen Punkte bezeichnen.
Gleichung desselben Ortes hat Hierholzer (Clebsch Ann. II.
s. F. d. M. II. 1870. 570) in einer anderen Form gegeben. In
Note ist der algebraische Zusammenhang beider Formen au
deckt. Der sich anschliessende Zusatz enthält weitere, dass
Problem betreffende Ausführungen und Vereinfachungen ein
Rechnungen, welche der Herr Verfasser früher (Borch. J. LXXX
p. 76, s. F. d. M. IX. 1877. 494) über diesen Gegenstand
öffentlicht hat. A.

J. Vályi. Die Flächen, deren sämmtliche Norm
eine Kugelfläche berühren. Hoppe Arch. LXVIII. 217-2

Dieser specielle Fall des allgemeinen Problems, eine Fl
zu suchen, welche eine gegebene Fläche zur Mittelpunktsf
hat, ist bereits mehrfach gelöst, wie auch der Herr Verfasser

ht. U. A. findet sich eine Lösung in Monge's „Application nalyse à la géométrie", eine andere hat Herr Enneper (Gött. Nachr. 72, s. F. d. M. IV. 373) veröffentlicht. Der Verfasser benutzt e von Cauchy herrührende Methode zur Integration der parlen Differentialgleichung, auf welche die Lösung des Problems auskommt. A.

Craig. The counter-pedal surface of the ellipsoid. Sylv., Am. J. IV. 358-379.

Craig. Note on the counter-pedal surface of an llipsoid. Sylv., Am J. V. 76-79.

Unter der Contra-Pedale (counter-pedal) einer Fläche in Beauf einen Pol versteht der Herr Verfasser den Ort des Schnittktes einer veränderlichen Normale der Fläche mit einer Ebene ch den Pol, welcher der Tangentialebene parallel, also zur male selbst lotrecht ist. Die Contra-Pedale des Ellipsoids den Mittelpunkt als Pol wird untersucht, und zwar wird zust die Coordinaten-Gleichung der Fläche ohne Parameter aufellt, was eine umständliche Elimination erfordert. Die Durchung dieser Elimination, sowie einige andere Resultate verkt der Verfasser, wie er selbst hervorhebt, Herrn Cayley. Gleichung der bezeichneten Fläche ist vom zehnten Grade. selbe wird benutzt, um einige Gestaltsverhältnisse der Fläche untersuchen. Im weiteren Fortgang der Arbeit werden die rdinaten eines beliebigen Punktes des gegebenen Ellipsoids, ie diejenigen des entsprechenden Punktes der Contra-Pedale ch die Krümmungsparameter des Ellipsoids dargestellt und Fundamentalgrössen erster Ordnung der zu untersuchenden che in Bezug auf diese Parameter aufgestellt, wobei sich noch ncherlei Eigenschaften der Fläche ergeben.

In der Note weist der Verfasser auf folgende Beziehung hin: struirt man zu einem Punkte der Hauptfläche in Bezug auf Pol den entsprechenden Punkt der Fusspunktfläche und beiden Flächen in diesen Punkten die Normalen, so schneiden dieselben, und zwar in dem entsprechenden Punkte der

Contra-Pedale. Am Schlusse der Note macht der Herr Verfasser noch auf eine Klasse von Flächen aufmerksam, die er „Contra-Centrenfläche" nennt und folgendermassen definirt: Zieht man von einem festen Punkte aus Strecken parallel den Normalen und gleich den Hauptkrümmungsradien-Strecken, so liegen deren Endpunkte auf der Contra-Centrenfläche der gegebenen Fläche. Indessen ist ausser der Aufstellung dieser Definition nichts über diese Flächen mitgeteilt. A.

TH. CRAIG. On the parallel surface to the ellipsoid. Kronecker J. XCIII. 251-270.

Die Arbeit enthält nach einigen historischen Notizen über die Vorarbeiten von Cayley, Roberts, Clebsch und Salmon eine Discussion der Parallelflächen des Ellipsoids. Die Fläche ist vom zwölften Grade und hat eine Cuspidallinie vierundzwanzigsten Grades. Nachdem die Coordinatengleichung aufgestellt ist, wird die Fläche in Krümmungsparametern dargestellt, wobei sich, wie leicht zu erkennen ist, die Coordinaten wie folgt, darstellen:

$$x = \sqrt{\frac{a(a+u)+v}{-\beta\gamma}}\left(1+\frac{k}{a}\sqrt{\frac{abc}{uv}}\right) \text{ etc.,}$$

wo a, b, c die Halbaxen des Ellipsoides bedeuten, und $\alpha = b-c$, $\beta = c-a$, $\gamma = a-b$ sind. Die weitere Discussion erstreckt sich auf die Untersuchung der Hauptschnitte, auf die drei Nodalkegelschnitte, deren einer nur reell ist. Auch der unendlich entfernte Kegelschnitt des Ellipsoids, der unendlich entfernte Kreis und sechzehn seiner Tangenten gehören zur Nodalcurve. A.

O. BÖKLEN. Ueber die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle. Schlömilch Z. XXVII. 160-175.

Die Arbeit behandelt den merkwürdigen Zusammenhang welcher zwischen der Fresnel'schen Wellenfläche und den Trägheitsmomenten eines starren Massensystems besteht. Ist m die Masse des Systems und mk sein Trägheitsmoment in Bezug au

eine Axe, so wird $\sqrt{k}$ der sogenannte Trägheitsradius für
)e Axe genannt, weil die ganze Masse, in einen Punkt ver-
die Entfernung $\sqrt{k}$ von der Axe haben müsste, um das-
Trägheitsmoment zu ergeben. Wählt man nun als Coor-
nanfang den Schwerpunkt O, als Axen die Hauptträgheits-
für O, und sind $a > b > c$ die Quadrate der entsprechenden
trägheitsradien, ist ferner x, y, z ein beliebiger Punkt M
$)M = \sqrt{r}$, also $x^2 + y^2 + z^2 = r$, dann sind die Quadrate
rei Hauptträgheitsradien für M folgendermassen bestimmt:
)erechne λ aus der cubischen Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{x^2}{a^2-\lambda} + \frac{y^2}{b^2-\lambda} + \frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1; \quad k = \lambda + r.$$

rste der beiden Gleichungen giebt für variirendes λ ein
n confocaler Flächen zweiter Ordnung; jeder der drei
, die dem gegebenen Punkt entsprechen, bestimmt eine der
lurch M gehenden Flächen dieses Systems, und die Nor-
dieser Flächen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind die Hauptträgheitsaxen für
: entsprechenden Hauptträgheitsradien sind

$$k_1 = r + \lambda_1, \; k_2 = r + \lambda_2, \; k_3 = r + \lambda_3.$$

ıbische Gleichung, welche direct die drei Werte k liefert,
o

$$\text{(II)} \qquad \frac{x^2}{r-(k-a)} + \frac{y^2}{r-(k-b)} + \frac{z^2}{r-(k-c)} = 1.$$

man hierin k als gegeben, x, y, z, $r = x^2 + y^2 + z^2$ als varia-
ı, so stellt die Gleichung eine Fläche dar. Diese Fläche
man aber aus dem Ellipsoid

$$\text{(III)} \qquad \frac{x^2}{k-a} + \frac{y^2}{k-b} + \frac{z^2}{k-c} = 1,$$

man auf jedem Centralschnitte im Mittelpunkte Lote er-
: gleich den Halbaxen des betreffenden Schnittes. Der Ort
ndpunkte dieser Lote ist die Fläche (II), d. h.: der Ort der
e M, für welche das Quadrat eines Hauptträgheitsradius
k ist, ist die aus dem Ellipsoid (III) in der beschriebenen
abgeleitete Fresnel'sche Wellenfläche. Ist in (II) r con-
so stellt die Gleichung die eine der Flächen des confo-
Systems (I) dar, woraus folgt, dass alle Kugeln um O die

Wellenfläche in sphärischen Kegelschnitten schneiden, deren jeder zugleich auf einer Fläche des confocalen Systems (I) liegt. Es wird weiter gefolgert, dass eine Fläche dieses Systems, welche den einen Mantel der Wellenfläche in einem solchen sphärischen Kegelschnitt schneidet, den andern in einer von ihren Krümmungslinien trifft. (Dies Resultat wäre übrigens unvereinbar mit einer Bemerkung von Herrn Darboux (C. R. XCVII. 1133; Ref. im nächsten Bande), wonach die Krümmungslinien der Wellenfläche nicht algebraisch sein können. A.). Im Anschluss an diese Betrachtungen entwickelt der Herr Verfasser noch eine Reihe interessanter geometrischer Beziehungen der Wellenfläche. Diese Betrachtungen bilden den ersten Paragraphen der Arbeit. In drei darauf folgenden Paragraphen werden andere Eigenschaften der Wellenfläche untersucht, welche hier nur kurz angedeutet werden können. In § 2 wird der Complex der Geraden, durch welche zwei zu einander rechtwinklige Tangentialebenen eines Ellipsoids hindurch gehen, in seiner Beziehung zur Wellenfläche betrachtet, wie solche in ähnlicher Weise bereits von Mannheim und Painvin untersucht sind, deren Resultate der Verfasser durch anderweitige Betrachtungen wieder gewinnt und erweitert. Im § 3 wird u. A. bewiesen, dass bei den Ellipsoiden von gemeinsamem Centralschnitt, für welche die Summe der Quadrate der grossen und einer der beiden anderen Axen constant ist, die Endpunkte des dem Centralschnitte conjugirten Durchmessers eine Wellenfläche beschreiben. Der vierte Paragraph enthält eine kurze Bemerkung über die Focaleigenschaften der auf der Wellenfläche befindlichen sphärischen Kegelschnitte. In einer Schlussbemerkung wird auf die Bedeutung der Wellenfläche in optischer, mechanischer und rein geometrischer Beziehung resümirend hingewiesen.

A.

ABONNÉ. Généralisation d'une propriété de la surface de l'onde. Nouv. Ann. (3) I. 29-32.

Es sei $m(x, y, z)$ ein Punkt eines Ellipsoids und ω die Ebene welche durch die Normale in m und das Centrum o des Ellipsoids

immt ist. Führt man in dieser Ebene senkrecht zu *om* eine ade $o\mu = om$, so ist der Ort der Punkte $\mu(\alpha,\beta,\gamma)$ eine Wellen- ıe, und die Normalen in den entsprechenden Punkten *m* und egen in derselben Ebene. Diese letztere Eigentümlichkeit et, wie in vorliegender Arbeit gezeigt wird, auch noch statt, ın

$$om = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}) = f(u)$$

etzt wird; es liegen also auch in diesem Falle die Normalen correspondirenden Punkten *m* und μ in derselben Ebene. den Fall der Wellenfläche schneiden sich die Normalen h MacCullagh, welcher obige Relationen zuerst dargelegt , unter rechtem Winkel. Dies trifft in dem generellen Falle ıt mehr zu, vielmehr nur unter der besonderen Annahme, s $f(u) = k \cdot u$ gesetzt wird, wo *k* irgend eine Constante be- tet. Schn.

Picard. Sur un théorème relatif aux surfaces pour esquelles les coordonnées d'un point quelconque 'expriment par des fonctions abéliennes de deux ıaramètres. Klein Ann. XIX. 569-578.

Der Herr Verfasser betrachtet Flächen, welche keine andere ;ularität haben, als Doppelcurven (Selbstschnitte), bei denen · die beiden Tangentialebenen in jedem Punkt der Doppel- ·e verschieden sind. Er versteht nach Clebsch unter dem ;hlecht einer Fläche n^{ter} Ordnung die Zahl der Coefficienten, ·he in einer durch die Doppelcurve gelegten Fläche von der nung $(n-4)$ willkürlich bleiben. Wenn sich nun die Coordina- einer solchen Fläche durch Abel'sche Functionen zweier ımeter α und β ausdrücken lassen, so kann das Geschlecht Fläche die Einheit nicht überschreiten. Der Beweis dieses es bildet den Inhalt der Arbeit; demselben ist ein kurzer eis des analogen Satzes für ebene Curven vorausgestellt. er Satz lautet: „Wenn sich die Coordinaten eines beliebigen ktes einer irreductiblen ebenen Curve m^{ten} Grades $F(x, y) = 0$

durch doppelt-periodische Functionen einer Variablen z drücken lassen, so kann das Geschlecht der Curve die Ei nicht übersteigen." Der Gedankengang bei diesem Beweis folgender. Es wird vorausgesetzt, dass die Gleichung $F(x,y)$ in Bezug auf y vom m^{ten} Grade sei, und dass $\frac{y}{x}$ für x g unendlich m endliche und verschiedene Werte habe.

Ist dann

$$\int \frac{f(x,y)\,dx}{F'_y(x,y)}$$

ein Abel'sches Integral erster Gattung in Bezug auf die Gleic $F(x,y)=0$, so muss der Ausdruck

$$\frac{f(x,y)\,\frac{dx}{dz}}{F'_y(x,y)}$$

constant sein. Denn zunächst folgt aus der gemachten Vo setzung, dass er doppelt-periodisch ist; dann aber lässt weiter beweisen, dass er keine Pole hat. Wäre nun das schlecht der Curve höher als Eins, so würde mindestens ein zweites Integral erster Gattung existiren, etwa

$$\int \frac{f_1(x,y)\,dx}{F'_y(x,y)};$$

also wäre auch

$$\frac{f_1(x,y)\,\frac{dx}{dz}}{F'_y(x,y)}$$

constant, und deshalb auch der Quotient

$$\frac{f_1(x,y)}{f(x,y)}$$

constant. Die Punkte der Curve würden also einer Gleich niederen Grades genügen. Dies ist gegen die Voraussetz Einen ganz analogen Gedankengang verfolgt der Verfasser dem Beweise des zuerst ausgesprochenen Satzes, und zwar er hierbei von homogenen Coordinaten aus. A.

J. Hammond, G. Eastwood. Solutions of a question (5244). Ed. Times XXXVII. 74-76.

Bestimmung der sechzehn singulären Punkte, sowie der sechzehn singulären Tangenten einer speciellen Fläche vierter Ordnung. Wn.

W. Spottiswoode. On the polar planes of four quadrics. Lond., M. S. Proc. XIII. 28-32.

Der Ort der Punkte *P*, dessen Polarebenen sich in Bezug auf vier Flächen dritten Grades in einem Punkte *P'* schneiden, ist bekanntlich die Jacobi'sche Fläche vierter Ordnung des Systems. Es wird die Frage erörtert, unter welchen Umständen *P'* unbestimmt wird. Wäre indessen der Verfasser davon ausgegangen, dass auch *P'* auf der Jacobi'schen Fläche liegt, so würde sich hieraus in Verbindung mit den Elementen der Polarentheorie grösstenteils unmittelbar der Inhalt dieser Note ergeben haben. V.

L. de la Rive. Étude sur la projection des angles. Gen., Mém. XXVIII. No. 2.

Die Projection eines Winkels auf eine beliebige Ebene kann folgendermassen betrachtet werden. Denkt man sich um den Scheitel *O* des Winkels *LOV* eine Kugel mit dem Radius 1 geschlagen und vom Scheitel *O* aus das Lot auf die Bildebene gefällt, welches die Kugel in *M* trifft, so ist im sphärischen Dreieck *LMV* der Winkel *M* die Projection des Winkels *LOV* oder der Seite *LV*. Die Beziehung ist also wesentlich die der Seite eines sphärischen Dreiecks zu dem ihr gegenüber liegenden Winkel. Die Bildebene ist die Tangentialebene im Scheitel des Winkels oder eine ihm parallele Ebene.

Die Hauptaufgabe, mit welcher sich der Herr Verfasser beschäftigt, ist die Aufsuchung des geometrischen Ortes des Punktes auf der Kugel, auf dessen Tangentialebene sich ein gegebener Winkel, dessen Scheitel im Kugelcentrum liegt, mit constanter

sen von ihm selbst vorgenommenen Arbeiten stehen, und zeigt nentlich, dass für die sämmtlichen Curven das aus den vier ppeltangenten gebildete Vierseit in ein festes vollständiges reck auf bestimmte Art eingeschrieben ist. Am einfachsten iebt sich der geometrische Zusammenhang aus folgender Beachtung: Projicirt man die sämmtlichen ebenen Schnittcurven ler Steiner'schen Fläche aus dem dreifachen Punkte A auf le Ebene E, so erhält man Curven C_4^6 mit drei Doppelpunkten f den drei Doppelgeraden und mit vier Doppeltangenten, welche s Projectionen der Schnittlinien von E mit den vier doppelt rührenden Ebenen (conische Tangentenebenen) sind.

A.

I. Masoni. Sopra alcune curve del quarto ordine dotate di punti di ondulazione. Nap., Rend. XXI. 45-69.

Das Auftreten von Undulationspunkten, d. i. Punkten einer urve, welche mit ihrer Tangente einen vierpunktigen Contact ritter Ordnung haben, ist eine Singularität, da der betreffende unkt ausser der Curvengleichung zwei Bedingungen erfüllen uss. Zum Zwecke der Untersuchung der Curven vierter Ordung mit Undulationspunkten werden zunächst einige allgeeinere Sätze entwickelt, welche zum Teil von Cayley, Kantor nd Salmon ausgesprochen sind. Cayley hat den Satz aufgestellt, ass eine Curve in einem Undulationspunkte von ihrer Hesse'hen Curve berührt wird. Der Herr Verfasser beweist ferner n Satz, dass die erste Polare einer Curve vierter Ordnung it einem Undulationspunkt O für O als Pol aufgelöst ist in die ndulationstangente und einen Kegelschnitt, und dass dieser Satz ch umkehren lässt. Dieser Kegelschnitt wird der harmonische egelschnitt des Punktes O genannt. Er ist nicht erste Polare on O; dieselbe ist vielmehr aufgelöst in die Tangente und die olare jenes harmonischen Kegelschnittes.

Es wird weiter gefolgert, dass durch einen Undulationspunkt olgende Curven gehen:

1) Der Ort eines Punktes, dessen polare Gerade in Bezug

auf die Hesse'sche Curve seinen Polarkegelschnitt in Bezug auf die Fundamentalcurve berührt.

2) Der Ort eines Punktes, dessen polare Gerade in Bezug auf die Fundamentalcurve seinen Polarkegelschnitt in Bezug auf die Hesse'sche Curve berührt.

Endlich geht durch einen Undulationspunkt eine gewisse Curve, welche die Berührungspunkte der Doppeltangenten enthält; und das Auftreten eines Undulationspunktes vermindert die Zahl der Doppeltangenten um Eins.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen werden nun die Gleichungen der Curve für verschiedene Fälle aufgestellt, und es wird eine Reihe von Eigenschaften der Curven entwickelt. Ist ein Undulationspunkt vorhanden, so kann man die Gleichung in folgender Weise aufstellen. Da nach einem bekannten Satze vier vom Undulationspunkte ausgehende Strahlen die Curve noch in zwölf Punkten schneiden, welche auf einer Curve dritter Ordnung liegen, so lässt sich die Gleichung in die Form bringen:

$$u\Gamma + \lambda\Theta = 0,$$

wo $u = 0$ Gleichung der Undulationstangente, $\Gamma = 0$ die Gleichung jener Curve dritten Grades; $\Theta = 0$ die Gleichung des Systems der vier vom Undulationspunkte ausgehenden Strahlen ist. Diese Gleichungsform wird noch durch speciellere Annahmen des Coordinatendreiecks vereinfacht. Für eine Curve mit zwei Undulationspunkten wird die Gleichungsform aufgestellt:

$$u_1 u_2 C = B^2,$$

wo $C = 0$, $B = 0$ Gleichungen von Kegelschnitten sind, und $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ Tangenten von B. Es werden für solche Curven noch einige interessante Eigenschaften festgestellt, die hier übergangen werden. In ähnlicher Weise werden dann die Curven mit drei und mit vier Undulationspunkten untersucht, wobei auch auf die Realität der Punkte Rücksicht genommen wird. Es wird gezeigt, dass nicht mehr als vier Undulationspunkte reell sein können, und dass diese auf einem Kegelschnitte liegen, welcher die Curve in ihnen vierfach berührt. Ferner wird nachgewiesen, dass, wenn vier reelle Undulationspunkte vorhanden sind, entweder kein oder acht imaginäre Undulationspunkte vorhanden

sind. Im letzteren Falle kann die Gleichung in die Form gebracht werden:

$$x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0,$$

wo x_1, x_2, x_3 homogene Punktcoordinaten bedeuten. Dieser Fall, der als der speciellste ein besonderes Interesse hat, wird noch einer eingehenden Discussion unterworfen. A.

H. M. Jeffery. On spherical curves of the fourth class with quadruple foci. Quart. J. XVIII. 270-311.

Im Anschluss an eine lange Reihe ähnlicher Untersuchungen (F. d. M. VIII. 1876. 512. 476, IX. 1877. 560, X. 1878. 482, XI. 1879. 513, XII. 1880. 566. 610, XIII. 1881. 534), speciell an die zuletzt bezeichneten, werden in dieser Arbeit die sphärischen Curven vierter Klasse mit vierfachen Brennpunkten einer äusserst eingehenden Discussion unterzogen. Es werden dabei acht Hauptfälle unterschieden. Die Gesichtspunkte des Herrn Verfassers sind in früheren Referaten genügend gekennzeichnet.

A.

H. M. Jeffery. On spherical cycloidal and trochoidal curves. Quart. J. XIX. 44-66.

In einer kurzen historischen Einleitung werden die den Gegenstand betreffenden Arbeiten von Hermann (Act. Petrop. 1726), Johann Bernoulli, Clairaut, Nicole (alle drei acad. des sciences 1736) Lexel (Act. Petrop. 1779) und Gudermann (1830) aufgezählt. Darauf werden die Eigenschaften der sphärischen Cycloiden und Epicycloiden und Epitrochoiden entwickelt. Die Resultate sind zum grossen Teil bereits in den genannten Arbeiten enthalten. Es kam dem Herrn Verfasser wesentlich auf eine zusammenhängende, seinen Methoden entsprechende Darstellung an; doch ergeben sich dabei auch einige neue Lehrsätze und Formeln über die betrachteten Curven. Die Betrachtungen erstrecken sich auf die Aufstellung der Gleichungen in sphärischen

en Cylinderfläche abrollt. Die betrachteten ebenen Schnitte umliche Parallelcurven, u. s. f. A.

NEPER. Ueber Flächen mit besonderen Meridianen. Gött. Abh. XXIX.

Normale in einem beliebigen Punkte einer Fläche bilde er bestimmten Richtung, die zur positiven z-Axe gewählt Winkel u, und ihre Projection auf die xy-Ebene bilde x-Axe den Winkel v; dann kann man u als Polhöhe, änge des betrachteten Punktes definiren, ebenso wie auf oberfläche. Die Curven u = const. und v = const. sind s Analogon der Parallelkreise und der Meridiane. Die werden vom Verfasser Meridiancurven, die ersteren gleicher Polhöhe genannt. Mit jenen Meridiancurven besich nun die Arbeit besonders. Referent möchte be- obwohl dies in der Arbeit nicht hervorgehoben ist, dass diancurven zu den sogenannten Contourlinien gehören. tourlinie auf einer Fläche, für einen beliebigen Punkt P ectionscentrum, ist der Ort der Berührungspunkte der die Fläche gelegten Tangenten; sie bildet also im ein- Falle die Schattengrenze auf der Fläche, wenn die Licht- von P ausgehen. Rückt der Punkt in's Unendliche, so Berührungskegel in einen Cylinder über, und die Con- wird zu einer Meridiancurve. Die Schaar der Meridian- welche in der vorliegenden Arbeit betrachtet wird, ist e, für welche die Schaar der Projectionscentra auf einer entfernten Geraden liegt. Nimmt man nun noch einige e Gesetze der Flächentheorie zu Hülfe, so ergiebt sich e der in der Arbeit durch nicht ganz einfache Rech- gewonnenen Resultate sehr einfach ohne jede Rechnung, ssen sich die Resultate sogar ohne Weiteres wesentlich er formuliren.

h Aufstellung allgemeiner Rechenformeln und Unter- der Krümmungen einer Meridiancurve werden die

Flächen mit planen und die mit geodätischen Meridiancurven allgemein analytisch dargestellt. Namentlich werden in beiden Fällen die Minimalflächen untersucht, und es werden folgende Sätze gewonnen.

Eine geodätische Meridiancurve ist die Helix (geodätische Linie) einer Cylinderfläche, nämlich des Berührungscylinders (siehe oben). Die Ebene einer planen Meridiancurve bildet einen constanten Winkel mit der Ebene, welche die Normale zur Fläche enthält und einer festen Geraden parallel ist. Eine Fläche mit einem System geodätischer Meridiancurven ist eine Schale der Krümmungscentra einer Fläche mit einem System planer Krümmungslinien, deren Ebenen einer festen Geraden parallel, also Tangentialebenen eines Cylinders sind.

Den Schluss der Arbeit bilden vermischte Untersuchungen. Dieselben handeln von Flächen, deren Meridiancurven die Linien des grössten Abfalls in Beziehung auf eine feste Ebene sind, von solchen, welche von den osculatorischen Kugelflächen ihrer Meridiancurven berührt werden, und endlich von der windschiefen Fläche der Normalen längs einer Meridiancurve. A.

A. Enneper. Beiträge zur Theorie der Flächen, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der Minimalflächen. Gött. Nachr. 1882. 34-47, 89-120.

Der erste der Beiträge enthält den Beweis eines früher von dem Herrn Verfasser bereits ohne Beweis mitgeteilten Satzes: Zwei Flächen S und S' mögen sich so entsprechen, dass die Normalen in zwei correspondirenden Punkten parallel sind. Soll den Krümmungslinien der Fläche S auf S_1 ein orthogonales System entsprechen, so können zwei Fälle stattfinden. Erstens: Den Krümmungslinien der Fläche S entsprechen auf S_1 ebenfalls Krümmungslinien. Zweitens: In jedem Punkte der Fläche S_1 ist die Summe der Hauptkrümmungshalbmesser constant, d. h. S_1 ist eine Minimalfläche.

Sind S und S_1 zwei Minimalflächen, so entspricht allgemein

n orthogonalen System auf der einen Fläche auch ein ortho- les System auf der anderen. In dem zweiten Beitrag wird von Herrn Bonnet im Jahre 1860 behandelte Aufgabe, die malflächen mit planen Krümmungslinien aufzusuchen, noch ıal aufgenommen, da in der Bonnet'schen Entwickelung ge- e Fälle nicht berücksichtigt sind. Namentlich ist eine von n Enneper gefundene algebraische Minimalfläche von Herrn net übersehen. Die Flächen werden schliesslich in folgender se dargestellt:

$$= \frac{k}{n^2}\left(u - \frac{\sin nu \cos nvi}{n}\right) - \frac{1}{4k}\left(u + \frac{\sin nu \cos nvi}{n}\right),$$

$$= -\frac{k}{n^2}\left(v - \frac{\cos nu \sin nvi}{ni}\right) - \frac{1}{4k}\left(v + \frac{\cos nu \sin nvi}{ni}\right),$$

$$= \frac{1 - \cos nu \cos nvi}{n^2}.$$

h eine Umformung kommt man auf die Bonnet'schen Glei- gen, die indessen weniger allgemein sind.

Der dritte Beitrag enthält weitere Ausführungen des in (I) estellten Theorems. Sind u und v sogenannte Abbildungs- meter, so dass das Linienelement die Form hat:

$$ds = t\sqrt{du^2 + dv^2},$$

ennt der Verfasser die Parametercurven isometrische und be- t den Satz: „Zwei Flächen S und S_1 entsprechen sich so, dass Normalen in entsprechenden Punkten parallel sind (I). Sollen dann isometrische Krümmungslinien gegenseitig entsprechen, t das Quadrat des Krümmungsverhältnisses für entsprechende te gleich. Ist die eine Fläche eine Kugel, so ist die andere eder eine Kugel oder eine Minimalfläche." Dieser Satz wird tzt, um alle möglichen „isometrischen Coordinatensysteme" ler Kugel anzugeben, eine Aufgabe, die übrigens bekannt- durch die Theorie der conformen Abbildung bereits gelöst ist.

Der vierte Beitrag giebt einige Vereinfachungen der Formeln, ıe in der Arbeit des Verfassers: „Ueber eine Erweiterung Begriffs der Parallelflächen" (Gött. Nachr. 1870-72, s. F. d. M. 869. 534) vorkommen.

In dem fünften werden Formeln entwickelt, welche die analytischen Definitionen der Minimalflächen durch Krümmungslinien oder asymptotische Linien als specielle Fälle enthalten.

Im sechsten Beitrag endlich werden andere Parametercurven auf der Kugel zu Grunde gelegt, namentlich Meridiane und Parallelkreise, und es werden noch einige Eigenschaften der Minimalflächen besprochen, besonders der Satz: „Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Krümmungsradien, r_1 und r_2 die Torsionsradien der beiden Krümmungslinien in einem Punkte einer Minimalfläche, so ist

$$r_1\varrho_1^2 = r_2\varrho_2^2.“$$

Endlich wird folgende Bemerkung gemacht: Nach einem Satze von Bonnet lässt sich eine Minimalfläche so biegen, dass die Krümmungslinien in asymptotische Linien übergehen. Ist ϱ_1' und r_1' Krümmungs- und Torsionsradius der daraus durch die Biegung entstandenen asymptotischen Linie, so ist:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\varrho_1'^2} + \frac{1}{r_1'^2}.$$

A.

A. Ribaucour. Étude des elassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. Brux., Mém. cour. in 4° XLV.

Diese wichtige Arbeit enthält im strengen Sinne der Theorie der Elassoiden 1) die Lösung des Problems von Monge, welche gleichzeitig von Herrn S. Lie gefunden ist; 2) die vollständige Lösung des Problems von Björling im geometrischen Sinne, d. h. die Lösung wird auf die Abwickelung einer abwickelbaren Fläche zurückgeführt. Ausserdem enthält die Arbeit eine Menge specieller bemerkenswerter Resultate und verschiedene neue Ansichten, die für das Studium der Elassoiden und anderer damit verknüpfter Fragen vielversprechend zu sein scheinen. Hier die kurze Inhaltsangabe der einzelnen Capitel.

I. Definitionen und Methode. Die angewandte Methode stützt sich, unter Benutzung der Formeln von Codazzi, auf den Gebrauch variabler Axen, deren Anfangspunkt sich auf der Oberfläche verschiebt. Diese Methode nennt der Verfasser Perimorphie.

mittlere Punkt (point moyen) einer Geraden einer Congruenz
er Mittelpunkt der Geraden, welche die beiden Brennpunkte,
uf der Geraden liegen, verbindet; die mittlere Fläche (sur-
moyenne) ist der Ort der mittleren Punkte. Die Ombilicale
er allen Kugeln gemeinsame imaginäre Kreis in der Ebene
Unendlichen; eine isotrope Gerade ist die, welche die
licale schneidet, eine isotrope Ebene die, welche sie be-
; eine isotrope Developpable die, welche sie enthält; ihre
kehrkante wird eine isotrope Linie oder von der Länge
sein. Eine isotrope Congruenz ist die, deren Brennpunkts-
lächen (Tangenten an alle Gerade der Congruenz) isotrope
loppable sind. Die Bezeichnungen „mittlere Fläche" und
rope Congruenz" sind neu.

II. Geometrischer Beweis der Riemann'schen Formel für den
eninhalt des Teils des Elassoids, welcher durch eine ge-
ne Umgrenzung bestimmt ist.

III. Geometrische Integration der partiellen Differentialglei-
g der Minimalflächen. (Problem von Monge.)

IV. Isotrope Congruenzen. Als Hauptresultat: Die Ein-
nde der Ebenen, welche senkrecht durch die mittleren Punkte
Geraden einer Congruenz gezogen sind, oder mittlere Ein-
lte (enveloppée moyenne) ist ein Elassoid, genannt mittle-
Elassoid (élassoide moyenne).

V-VII. Construction der isotropen Congruenzen, die ein und
lbe mittlere Elassoid liefern. Ihre Zahl ist dreifach unend-
und sie können aus einer von ihnen abgeleitet werden.
kehrt kann man das mittlere Elassoid einer isotropen Con-
z aus der elementaren Oberfläche ableiten, welche diese
ruenz bestimmt. Verschiedene Folgerungen, darunter be-
rs die: Das mittlere Elassoid und die mittlere Fläche sind
en ein und derselben Congruenz.

VIII. Eigenschaften der mittleren Flächen. 1) Die mittlere
e einer isotropen Congruenz ist der Ort der Mittelpunkte
nter sich gleichen Sehnen, deren Endpunkte Flächen be-
ben, welche auf einander abwickelbar sind; und reciprok.
mmt man die Centralpunkte (points centraux) der Geraden

einer isotropen Congruenz und die abbildenden Punkte
Geraden auf einer Kugel als sich entsprechend an, da
sprechen sich die mittlere Fläche und die Kugel orth
3) Die asymptotischen Linien des Elassoids und der m
Fläche entsprechen sich. 4) Wenn das mittlere Elasso
die mittlere Fläche zusammenfallen, so ist es eine Reg
und, nach dem Satz von Catalan, ein Helicoid mit ein
ebene.

IX-X. Von jedem isothermen orthogonalen System de
kann man unendlich viele isotrope Congruenzen ableiten
mittlere Elassoiden als zu einer Gruppe gehörig bezeichn
den. Sie sind auf einander abwickelbar und können au
lich viele Arten in conjugirte Elassoide zerfallen, d. h. in
bei denen nach Bonnet das Bild der asymptotischen Lin
einen zum sphärischen Bilde die Krümmungslinien der
hat. Der Verfasser stellt für diese conjugirten Elassoide
den neuen Satz auf: Ihre Elemente entsprechen sich orth
und den reciproken: Damit zwei Elassoide conjugirt se
nügt die Erfüllung zweier der folgenden Bedingungen:
Tangentialebenen sind parallel. 2) Die Elemente sind
3) Die Elemente sind orthogonal. Von einer isotrope
gruenz kann man Elassoide, die der Verfasser geschichtet
tifiées) nennt, ableiten, die eine Familie bilden, welche
Paar conjugirter Elassoide umfasst. Diese geschichteten El
stehen in enger Beziehung zu den zu einer Gruppe ge
Elassoiden (groupés).

XI. Geometrische Lösung des Problems von Björlin
struction eines Elassoids längs einer bestimmten Begrenzu
einer gegebenen Developpabeln eingeschrieben ist). Ma
eine Begrenzung, welche durch Gleichheit und Orthogonal
Elemente der ersten conjugirt ist. Man kann zwei solch
jugirter Contouren mittels einer bekannten Fläche a
Daraus entspringt das wichtige Resultat: Die Kenntnis ein
kürlichen Fläche umfasst die von unendlich vielen zu
Gruppe gehörigen oder geschichteten Elassoiden. Versc
Fälle, wo die Elassoide algebraisch sind.

XII-XIV. Isotrope Congruenzen und von einer Ebene abge- Elassoide. Transcendente Elassoide mit algebraischen n. Krümmungslinien der Elassoide, die von einer Ebene eitet sind. Der Fall, in dem sie von elliptischen oder al- ischen Functionen abhängen. Specieller Fall, in dem das oid zwei Reihen von ebenen Curven besitzt, deren Krüm- sradius ein grösseres oder kleineres ganzes Vielfaches der ale ist. (Beispiele: Die Catenoide oder Alysseide, Um- ngselassoid und das parabolisch-cycloidische Elassoid von n.)

XV-XVI. Neue Eigenschaften der von der Ebene abgeleite- sotropen Congruenzen und neue Definition der Elassoide s der Linien grösster Neigung einer gewissen Fläche. An- liche Discussion einer Fläche von Schwarz; Niveaulinien der oide.

XVII-XX. Charakteristische Eigenschaften der isotropen ruenzen, die aus den Generatricen von homofocalen Flächen en Grades gebildet sind. Algebraische Elassoide, die durch Kreis gehen; es giebt deren so viele, dass man algebrai- Epicycloiden davon construiren kann. Elassoide, von homo- en Paraboloiden abgeleitet. Elassoide, die auf Umdrehungs- en abwickelbar sind. Gleichung der Elassoide neunter und ter Ordnung.

XXI. Verschiedene Eigenschaften der Elassoide. Dies Capitel ichtig, da es neue Verallgemeinerungen oben bezeichneter ltate enthält. Folgende Sätze mögen hervorgehoben werden: ie Axen einer Congruenz von Kreisen, welche nur zwei le in endlicher Entfernung hat, bilden eine isotrope Con- nz; man kann unendlich viel andere und daher unendlich Elassoide davon ableiten, indem man die Kreiscongruenz reciproke Radiivectoren transformirt. 2) Es seien $(A), (A')$ auf einander abwickelbare Flächen, (O) die Oberfläche, ne der Ort der Mittelpunkte O der Geraden AA' ist, welche entsprechenden Punkte verbinden. Es giebt ein anderes $(B), (B')$ von abwickelbaren Flächen und eine Fläche (Ω), ne der Ort der Mittelpunkte der Geraden BB' ist, welche die

entsprechenden Punkte verbinden. Diese Flächen BB' haben die Eigenschaft, dass (O) alle Ebenen senkrecht zu den Geraden BB' in Ω berührt. Die Flächen $(O), (\Omega)$ sind Focalen derselben Congruenz, AA' ist parallel zur Normale von Ω an (Ω), und man hat

$$AA'.BB' \sin V = kO\Omega,$$

wo V den Winkel der Normalen an (O) und (Ω) bezeichnet, und k constant ist. 3) Es seien (O) und (M) zwei Flächen, die sich in ihren Elementen orthogonal entsprechen. Legt man durch die Punkte von (M) Parallelen zu den Normalen von (O), dann bilden dieselben eine Congruenz, deren mittlere Fläche (M) ist, und deren Hauptebenen, welche Tangentialebenen zu den Focalflächen sind, senkrecht zu den Asymptoten der Indicatrix in O an (O) sind. Mn. (O.).

Capitel 4.

Liniengeometrie (Complexe, Strahlensysteme).

W. Fiedler. Geometrische Mitteilungen. II. Zur projectiven Verbindung der Gebilde höherer Stufen. Wolf Z. XXIV. 180-189.

Ergänzung zu F. d. M. XI. 1879. p. 595. Der Verfasser behandelt algebraisch und allgemein die projective Verbindung von Gebilden beliebiger Stufe behufs Erzeugung neuer Gebilde, erhält dadurch die Erzeugungsarten der Flächen, dann aber auch die der Strahlencomplexe. Es ergeben sich zunächst für den Complex zweiten Grades drei projective Erzeugungen, und zwar aus ∞^1 linearen Congruenzen, aus ∞^2 Regelschaaren und aus ∞^3 Strahlengruppen. Diese Erzeugungen werden dann auf alle algebraischen Complexe ausgedehnt und als Grundlagen einer Classification derselben hingestellt. Die Erzeugung der Complexe zweiten Grades aus ∞^2 Regelschaaren hatte zwar schon vorher Herr Schur in seiner Berliner Dissertation (1879) sehr ausführlich synthetisch discutirt. Doch ist

Fiedler's Entdeckung schon deshalb unabhängig von der von Schur, weil Herr Fiedler diese Erzeugung schon bei Gelegenheit der Bearbeitung der dritten Auflage der Salmon-Fiedler'schen „Analytischen Geometrie des Raumes" (1878) erkannt hatte, ohne sie freilich sofort zu publiciren. Was aber die Hauptsache ist, die Entwickelung von Herrn Fiedler liefert drei projective Erzeugungen der Complexe und führt nicht blos zu denen zweiten, sondern auch zu denen n^{ten} Grades. Ferner muss hervorgehoben werden, dass die vorliegende Arbeit des Herrn Fiedler vor der neuen Auflage der Reye'schen „Geometrie der Lage", wo diese Dinge berührt werden, erschienen ist. Scht.

G. Battaglini. Sui connessi ternarii di 1° ordine e di 1ª classe. Batt. G. XX. 230-249.

Der Verfasser entwickelt in elementarer Weise, bei welcher nur das Princip der symbolischen Schreibweise benutzt wird, einige der Haupteigenschaften der Connexe (1,1) und der Coincidenzen zweier solcher Connexe. Dass der Connex und sein conjugirter von vornherein als völlig gleichwertig durch die Gleichungen $(Ax)(bY) = 0$, $(aX)(By) = 0$ eingeführt werden, ist an und für sich wohl von Interesse; die Uebersichtlichkeit der Darstellung, die sich in manchen Punkten auch vielleicht hätte kürzer fassen lassen, scheint indessen nicht dadurch zu gewinnen, dass gleichzeitig immer die verschiedenen Formen, in denen demzufolge jede Relation auftreten muss, aufgestellt werden.

V.

A. Weiler. Die Erzeugung von Complexen ersten und zweiten Grades aus linearen Congruenzen. Schlömilch Z. XXVII. 257-288.

Von den 58 verschiedenen Complexen zweiten Grades, welche der Verfasser zuerst in seiner Dissertation (Clebsch Ann. VII. . F. d. M. V. 1873. 416) beschrieben hat, haben 38 eine Regelfläche zur Singularitätenfläche. Lässt sich nun der Complex

durch lineare Congruenzen erzeugen, so bilden die Directricen derselben eine Regelfläche, welche notwendig zur Singularitätenfläche gehört, und umgekehrt muss auch, sobald die Singularitätenfläche windschief ist, jede Erzeugende derselben Directrix eine dem Complexe angehörigen linearen Congruenz sein. Hieraus ergiebt sich nun die folgende analytische Methode zur Bestimmung dieser Congruenzen: Man drücke die Lage zweier Punkte P, Q auf der Singularitätenfläche durch Parameter α, β; γ, δ aus, bestimme die Coordinaten des Strahles PQ und stelle die Bedingung dafür auf, dass derselbe dem Complexe angehört. Sind nun α, γ die Parameter der Erzeugenden, auf der P liegt, so müssen die Coefficienten der Glieder mit β, δ einen nur von α, γ abhängigen Factor besitzen, dessen Verschwinden aussagt, dass jene Erzeugende Directrix einer linearen Congruenz des Complexes ist. Auf diesem Wege leitet der Verfasser für die 38 Complexe die Construction der Directricenpaare der erzeugenden linearen Congruenzen her; in einigen Fällen werden auch rein synthetische Betrachtungen zur Bestimmung derselben angewandt.

V.

Genty. Mémoire de géométrie vectorielle sur les complexes du second ordre qui ont un centre de figure. Résal J. (3) VIII. 299-335.

Nachdem in der Einleitung an einigen Beispielen die Aufstellung von Gleichungen verschiedener Complexe mittels der Quaternionentheorie gezeigt worden ist, giebt der Verfasser Gleichung und Einteilung der in der Ueberschrift genannten Complexe und untersucht dann eingehend die erste Art derselben, welche durch das Auftreten zweier conjugirter linearer Vectorfunctionen in der Gleichung gekennzeichnet ist. Besonders ausführliche Behandlung erfährt die mit diesem Complex zusammenhängende Kummer'sche Fläche.

Schg.

Capitel 5.

Verwandtschaft, eindeutige Transformationen, Abbildungen.

A. Verwandtschaft, eindeutige Transformation und Abbildung.

F. Aschieri. La trasformazione quadratica doppia di spazio; e la sua applicazione alla geometria dello spazio non Euclideo. Lomb., Ist. Rend. (2) XIV. 673-683; XV. 66-77, 147-154, 247-250.

Charakteristisch für diese Untersuchungen ist die Einführung des Begriffes des „Abstandes" zweier linearer Complexe X, Y im Sinne der nicht-euclidischen Geometrie, wie folgt. In dem Complexbüschel (X, Y) befinden sich zwei specielle Complexe, deren Axen bekanntlich die Directricen der den Complexen des Büschels gemeinsamen Congruenz sind. Irgend eine Ebene trifft diese beiden Directricen in einem Punktepaar, auf dessen Verbindungslinie sich noch ein zweites ausgezeichnetes befindet: Das der Pole der Ebene, bez. der beiden Complexe X, Y. Dann wird unter dem Logarithmus des Doppelverhältnisses des zweiten Punktepaares zum ersten, noch multiplicirt mit $\frac{1}{\pi}$, der gewünschte Abstand definirt. Dies wird im Besondern auf den Fall angewandt, wo die beiden Complexe dem vierfach ausgedehnten Gebiet $\Omega^{(4)}$ der zu einem festen linearen Complex θ in Involution stehenden Complex angehören. Die speciellen Complexe dieses Gebiets bilden ein dreifach ausgedehntes Gebiet $\Sigma^{(3)}$. Dann kann man auch sagen: Der Abstand zweier (linearer) Complexe X, Y des Gebietes $\Omega^{(4)}$ unterliegt der üblichen Definition eines nicht-euclidischen Abstandes, wenn man den Raum $\Omega^{(4)}$ als einen nicht-euclidischen, mit dem Raum $\Sigma^{(3)}$ als absolutem Grundgebilde, auffasst.

Dies findet zunächst seine Anwendung auf den gewöhnlichen Linienraum $Y^{(4)}$, indem dieser zum Raume $\Omega^{(4)}$ in eine ein-zwei-

deutige Correspondenz (1,2) gesetzt wird, so dass jeder Geraden Y ein bestimmter Complex Ω, und umgekehrt einem Complexe Ω das Paar von Geraden Y, Y' zugeordnet wird, die bezüglich des festen Complexes θ conjugirt sind. Es geschieht dies mittels der von den Herren Lie und Schur begründeten Abbildung eines linearen Complexes (θ) auf den Punktraum (cf. z. B. Schur, Clebsch Ann. XV., s. F. d. M. XI. 1879. 591) in rein geometrischer Weise, aber auch ganz unabhängig davon analytisch; einem speciellen Complex Σ entsprechen dabei zwei in eine einzige (und zwar dann immer mit einer Geraden des Complexes θ) coincidirende Gerade. Damit ist dann der Begriff des Abstandes auf den Linienraum übertragen, woraus eine Reihe von Sätzen fliesst: z. B.: alle Geraden, die von einer festen Geraden einen festen Abstand bewahren, bilden einen linearen Complex, etc. Der Abstand zwischen zwei Geraden ist dabei immer der gleiche, wie der zwischen ihren (bez. θ) conjugirten. Besonders wichtig sind die beiden Fälle, wo der Abstand gleich Null, resp. $\frac{\pi}{2}$ ist. Im ersteren Fall haben die beiden Complexe eine Congruenz mit doppelt zählender Directrix gemein (und die entsprechenden Geraden treffen sich), im zweiten sind sie in Involution, so dass die beiden Worte „orthogonal" und „in Involution" dasselbe aussagen. Dieser Abbildung steht zur Seite eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den Complexbüscheln (C) und Complexnetzen $\{d^{(2)}\}$ (des Raumes $\Omega^{(4)}$), die dadurch völlig bestimmt ist, dass jeder Complex eines Büschels mit jedem Complex des zugeordneten Netzes in Involution steht. Die Directricen der Congruenz (C) gehören dem festen Complex θ an; θ hat mit dieser Congruenz (C) eine Regelschaar $\nu^{(2)}$ gemein, deren Leitschaar wieder $d^{(2)}$ ist; d. i. die den Complexen des Netzes $\{d^{(2)}\}$ gemeinsame Regelschaar. Die gewonnenen Ergebnisse kann man auf die Kugelgeometrie übertragen und erhält dadurch eine grosse Reihe von Sätzen über Kugeln, die andere unter festen Winkeln schneiden etc., mit einem Schlage. Diese Uebertragung vermittelt sich wieder mittels der Lie-Schur'schen Abbildung der Geraden des Complexes θ auf die Punkte eines (gewöhnlichen) Raumes $S^{(3)}$,

em man speciell als Fundamentalkegelschnitt dieser Abbil-
g den imaginären Kugelkreis $C'^{(2)}$ des Raumes $S'^{(3)}$ nimmt.
n entspricht jeder linearen Congruenz in θ eine Kugel Σ'
es Raumes, und umgekehrt; oder auch, da irgend eine lineare
gruenz in θ sich als gemeinsame Congruenz des Büschels
2) darstellen lässt, (wo Ω ein Complex des Gebietes $\Omega^{(4)}$), jedem
aren Complex Ω von $\Omega^{(4)}$ eine Kugel Σ', und umgekehrt.
besondere entspricht einer Congruenz $(\theta\Omega)$ mit doppelt zählen-
Directrix ein Kugelkegel, d. i. ein solcher Kegel, der
r dem Kugelkreis $C'^{(2)}$ steht. Das Wesentliche dieser Ab-
lung des Complexraumes $\Omega^{(4)}$ auf den Kugelraum $(\Sigma'^{(4)} = S'^{(3)})$
teht darin, dass der Abstand zweier Complexe X, Y (in $\Omega^{(4)}$)
rgeht in den gewöhnlichen euclidischen Winkel der beiden
sprechenden Kugeln. Von den so erhaltenen Sätzen sei
geführt: „Zwei (gewöhnliche) Kugeln bestimmen ein Büschel,
n zwei „Kugelkegel“ angehören. Die sämmtlichen durch die
ei Spitzen dieser Kegel gehenden Kugeln bilden ein Netz von
gegebenen Büschel orthogonalen Kugeln.“ Aehnlich für drei
vier Kugeln etc.

Der übrige Teil der Arbeit des Herrn Verfassers wird ge-
let durch eine mit Hülfe des Obigen hergestellte eigentüm-
e Combinirung der Theorie der „nicht-euclidischen“ Kugeln
der der gewöhnlichen euclidischen. Unter einer nicht-eucli-
chen Kugel wird eine Fläche zweiter Ordnung verstanden,
eine feste solche Fläche $S^{(2)}$ längs eines Kegelschnitts be-
rt; ihr Centrum heisst das Centrum einer solchen Kugel; zwei
che Kugeln schneiden sich in zwei „nicht-euclidischen“ Krei-
etc. Dann kann man zwischen den Kugeln $\Sigma' = S_{\lambda}'^{(2)}$ eines
umes S' und den nicht-euclidischen Kugeln $S_{\lambda}^{(2)}$ eines Raumes
eine Correspondenz (1,2) in folgender Weise bilden. Aus den
geln des Raumes S' wird eine feste $S'^{(2)}$ herausgegriffen, durch
zugleich eine bestimmte Inversion J festgelegt ist. Dieser
ten Kugel $S'^{(2)}$ entspreche im Raume $\Omega^{(4)}$ ein Complex Ω.
mit correspondiren dann (vermöge der Abbildung des Raumes
auf den Linienraum $Y^{(4)}$ und zugleich des Complexes θ auf
n Raum S') irgend einem Punktepaar der Inversion J ein Paar

von Geraden des Complexes θ, die bezüglich des Complexes conjugirt sind. Sämmtlichen linearen Complexen von $\Omega^{(4)}$, durch die Directricen der Congruenz $(\Omega\theta)$ gehen, entsprech die in J sich selbst conjugirten (und daher zur festen $S'^{(2)}$ orti gonalen) Kugeln. Damit sind die Elemente der Correspond (1,2) zwischen den euclidischen Kugeln in S' und den nic euclidischen Kugeln in S (indem man diesen Raum als nic euclidischen mit der absoluten Fläche $S^{(2)}$ auffasst) gegeb nämlich: Jeder nicht-euclidischen Kugel in S entsprechen zw euclidische in S', die dann in der Inversion J zu einander c jugirt sind; umgekehrt, jeder nicht-euclidischen Kugel in S' e spricht eine einzige euclidische in S. Zugleich entsprech dann den Ebenen des nicht-euclidischen Raumes S die zur fes Kugel $S'^{(2)}$ orthogonalen euclidischen Kugeln; umgekehrt d Ebenen des euclidischen Raumes S' die nicht-euclidischen K geln, die durch einen festen (Fundamental-)Punkt gehen, d Centrum der der festen Kugel $S'^{(2)}$ entsprechenden. Von d daraus entspringenden Sätzen wollen wir hier folgende a führen: „Der Winkel, unter dem sich zwei nicht-euclidisc Kugeln längs ihrer beiden Schnittkreise treffen, ist für jeden d beiden Kreise constant, aber im Allgemeinen für beide Krei ein verschiedener. Er ist dann und nur dann der gleiche, we das Centrum der einen Kugel auf der Ebene des Kegelschni liegt, indem die andere die absolute Fläche $S^{(2)}$ berührt."

„Die nicht-euclidischen Kugeln, die eine feste Kugel, weni stens in den Punkten eines und desselben Kegelschnitts un constantem Winkel treffen, bilden ein solches (dreifach unen liches) System, dass durch irgend drei Punkte im Allgemein sechzehn solcher Kugeln gehen." etc.

Aehnliche Betrachtungen für die Ebenen hatte schon H de Paolis angestellt. Zum Schlusse sei angedeutet, dass Entwickelungen des Herrn Verfassers über lineare Comple (abgesehen von dem Zusammenhang mit der nicht-euclidisch Geometrie) im engsten Verhältnis stehen zu dem Uebertragun princip des Referenten (cf. z. B. Clebsch Ann. XVI. p. 125. R im nächsten Bande dieser Fortschritte), sofern man dieses a

wendet auf die Abbildung der linearen Complexe auf die Kegelschnitte in der Ebene, wie sie der Referent in seiner Schrift über Apolarität durchgeführt hat. My.

E. Bertini. Costruzioni geometriche della trasformazione univoca di 3° ordine. Lomb., Ist. Rend. (3) XV. 154-158.

Eine ein-eindeutige Transformation dritten Grades zwischen den Punkten zweier Ebenen, die zugleich mit Hülfe einer Collineation stets in die allgemeinste Transformation ihrer Art übergeführt werden kann, kann immer auf eine von den folgenden zwei Weisen hergestellt werden. Entweder trifft die Verbindungslinie je zweier entsprechender Punkte zugleich eine Gerade und einen Kegelschnitt (im Raume), die einen Punkt gemein haben, oder es werden je zwei entsprechende Punkte durch einen variabeln Kegelschnitt ausgeschnitten, der durch je einen festen Punkt beider Ebenen geht und ausserdem einen festen Kegelschnitt (im Raume) zweimal trifft. My.

M. Nöther. Note über die algebraischen Curven, welche eine Schaar eindeutiger Transformationen in sich zulassen. Klein Ann. XX. 59-63.

M. Nöther. Nachtrag zu dieser Note. Klein Ann. XXI. 138-140.

Algebraischer Beweis des Satzes, dass keine algebraischen Curven von einem Geschlecht $p>1$ existiren, die durch unendlich viele rationale eindeutig umkehrbare Transformationen in sich übergehen. Zu Grunde gelegt werden einmal die algebraischen Entwickelungen der Herren Brill und Nöther (Clebsch Ann. VII., s. F. d. M. VI. 1874. 251) über eindeutige Transformationen und die φ-Functionen, sodann insbesondere der Satz (dessen algebraischen Beweis der Herr Verfasser später an anderer Stelle geliefert hat), dass es auf einer algebraischen (irreductibeln) Curve $F(s,z)=0$ nur eine endliche Anzahl solcher „specieller" Punkte (s_0, z_0) giebt, in denen eine rationale Function von s, z von

der Ordnung $\mu < p$ verschwindet, ohne sonst zu verschwinden. Für $p > 1$ ist die Anzahl dieser Stellen > 0, nämlich gleich $(p-1)\,p(p+1)$.

Zunächst wird nachgewiesen, dass die Parameter der unendlich vielen Transformationen (falls solche existiren), die $f=0$ in sich überführen, in die Transformationsformeln algebraisch eingehen. Irgend einer der Parameter ϱ, (die übrigens als constant betrachtet werden), ist dann repräsentirt durch einen variabeln Punkt einer Curve $F(\varrho, \varrho') = 0$ von derselben algebraischen Classe wie $f = 0$. Die Gesammtheit der zu diesem Parameter ϱ gehörigen Transformationen führt dann einen beliebigen (nicht speciellen) Punkt (s', z') von f in alle Punkte von f über; das Analoge gilt von den umgekehrten Transformationen. Mithin kann ein solcher Punkt (s', z') auch in einen der speciellen Punkte (s_0, z_0) übergeführt werden; die umgekehrte Transformation führt also den letzteren Punkt in den ersteren, d. i. einen beliebigen Punkt der Curve über. Dies ist aber unmöglich, da ein specieller Punkt (s_0, z_0) der Curve vermöge einer der Transformationen (oder ihrer Umkehrung) immer wieder nur in einen speciellen übergehen kann. Die gemachte Annahme ist also unstatthaft, was zu beweisen war. Für die Fälle $p = 0, 1$ gelingt es ohne Mühe, die Existenz von unendlich vielen Transformationen der gemeinten Art einzusehen. In dem Nachtrage widerlegt der Herr Verfasser den Einwand, dass die Ueberführung eines speciellen Punktes (s_0, z_0) der Curve in einen beliebigen (s', z') doch vielleicht möglich sei, nämlich durch eine singuläre unendlich vieldeutige Transformation, deren sich ja in der angenommenen unendlichen Schaar von eindeutigen Transformationen immer einige vorfinden müssen. Wäre dieser Einwand richtig, so käme man zu dem Schlusse, dass sich auf der Curve $f = 0\,(p > 1)$ höchstens zwei specielle Punkte (s_0, z_0) befänden, was nicht der Fall ist. Der Herr Verfasser zeigt endlich, wie dieser Einwand noch auf zweite Weise zu entkräften ist, indem er diejenige Schaar der ϱ bestimmt, die bei allen Transformationen (der angenommenen Art) unverändert bleiben. My.

AYLEY. On two cases of the quadric transformation tween two planes. J. Hopkins Circ. 1882. 178-179.

)ie Aufgabe, den dritten Schnittpunkt der ebenen cubischen

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6lxyz = 0$$

er Verbindungsgeraden zweier ihrer Punkte zu suchen, er- für seine Coordinaten:

$$:z_2 = P + 2lA : Q + 2lB : R + 2lC = P : Q : R = A : B : C,$$

e P, Q, R, A, B, C in den Coordinaten der beiden gegebenen e von zweitem Grade sind. Denkt man sich hier einen eiden Punkte als fest, den anderen als beweglich und dem e (z) entsprechend, und sieht man von der Entstehung der a Darstellungen

$$x_2 : y_2 : z_2 = P : Q : R; \quad x_3 : y_3 : z_3 = A : B : C$$

indig ab, so kommt man zu zwei (auch in der Form) um- aren quadratischen ein-eindeutigen Transformationen zwi- zwei Ebenen. My.

:A. Sulla corrispondenze (1, 2) ed (1, 3). Torino, Atti. II. 431-447.

)ie einfachsten Elemente beider Correspondenzen bis zur ellung ihrer vollen Systeme werden invarianten-theoretisch kelt und eine Anwendung gemacht auf die Segmente, die iner Geraden von correspondirenden Punkten begrenzt n. My.

'EANO. Formazioni invariantive delle corrisponnze. Batt. G. XX. 79-101.

ind zwei doppelt binäre Formen

$$f = a_x^m \alpha_\xi^\mu, \quad g = b_x^n \beta_\xi^\nu$$

espondenzen ($m\mu$), ($n\nu$)) gegeben, deren Variabele von einander ängigen linearen Transformationen unterworfen werden, so der Process der doppelten Ueberschiebung

die Tangenten eines Cykels über. Im Besondern giebt es ach unendlich viele Cyklen, deren reciproke Bilder Punkte ahlbüschel) sind. Der Tangentialabstand zweier Cyklen ändert durch die Transformation nicht, ein Satz, der auf Tangenbstände irgend welcher Curven ausgedehnt werden kann. Anwendung erscheint z. B. ein einfacher Beweis des Satzes: e drei Aehnlichkeitscentra dreier Cyklen (zu je zweien) liegen iner Geraden." Ferner eine einfache Lösung des Apolloni-n Problems. Zum Schluss weist der Herr Verfasser auf den teil hin, den eine geschickte Combinirung obiger Transforion mit der der Inversion bietet. My.

S. Vaneček. Sur l'inversion générale. C. R. XCIV. 042-1044.

Herr Hirst hatte eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen ersion (in der Ebene) angegeben, nach der zwei Punkte x, y der von einander sind, wenn sie in Bezug auf einen festen gelschnitt conjugirt sind, und wenn noch ihre Verbindungse durch einen festen Punkt geht. Der Herr Verfasser will e Idee von einer Verallgemeinerung dieser Hirst'schen Transmation geben, es entgeht ihm aber, dass seine Transformation der Hirst'schen völlig identisch ist. Es folgen Anwendungen verschiedene besondere Fälle. My.

Certo. Lo spazio delle omologie affini di un piano posto in relazione con lo spazio delle coniche dello stesso piano. Batt. G. XX. 321-346.

V.

B. Conforme Abbildung.

Zehnter Abschnitt.

Mechanik.

Capitel 1.

Allgemeines (Lehrbücher etc.).

Ph. Gilbert. Cours de mécanique analytique; partie élémentaire. 2me éd. Paris. Gauthier-Villars. Louvain. Peeters-Ruelens.

In dieser zweiten Auflage ist die Kinematik in mehrere Teile zerlegt. Die Theorien der ebenen Bewegung, des Krümmungsmittelpunktes der Rouletten, der Beschleunigungen der ebenen Bewegung und die relativen Bewegungen sind unter dem Gesichtspunkt der zusammengesetzten Geschwindigkeit betrachtet. Eine Anzahl von Beispielen ist beigefügt; ferner behandelt ein Capitel die Reibung beim Gleiten und den Widerstand beim Rollen, welche in der ersten Auflage nicht berücksichtigt waren. Die allgemeinen Gleichgewichtsgleichungen und die Bewegungsgleichungen der Flüssigkeiten sind einfacher als früher bewiesen. Mn. (O.).

A. Seydler. Einleitung in die theoretische Physik. I. Teil. Einleitende Begriffe. Mechanik. Prag. 1880. (Böhmisch).

Der Verfasser hat beabsichtigt, ein Compendium zu liefern, welches in gedrängter Kürze die wichtigsten Resultate der theo-

.chen Physik deductiv ableiten, ausserdem aber auch dem
ɜr zum weitern Studium Anregung und Anleitung geben soll.
.teres wird durch Uebungsaufgaben, welche älteren classi-
n Werken (Newton, Euler, Lagrange) entnommen sind, noch
r aber durch knapp gehaltene historische und literarische
zen erzielt, welche jedem grösseren Abschnitte beigefügt
. Sie dürften trotz ihrer Kürze den Leser über die wichtig-
Erscheinungen in der diesbezüglichen Literatur hinreichend
ntiren.

Grosse Sorgfalt hat der Verfasser der Architektonik seines
kes zugewendet. Mit Rücksicht auf den Umstand, dass zur
alle unsere Vorstellungen auf dem Gebiete der Physik ein
iegend mechanisches Gepräge haben, teilt er die Physik in
acte (reine) und concrete (angewandte) Mechanik (letztere
dings nur im weitesten Sinne des Wortes). Während erstere
ɜgung, Masse und Kraft im Allgemeinen untersucht, befasst
letztere mit besonderen (concreten) Kräften und Kraftwir-
en, wobei sich eine natürliche Scheidung nach zwei Typen
bt. Der Gravitationstypus beherrscht hauptsächlich jenes
et, in welchem die Wirkungen dem Gesetze des umgekehr-
quadratischen Verhältnisses der Entfernung unterliegen (Gra-
on, Magnetismus, Elektricität), und der Moleculartypus (Vi-
onstypus) hauptsächlich dasjenige, in welchem die Erschei-
en vom directen einfachen Verhältnisse der Entfernung
ngen. Dadurch ist die Sonderung des Stoffes in drei Teile
ɜschrieben. Der vorliegende erste Teil des Werkes be-
elt die abstracte Mechanik, abgesehen von einer etwas aus-
icher gehaltenen Einleitung, worin der Umfang der zum
greichen Studium der theoretischen Physik erforderlichen
ematischen und geometrischen Kenntnisse festgestellt und
e der Physik näher stehende mathematische Disciplinen,
polation, Methode der kleinsten Quadrate in Kürze darge-
werden.

Da die Mechanik die Darstellung der von Massen ausge-
en, durch Kräfte verursachten Bewegungen zur Aufgabe
erscheint es angemessen, 1) die Bewegung an sich;

2) die Massen an sich (in ihren geometrischen Beziehungen), 3) endlich die Kräfte an sich, sofern alle als Vectoren einer geometrischen Darstellungsweise fähig sind, zu betrachten, um endlich, durch Combination der gewonnenen Resultate, jene Untersuchungen durchführen zu können, welche sich 4) entweder auf das Gleichgewicht (als besonders wichtigen speciellen Fall), oder 5) auf die durch Kräfte verursachte Bewegung als allgemeinsten Fall beziehen.

Dadurch teilt sich die Mechanik naturgemäss in folgende Teile: I. Kinematik. II. Geometrie der Massen. III. Geometrie der Kräfte. IV. Statik. V. Dynamik.

Die Kinematik hat in ausführlicheren Darstellungen der Mechanik bereits Bürgerrecht erhalten; auch die Massengeometrie (eingeführt von Haton de la Goupillière) findet immer mehr Berücksichtigung (Somoff, Schell in der zweiten Ausgabe). Dagegen pflegte man die Geometrie der Kräfte bisher in der Statik als integrirenden Bestandteil dieses Abschnitts der Mechanik unterzubringen und machte zwischen beiden keinen Unterschied.

Noch ist zu bemerken, dass der Verfasser die Statik und Dynamik ganz abstract unter der Voraussetzung absolut starrer Gebilde (Massen) behandelt, daher solche Teile, die concrete Kräfte zur Voraussetzung haben (z. B. die Elasticitätstheorie, die Hydromechanik) dem dritten Teile seines Werkes zuweist.

Std.

Laplace. Oeuvres complètes. T. V. Paris. Gauthier-Villars.

Dieser letzte Band der „Mécanique céleste" enthält Buch X[illegible] De la figure et de la rotation de la Terre. Buch XII. [illegible] l'attraction et de la répulsion des sphères et des lois [illegible] l'équilibre et du mouvement des fluides élastiques. Buch XI[illegible] Les oscillations des fluides qui recouvrent les planètes. Buch X[illegible] Les mouvements des corps célestes autour de leurs centres [illegible] gravité. Buch XV. Du mouvement des planètes et des comètes. Buch XVI. Du mouvement des satellites.

O.

DIEU. La théorie vibratoire de la matière et la théorie des centres des forces. Rev. d. qu. sc. XII. 156-176.

Zusammenstellung der Arbeiten, die in den C. R. 1882 publi-t worden sind. Mn. (O.).

Capitel 2.

Kinematik.

STÉPHANOS. Sur les propriétés métriques et cinématiques d'une sorte de quadrangles conjugués. C. R. XCV. 617-650.

Zwei Systeme von je vier in einer Ebene enthaltenen Punk-n A_1, A_2, A_3, A_4 und B_1, B_2, B_3, B_4 nennt der Verfasser conjugirte adrangel (quadrangles conjugués), wenn, wie man sie auch in ne Ebene legen mag, ihre entsprechenden Punkte (A_i, B_i) vier are von Punkten bilden, welche in Bezug auf einen Kreis con-girt sind.

Zu einem Quadrangel A giebt es eine unendliche Anzahl njugirter Quadrangel B, und alle diese Quadrangel B sind unter ch ähnlich. Ein Quadrangel ist nur in dem Falle sich selbst njugirt, wenn seine vier Ecken auf einem Kreise liegen. Die er Dreiecksflächen $A_2A_3A_4$, $A_3A_1A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ eines Qua-angels A sind bezüglich proportional den entsprechenden Drei-ksflächen des conjugirten Quadrangels B. Die bezüglichen rhältnisse dieser vier Flächen bezeichnet der Herr Verfasser rch $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4$, wobei $\Sigma\lambda_i = 0$ zu setzen ist. Sind $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \varrho_4$ e Abstände der vier Ecken des ersten Quadrangels von den tsprechenden des conjugirten, so besteht bei jeder Lage der iden Quadrangel die Relation $\lambda_1\varrho_1^2 + \lambda_2\varrho_2^2 + \lambda_3\varrho_3^2 + \lambda_4\varrho_4^2 = C$, o C eine nur von den Dimensionen der beiden Quadrangel ab-ingige Constante bedeutet. Hieraus wird der Schluss gezogen, ss, wenn die drei Ecken A_1, A_2, A_3 des Quadrangels A auf drei liebigen Kreisen liegen, welche bezüglich zu Mittelpunkten die

entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_3 des conjugirten Quadrang haben, die vierte Ecke A_4 auf einem vierten Kreise liegt, we sein Centrum in B_4 hat. Im Allgemeinen giebt es sechs schiedene Lagen der Art für eine Figur, dass drei ihrer P A_1, A_2, A_3 bezüglich auf drei Kreisen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ liegen. Sind nach die sechs möglichen Lagen gegeben, so existirt im A meinen nur ein Punkt A_4 in dieser Figur, dessen entsprech sechs Lagen auf einem Kreise $\mathfrak{B}_4$ enthalten sind. Eine nahme tritt nur in dem Fall ein, dass das Dreieck $A_1A_2A_3$ lich ist mit dem Dreieck $B_1B_2B_3$, welches aus den Centren drei Kreise $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ gebildet ist. In diesem Falle giebt es unendliche Zahl von Punkten A_4, denen diese Eigenschaft kommt; es sind das alle die Punkte, welche auf dem dem D eck $A_1A_2A_3$ umgezeichneten Kreise gelegen sind. Liegt die sonderheit vor, dass die drei Punkte A_1, A_2, A_3 in einer Ger gelegen sind, so ist der Kreis $\mathfrak{B}_4$ durch eine Gerade b zu setzen, und diese Gerade bewahrt ihre Richtung, wenn die Ra der Kreise $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ sich ändern, falls man nur ihre Mittelpu unverändert lässt.

Diese Theorie conjugirter Quadrangel steht in enger bindung mit einigen kinematischen Gesetzen, die von H Tchebychef in seiner Schrift „Sur les plus simples systè articulés qui fournissent un mouvement rectiligne approxim au quatrième et au cinquième ordre" (Petersb. Abh. 1881) geben wurden. Schn.

G. Halphén. Sur la théorie du déplacement. Nouv. (3) I. 296-300.

Herr C. Stéphanos hat in dem Bull. d. l. S. Philom. (7) p. 13 folgendes Theorem veröffentlicht: „Wenn ein ebenes bilde in drei beliebigen Lagen F_1, F_2, F_3 in seiner Ebene ged wird, so lässt sich F_1, F_2 und F_3 in Bezug auf drei bestim Gerade als symmetrisches Gebilde ein und derselben Fig auffassen." Indem Herr Halphén ein analoges Theorem Gebilde im Raum aufzustellen sucht, gelangt er zu einer

chen Entwickelung des Fundamentalsatzes der Kinematik, dass jeder Körper in eine beliebig gewählte andere Lage durch eine einfache Schraubenbewegung übergeführt werden kann, und giebt folgendes generelle Theorem: „Wenn ein Körper in drei verschiedenen Lagen im Raum gegebenen ist, so lässt sich jeder derselben als Symmetriegebilde eines und desselben Körpers in Bezug auf drei bestimmte Gerade auffassen, und zwar sind diese Geraden die drei gemeinsamen Perpendikel von je zwei der drei Drehaxen, um welche durch Schraubenbewegung jeder der drei Körper in die Lage des anderen übergeführt werden kann.“

Schn.

G. Gautero. Del movimento di una superficie che ne tocca costantemente un' altra fissa. Batt. G. XX. 163-193.

Eine einfache kinematische Untersuchung. Rs.

E. Habich. Théorème de cinématique. Nouv. Ann. (3) I. 458-462.

Es werde die Bewegung einer Ebene auf einer festen Ebene charakterisirt durch die beiden Rouletten (C) und (C'), von denen (C) in der festen Ebene, (C') in der beweglichen enthalten sei, und O_1 sei der augenblickliche Berührungspunkt beider, oder der augenblickliche Drehpunkt des bewegten Systems. Das augenblickliche Drehungscentrum zweiter Ordnung ist ein Punkt O_2, welcher auf der gemeinsamen Normale beider Rouletten gelegen ist und von O_1 eine Distanz $O_1O_2 = \frac{RR'}{R \pm R'}$ besitzt, wenn R und R' die Krümmungsradien der Rouletten (C) und (C') bedeuten. Sind nunmehr in der beweglichen Ebene zwei Curven (A) und (a) gegeben, welche auf der festen Ebene bezüglich die Curven (B) und (b) umhüllen, und bedeuten K' und K die Krümmungscentren bezüglich von (A) und (B), k' und k die von (a) und (b), so finden folgende Relationen statt. Die beiden Geraden $K'k'$ und Kk schneiden sich in einem Punkte L; dieser liefert,

wegung, sowie die Beziehungen zwischen den Geschwindigkeiten bestimmt. Rs.

H. Hart. Quaternion proof of the triple generation of three-bar motion. Mess. (2) XII. 32.

Der Verfasser giebt einen kurzen Beweis für Mr. S. Roberts' Theorem der dreifachen Erzeugung der Drei-Stangenbewegung. Lond., M. S. Proc. VII. p. 14, s. F. d. M. VIII. 1876. 551), welcher gleichzeitig den Nutzen der Quaternionen bei der Untersuchung der Eigenschaften der Gelenkbewegung beleuchtet.

Glr. (O.).

J. Janse. Bz. Stoomverdeelingssysteem van Gebr. Sulzer. Nieuw Arch. IX. 61-86.

Ausführliche Berechnung eines neuen Dampfverteilungssystems bei der Dampfmaschine, welche durch Gebrüder Sulzer in Winterthur auf der Pariser Weltausstellung von 1878 ausgestellt wurde. Die verschiedenen Curven, welche einzelne Punkte des Systems beschreiben, werden in Gleichungen gebracht und daraus die Form und Eigenschaften abgeleitet. G.

Capitel 3.

Statik.

A. Statik fester Körper.

J. Petersen. Statik, Foreläsninger holdte ved den polytekniske Läreanstalt. Kjöbenhavn 1881. Höst & Sön. 8°.

Ausser dem, was man in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Statik findet, enthält das vorliegende noch zwei wichtige Zusätze. Der erste ist ein Capitel über das astatische Gleich-

gewicht, in welchem die astatische Reduction eines Kräftesystems und die Bedingungen einer einzigen Resultante in überraschend einfacher Weise dargestellt sind. Der zweite giebt die Anfangsgründe der graphischen Statik, woran eine originelle Behandlung des Diagrammes eines gegliederten Systemes geknüpft ist.

Gm.

J. Petersen. Lehrbuch der Statik fester Körper. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von R. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. Höst & Sohn.

Deutsche Ausgabe des oben besprochenen Lehrbuches.

Rs.

G. B. Marsano. Dimostrazione del parallelogrammo delle forze data dal R. P. Girolamo Badano. Rivista di Mat. element. (2) IV.

Badano hat in seinen Vorlesungen über Mechanik im Jahre 1823 den jetzt mitgeteilten geometrischen und elementaren Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte gegeben. Nach der Wiedergabe dieses Beweises ist von G. B. Marsano ein Auszug der biographischen Notizen gegeben, welche einige Wochen nach dem Tode Badano's in dem Supplemento della Gazetta di Genova dell' 8. Gennaio 1848 veröffentlicht wurden. Rs.

E. Brassinne. Manière directe de ramener la composition des forces concourantes à la théorie du levier. Nouv. Ann. (3) I. 320-321.

Es wird gezeigt, dass das Hebelgesetz allein genügt, um zu beweisen, dass die Resultante zweier Kräfte P und Q, deren Angriffspunkt h ist und deren Intensitäten hm und hn sind, der Grösse und Richtung nach durch die Diagonale des Parallelogramms $hnFm$ dargestellt wird, welches über den die Kräfte repräsentirenden Geraden construirt ist. Rs.

E. Wenzel. Zur Zurückführung der schiefen Ebene auf den Hebel. Zeitschr. f. d. Realschulw. VII. 385-393.

Die Hebelstange bildet selbst die schiefe Ebene; Rollenführungen bewirken, dass die angreifenden Kräfte vorgeschriebene Winkel mit der Ebene bilden. Die vom Verfasser in Aussicht gestellten Schul-Apparate, welche in diesem Sinne die Theorie des Hebels und der schiefen Ebene gleichmässig und gleichzeitig zu demonstriren gestatten, werden sich in der Tat zur Belebung des statischen Unterrichts förderlich erweisen. Auch ist es richtig, wenn der Verfasser zum Schlusse sagt: „Es erscheinen mithin sämmtliche Maschinen auf eine einzige einfache, den Hebel, zurückfürbar." Diese Tatsache ist schon von altersher wohlbekannt; so findet man in den mechanischen Lehrbüchern von De la Hire und Kästner das Kräfteparallelogramm als einen Ausfluss der Lehre vom Winkelhebel dargestellt und damit diese Lehre überhaupt zum ersten Princip der theoretischen Mechanik erhoben. Gr.

G. Bardelli. Sui sistemi variati di forze. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 180-195.

Für ein System von Kräften, von welchen irgend eine Componente die Intensität P besitzt, werden folgende Bezeichnungen eingeführt, wobei immer nur eine der drei analogen Gleichungen wiedergegeben wird:

$D_1 = \Sigma Px\alpha,\ E_1 = \Sigma Py\alpha,\ F_1 = \Sigma Pz\alpha,\ X = \Sigma P\alpha,\ M_x = E_3 - F_2;$

ferner

$$V = XM_x + YM_y + ZM_z.$$

Ein verändertes System eines gegebenen Systems von beliebig vielen Kräften erhält man dadurch, dass man die Geraden, welche die Kräfte darstellen, sich um Linien drehen lässt, die parallel zu einer beliebigen Richtung durch die Angriffspunkte gezogen sind. Die Coordinatenaxen Ox, Oy, Oz seien in eine neue Lage Ox_1, Oy_1, Oz_1 gebracht; eine Gerade OL, deren Richtungscosinus l, m, n sind, und ein Winkel θ (die Rotationsaxe

Wenn Kräfte in der Richtung von sechs im Raume gegebenen Linien so wirken, dass die statische Summe Null ist, muss eine gewisse geometrische Bedingung von den sechs Linien erfüllt werden. Trifft dies zu, dann sagt man von den Linien, sie sind in Involution. Der Verfasser zeigt, dass die Bedingung für die Involution analytisch durch das Verschwinden einer gewissen zusammengesetzten Determinante ausgedrückt werden kann. Die Determinante ist von Cayley in den Cambr. Trans. 1861 pt. 2 gegeben. Rs.

A. Legoux. Stabilité de l'équilibre d'un point matériel attiré ou repoussé par un nombre quelconque de points matériels fixes proportionnellement aux masses et à une puissance de la distance. Nouv. Ann. (3) I. 145-153.

Man bezeichne mit m_i die Massen der anziehenden Punkte A_i, mit x_i, y_i, z_i die Coordinaten dieser Punkte, mit x, y, z die des angezogenen Punktes M, mit u_i die Entfernungen des Punktes M von den Punkten A_i, und man nehme an, dass die vom Punkte A_i auf M ausgeübte Anziehung durch $\frac{m_i}{u_i^{n+1}}$ dargestellt sei. Ferner sei $d_i = [u_i]_{x=0,\, y=0,\, z=0}$. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Stabilität des Gleichgewichtes sind dann durch drei Ungleichheiten ausgedrückt:

$$(n-1)\Sigma\frac{m_i}{d_i^{n+2}} < 0,$$

folglich $n < 1$.

$$\Sigma\frac{m_i m_{i+1} \sin^2(d_i d_{i+1})}{(d_i . d_{i+1})^{n+2}} - (2n+1)\left(\Sigma\frac{m_i}{d_{i+1}^{n+2}}\right)^2 > 0,$$

wobei $(d_i d_{i+1})$ bezeichnet den Winkel der beiden Richtungen OA_i und OA_{i+1}, O den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet. ... hält $n < \frac{1}{2}$.

... Ungleichheit ist weitläufiger; es ist aber leicht

ersichtlich, dass derselben genügt wird, wenn $n+2 \leqq 0$ ist. Ausserdem weiss man, dass das Gleichgewicht stabil ist für $n=-2$ oder für $n+1=-1$. Nach Transformation der Ungleichheit findet man, dass dieser stets genügt wird, wenn $n+1 \leqq 0$ ist. Alle drei Ungleichheiten werden erfüllt sein, wenn $n \leqq -1$ ist. Für $n=1$, d. h. für das Newton'sche Attractionsgesetz ist das Gleichgewicht nicht stabil.

Man kann dasselbe Resultat auch anders erhalten: Das Gleichgewicht ist stabil, wenn die Function

$$\varphi = \Sigma \frac{1}{n} \frac{m_i}{u_i^n}$$

durch ein Maximum, und instabil, wenn die Function durch ein Minimum geht. Wenn man die Terme dritter Ordnung vernachlässigt, kommt dies darauf zurück, die Bedingung dafür zu finden, dass ein homogenes Polynomen zweiten Grades stets negativ ist, was zu den früher gefundenen Ungleichheiten führt.

Rs.

A. Laisant. Sur certaines propriétés des centres de gravité. S. M. F., Bull. X. 40-44.

E. Laquière. Sur le théorème de M. Laisant, relatif à certaines propriétés des centres de gravité. S. M. F., Bull. X. 131-133.

E. Laquière. Sur un théorème de Pappus. Extrait d'une lettre. Nouv. Ann. (3) I. 110-111.

V. Schlegel. Sur le théorème de M. Laisant, relatif aux centres de gravité. S. M. F., Bull. X. 220-222.

1) Résal's „Note sur la généralisation du théorème de Pappus" (F. d. M. XIII. 1881. 708) hat den Verfasser veranlasst, eine frühere Studie (Sur quelques propriétés des polygones. Ass. franç. c. r. VI. 142-154) zu verallgemeinern. Das Resultat ist: „Wenn mehrere Körper derselben Art sich in demselben Sinne um parallele Axen mit derselben Winkelgeschwindigkeit

Bemerkung.

In Folge einer längeren Krankheit des Herausgebers ist trotz aufopferndster Unterstützung eine Verzögerung im Erscheinen des 14. Bandes nicht zu vermeiden gewesen. Auch haben sich trotz grösster Sorgfalt mancherlei Auslassungen und Unzuträglichkeiten eingeschlichen. Seitens der Redaction wird Alles geschehen, um diese Mängel noch nachträglich im folgenden Bande auszugleichen. Wir richten indes an die Herren Fachgenossen die ergebene Bitte, uns durch Mitteilung von etwa bemerkten Mängeln unterstützen zu wollen. Die Verzögerung im Erscheinen wird sich nur auf den 14. Band erstrecken, da alle Schritte getan sind, um den Druck des 15. Bandes zur gewohnten Zeit beginnen und beenden zu können.

Wir benutzen die Gelegenheit zur Wiederholung der Bitte an die Herren Fachgenossen, uns durch rechtzeitige Uebersendung von Separatabzügen ihrer Arbeiten, namentlich Programmen und in nicht speciell mathematischen Zeitschriften erscheinende Arbeiten zu unterstützen.

O.

l in einem Medium drehen, dessen Temperatur veränderlich bewegt sich ihr Schwerpunkt, als wenn er zu einem Körper selben Art gehörte, welcher in demselben Medium mit derben Winkelgeschwindigkeit sich um eine Axe dreht, die mit en Axen parallel ist. Diese mittlere Rotationsaxe erhält man lurch, dass man auf jeder besonderen Axe irgend einen Punkt mt und den Schwerpunkt dieser Punkte bestimmt, in welchen n sich die Massen der entsprechenden Körper concentrirt denkt. ser Schwerpunkt gehört der mittleren Axe an." Der Verser bedient sich des Quaternionencalcüls.

2) Dem Satze von Résal giebt der Verfasser folgende allmeinere Fassung: Wenn Massen von den Ecken eines gelossenen Polygons sich gleichzeitig fortbewegen und die Sei- nach demselben Bewegungsgesetze mit Geschwindigkeiten rchlaufen, die in jedem Augenblicke den durchlaufenen Seiten portional sind, wird der Schwerpunkt des Systems der beglichen Massen fest bleiben. (In 3 ist dieser Satz mit etwas ändertem Wortlaut wiedergegeben und bewiesen.) Ferner wird r Satz des Herrn Laisant elementar bewiesen.

4) Schlegel zeigt, wie mit Hülfe der Grassmann'schen Rechngsweise der Satz von Laisant gewonnen wird. Rs.

. Jung. Alcuni teoremi baricentrici. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 499-506.

. Jung. Osservazioni ed aggiunte alla nota „Alcuni teoremi baricentrici". Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 646-653.

Der Verfasser leitet eine Anzahl von Sätzen über Schwernkte von schief abgeschnittenen Cylindern mit beliebiger Basis, wie über Schwerpunkte der krummen Oberflächen jener Cylinder . Von jenen Sätzen, deren Zahl zu gross ist, um alle einln anzuführen, sei hier der folgende hervorgehoben:

„Legt man durch einen festen Punkt der zweiten Axe eines linders (d. i. derjenigen Geraden, auf der die Schwerpunkte r Perimeter aller Normalschnitte liegen) verschiedene Ebenen,

so bestimmt jede derselben mit einer festen Ebene einen Cylinderstumpf von constanter Seitenfläche." Mehrere der in dem ersten der obigen beiden Aufsätze mitgeteilten Sätze hat der Verfasser im zweiten Aufsatz zurückgezogen. Wn.

H. Résal. Correspondance. Sur une nouvelle propriété de la chaînette. Nouv. Ann. (3) I. 515-516.

A sei der Scheitel, M und M' zwei in Bezug auf Oy symmetrisch liegende Punkte, J und J' die Projectionen von M und M' auf Ox. Dann liegt der Schwerpunkt der Fläche $MJJ'M'$ im Mittelpunkt der Ordinate des Schwerpunktes des Bogens $M'AM$.
O.

H. Résal. Formules approchées relatives à l'équilibre d'une position de chaîne ou de corde pesante, comprise entre deux appuis, et très tendue. Résal J. (3) VIII 383-389.

Eine Kette wird in zwei Punkten A_0 und A_1 unterstützt gedacht, deren gerade Verbindungslinie als Axe der x angenommen wird. Es bedeuten x_1 die Entfernung von A_0 und A_1, T die Spannung in einem beliebigen Punkte der Kette, T_0 diejenige in A_0, p das Gewicht der Längeneinheit, i den Neigungswinkel der Geraden A_0A_1 gegen die Horizontale. Vorausgesetzt wird, dass die Spannung hinlänglich gross ist, nahezu ihren Maximalwert erreicht hat, und dass die Länge des Bogens A_0A_1 genügend beschränkt ist, so dass man die höheren Potenzen des Quotienten $\frac{px_1}{T_0}$ vernachlässigen kann. Als Gleichung für den Bogen ergiebt sich in erster Annäherung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p\cos i}{T_0}\left(\frac{x_1}{2}-x\right),$$

in zweiter Annäherung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p\cos i}{T_0}\left[\frac{x_1}{2}-x+\frac{p\sin i}{T_0}\left(x^2-\frac{xx_1}{2}-\frac{x_1^2}{12}\right)\right],$$

- die einer Parabel dritten Grades. Die Spannung in einem liebigen Punkte ist

$$T = T_0\left[1 - \frac{p^2\cos^2 i}{2T_0^2}\, x(x_1 - x)\right] + xp\sin i$$

l erreicht ihren grössten Wert in A_1:

$$T_1 = T_0 + x_1 p \sin i.$$

nn ε_0 den Winkel bezeichnet, den die Tangente in A_0, ε_1 n spitzen Winkel, den diejenige in A_1 mit der x-Axe bildet, erhält man in der erwähnten Annäherung

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_1 = \frac{p^2 x_1^2 \sin 2i}{\varepsilon T_0}.$$

e Betrachtungen lassen sich z. B. anwenden auf den Fall, dass ne Kette auf zwei Rollen von kleinem Durchmesser ruht, oder ss sie in A_0 an eine Widerstand leistende Masse angeknüpft , wie bei Zugbrücken etc. Sbt.

AMBEY. Solution d'une question de mécanique élémentaire. Nouv. Ann. (3) I. 254-256.

Folgende Aufgabe wird gelöst: „Ein homogener schwerer d unendlich dünner Streifen, welcher die Gestalt eines Halbeises ABC hat, wird von einem Faden gehalten, welcher an n beiden Enden des Durchmessers AB befestigt ist und durch en unendlich kleinen Ring geht. Die Gleichgewichtslagen des reifens sollen bestimmt werden, und es soll angegeben werden, nn das Gleichgewicht stabil, wann es instabil ist. Die Länge (l) s Fadens, der Radius (R) des Halbkreises ABC und das Gecht (P) des Streifens sind gegeben; das Gewicht des Fadens rd vernachlässigt." Rs.

. AZZARELLI. Momenti d'inerzia delle linee, superficie e volumi. Rom, Acc. P. d. N. L. XXXIV. 159-230.

Die Arbeit besteht aus Beispielen für die Anwendung der tegralrechnung. Rs.

E. Brassinne. Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie. C. R. XCV. 446-447.

Es wird der Ausdruck für das Trägheitsmoment eines Körpers angegeben und gezeigt, wie man dasselbe mit Hülfe einer einfachen Vorrichtung, die beschrieben wird, und die der Verfasser Schwingungswage nennt, durch Beobachtung finden kann.

Sbt.

G. Jung. Alcuni teoremi sulle forme degeneri dell' ellissoide del Culmann. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 141-146.

Mehrere Sätze werden abgeleitet, welche implicite schon in einer früheren Arbeit (s. F. d. M. XIII. 1881. 683) enthalten sind, und aus welchen folgt: „Das Culmann'sche Ellipsoid (oder eine seiner degenerirten Formen) ist ohne Ausnahme die geometrische Darstellung der Trägheitsmomente eines Massensystems (stella) in Bezug auf Ebenen." Rs.

F. Siacci. Gli assi statici di un sistema di forma invariabile. Torino, Atti XVII. 241-242.

Für einen Körper, welcher um einen festen Punkt beweglich ist, und auf welchen nicht im Gleichgewichte befindliche Kräfte von constanter Intensität und Richtung wirken, giebt es vier statische Axen. Diese hängen von einer Gleichung vierten Grades mit vier reellen Wurzeln ab, und alle ihre Eigenschaften sind in den beiden Sätzen enthalten:

„Die Ebene, welche durch zwei beliebige der Axen geht, ist senkrecht zur Ebene, in welcher die beiden anderen Axen liegen."

„Wenn man vom Anfangspunkte aus auf den Axen Segmente abträgt, welche den Sinus der Rotationen, die in das Gleichgewicht zurückführen, proportional sind, haben die Enden dieser Segmente das Baricentrum im festen Punkte."

Diese vier an den Enden liegenden Punkte werden „statische

nkte" genannt und bezüglich derselben werden vier weitere tze ausgesprochen. Rs.

DE ST.-GERMAIN. Sur les équations de l'équilibre astatique. Nouv. Ann. (3) I. 306-311.

In verschiedenen Punkten $M_1, M_2, \dots,$ eines Körpers S be-den sich die Angriffspunkte von den gegebenen Kräften $F_1, F_2, \dots,$ ren Grösse und Richtung constant bleiben, welche Lagen auch einnehmen möge. Der Verfasser sucht die notwendigen und reichenden Bedingungen dafür, dass die Kräfte F_i sich für alle gen von S das Gleichgewicht halten, also astatisches Gleichge-icht vorhanden ist. Er bekommt dadurch ohne Schwierigkeit e zwölf Bedingungsgleichungen für dieses Gleichgewicht.

Rs.

. TH. MICHAELIS. Brugbalken van de tweede orde met flaauw gebogen bovenrand en getrokken schoren. Amst., Versl. en Meded. XVII. 129-139.

Der Verfasser nennt Brückenbalken von der n^{ten} Ordnung ie, bei denen durch eine verticale Ebene zwischen zwei Pfeilern gleichgerichtete Diagonalen geschnitten werden. In vorliegen-er Arbeit werden die Spannungen solcher Balken erster und weiter Ordnung berechnet und ferner gezeigt, wie die erhalte-en Resultate in der Praxis für die Construction der Brücken enutzt werden können. G.

K. STELZEL. Grundzüge der graphischen Statik und deren Anwendung auf den continuirlichen Träger. Graz. Leuschner u. Lubensky.

Der Verfasser geht aus von dem Satze vom Kräfteparallelo-gramm und behandelt die Construction der Resultirenden be-liebig vieler an demselben Angriffspunkte wirkender Kräfte, so-wie die Zerlegung einer Kraft in Componenten, die an dem-

selben Angriffspunkte wirken. Mit Hülfe des Kräfte- un
polygons wird die Resultirende von beliebig vielen in de
Ebene an verschiedenen Angriffspunkten wirkenden Kräft
struirt und die Bedingung für das Gleichgewicht auf
Auf Grund eines Satzes über zwei Seilpolygone für d
Kräftepolygon, aber verschiedene Pole, werden die A
gelöst, ein Seilpolygon zu zeichnen, welches bei gegeben
distanz durch zwei Punkte geht, sowie ein solches, welche
drei gegebene Punkte geht; letztere Aufgabe kommt zur A
dung bei der Untersuchung der Stabilität von Bogenträge
Anschluss an die Aufgabe, eine Kraft in zwei zu ihr p
Componenten zu zerlegen, werden die Auflagerreaction
an den Enden frei aufliegenden und in gegebener Weise
ten horizontalen Trägers bestimmt; auch wird angegebe
man die Transversalkraft, d. i. die Resultirende der an
Seite eines bestimmten Querschnitts wirkenden Kräfte
Von besonderer Wichtigkeit ist die Eigenschaft des Seilp
dass das Moment einer Kraft für einen gegebenen Punk
ist dem Producte aus der Poldistanz und dem Segmente,
die auf der Kraft sich schneidenden Seilpolygonseiten
durch den Momentenpunkt zur Kraftrichtung parallelen
abschneiden; für parallele, an einem frei aufliegenden
talen Träger wirkende Kräfte repräsentiren zufolge diese
die Ordinaten des Seilpolygons, von der Schlusslinie au
ticaler Richtung gemessen, die Momente von den einzeln
schnitten. Für eine stetig verteilte Belastung geht d
polygon in die Seilcurve über, welche sich für eine g
Belastungsfläche in beliebiger Annäherung zeichnen l
einer gleichmässigen Belastung ist die Seilcurve eine Pa
verticaler Axe.

In den folgenden Abschnitten werden die entwickel
der graphischen Statik auf den continuirlichen Träger an
Es sind die Aufgaben zu lösen: 1) bei gegebener Bela
irgend einen Querschnitt Transversalkraft und Biegung
zu bestimmen, sowie diejenigen Querschnitte zu finden, fü
Transversalkraft und Moment am grössten werden; 2)

ung aufzusuchen, welche für einen gegebenen Querschnitt rösste Transversalkraft, resp. das grösste Moment zur hat.

ekannt sind nur die Lage der Stützen und die Belastungstnisse des Trägers; zur Ermittelung der Stützenreactionen en die Elasticitätsverhältnisse in Betracht. Das der gen Belastung entsprechende Seilpolygon kann construirt n; das Seilpolygon für ein Feld des continuirlichen Trägers cheidet sich von dem für den entsprechenden einfachen r nur durch die Lage der Schlusslinie. Ist dieses gezeichnet, man nur die sogenannten Normalmomente, d. h. die auf ldistanz als Momentenbasis reducirten Ordnungsmomente an tützen, zu bestimmen, welche man von den Schnittpunkten rhaltenen Schlusslinie mit den Pfeilerverticalen auf diesen agen hat, um das gesuchte Seilpolygon zu erhalten, womit die Aufgabe gelöst ist. Die Normalmomente stehen im Zunhang mit der Krümmung der elastischen Linie an den enden Stellen. Bei gegebener Momentenfläche und gem Querschnitt lässt sich, wie zuerst Mohr (Zeitschr. des kten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, Bd. XIV. 1868. 1) gezeigt hat, immer die elastische Linie zeichnen als eilcurve, deren constanter Horizontalzug durch E (Elastiodul), deren veränderliche Verticalbelastung pro Längen- der Horizontalprojection durch $\frac{M}{J}$ (M das Biegungsmoment, Trägheitsmoment des Trägerquerschnitts) dargestellt ist, venn J constant, bezüglich durch EJ und durch M. Häufig es bei der Bestimmung von Durchbiegungen horizontaler nur auf den Ort und die Grösse der grössten Einsenn; wie man diese finden kann, wird an einigen Beispielen gebener Belastung gezeigt. Die unabhängig von den Moflächen construirte elastische Linie kann umgekehrt zur mung jener dienen.

e zur Construction des Seilpolygons erforderlichen Normalte kann man mittels des sogenannten zweiten Seilpolygons d. h. des für die negative (zwei Dreiecke) und positive

Momentenfläche construirten Seilpolygons, von dem nur die ä
ren Seiten, die sogenannten Pfeilertangenten, die elastische Lin
rühren. Das zweite Seilpolygon lässt sich bei gegebenen P
tangenten mit Hülfe der Kreuzlinien zeichnen, jene aber si
der richtigen Lage der mittleren Seiten des zweiten Seilpol
bestimmt, und die mittleren Seiten können gezogen werde
bald man von jeder einen Punkt kennt. Zufolge gewisse
Mohr aufgezeigter Eigenschaften des zweiten Seilpolygons
man von jeder mittleren Seite desselben in jedem Felde
Punkt finden, also das zweite Seilpolygon zeichnen, indem
die Kreuzlinien sich für irgend welche gegebene Belastung
immer bestimmen lassen, dann die Normalmomente ern
das erste Seilpolygon construiren und somit für jeden Quer
Biegungsmoment und Transversalkraft finden. Die Construc
werden für die verschiedenen möglichen Belastungsverhä
des continuirlichen Trägers unter der Voraussetzung eine
stanten Querschnittes und gleich hoher Stützen ausgeführt.

Im Anschluss an die Ermittelung des Vorzeichens de
mente und Transversalkräfte für die verschiedenen Quers
eines mit einer einzigen Last belasteten Feldes wird unte
bei welcher gleichmässigen Belastung jene Grössen für ein
stimmten Querschnitt ihren Maximalwert erreichen, und e
den die Curven der Maximal-Transversalkräfte und M
gezeichnet, Curven, deren Ordinaten die der gefährlichste
lastungsweise entsprechenden Transversalkräfte, resp. M
darstellen. Es folgt die Betrachtung der Influenzcurven,
den Einfluss der Lage einer Einzellast auf das Zeichen u
Grösse der Transversalkraft, resp. des Momentes in eine
stimmten Querschnitte veranschaulichen; mit Hülfe der
kann man am besten die Maximal-Transversalkräfte
Momente in Folge der Wirkung eines Einzellastensystems
suchen.

Ferner wird der Einfluss einer ungleichen Höhe der S
auf Momente und Transversalkräfte untersucht und zum S
der continuirliche Träger mit veränderlichem Querschn
handelt.

Die vom Verfasser benutzten Quellen sind an jeder Stelle angegeben. Sbt.

G. Battaglini. Relazione sulla memoria del sig. Gebbia: „Sugli sforzi interni dei sistemi articolati.“ Rom., Acc. L. (3) VI. 201.

Herr Battaglini berichtet, auch im Namen des Herrn Beltrami, über die im Titel genannte Abhandlung des Herrn Gebbia, welche die Verallgemeinerung und Anwendung zweier in einer früheren Abhandlung des Verfassers: „Determinazione grafica degli sforzi interni nelle travature reticolari con aste sovrabbondanti“ (Atti dell' Acc. (3) vol. IX. p. 467) aufgestellten Theoreme enthält.

Sbt

B. Hydrostatik.

O. Kuntze. Analytische Untersuchungen über die Veränderungen der Axenverhältnisse, Schwerkräfte und der Rotationsgeschwindigkeiten homogen flüssiger, um ihre Axe frei rotirender cylindrischer Gleichgewichtsfiguren, durch Condensation oder Expansion bei constanter Masse und Energie. Hoppe Arch. LXVIII. 273-303.

Zunächst werden die Anziehungscomponenten eines unendlich langen homogenen elliptischen Cylinders für einen Punkt der Masse abgeleitet. Die benutzte Methode ist durchaus nicht die einfachste; auch wird nirgends erwähnt, dass die Ableitung sich nur auf innere Punkte beziehen soll, während sie für diese allein gilt. Die gefundenen Ausdrücke werden angewandt, um die Bedingungen abzuleiten, unter denen a) ein voller Kreiscylinder, b) ein elliptischer Cylinder Gleichgewichtsfigur einer rotirenden homogenen Flüssigkeit sein kann, deren Teile sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen. Daran schliesst sich

ändert geblieben. Dagegen sind die meisten Aenderungen im vierten Capitel (Aufgaben über die Berechnung von Trägheitsmomenten) vorgenommen. Drei Aufgaben (148, 152 und 192) sind neu und einige Male (nach Aufgabe 138, 149) wird darauf aufmerksam gemacht, wie man die Zahl der gestellten Aufgaben leicht vermehren kann. Die Capitel fünf (Aufgaben über die Drehung um eine feste Axe) und sechs (Aufgaben über allgemeinere Bewegungen von Punktsystemen) scheinen unverändert abgedruckt zu sein. Rs.

E. Brassinne. Questions de mécanique rationnelle. Toul., Mém. (8) IV. 106-114.

E. Brassinne. Nouvelle manière d'employer le principe de la moindre action, dans les questions de dynamique. C. R. XCIV. 169-171.

E. Brassinne. Sur un passage de la „Mécanique analytique", relatif au principe de la moindre action. C. R. XCIV 1110-1111.

E. Brassinne. Méthode générale pour la solution des problèmes relatifs aux axes principaux et aux moments d'inertie. (Balance d'oscillation pour l'évaluation des moments d'inertie). C. R. XCV. 337-338.

1) besteht aus fünf Paragraphen. § 1 enthält kurze historische Bemerkungen über das Princip der kleinsten Wirkung bis zu Lagrange; Jacobi's Aeusserungen über dieses Princip scheinen dem Verfasser unbekannt zu sein. An dem Beispiel, dass ein schwerer Punkt auf einer Curve in einer verticalen Ebene herunterfällt, wird im § 2 (abgedruckt in 2) gezeigt, wie bei Anwendung teilweiser Integration das Princip der kleinsten Wirkung zur Lösung mechanischer Aufgaben benutzt werden kann. § 3 (abgedruckt in 3) wird der Satz gewonnen: „Für ein System von Körpern, deren jeder seine besondere Geschwindigkeit habe, giebt das Princip der kleinsten Wirkung eine Beziehung zwischen der gesammten entwickelten lebendigen Kraft

und der zur Erzeugung derselben notwendigen Zeit. Wenn man unter denselben Bedingungen die Massen und die Geschwindigkeiten sich so ändern lässt, dass die Bewegungsgrösse jeder Masse unverändert bleibt, wird die gesammte lebendige Kraft sich proportional der zugehörigen Zeit ändern.“ § 4 (abgedruckt in 4) und § 5 (Balance d'oscillation employée pour le calcul des moments d'inertie) enthalten weitere Anwendungen des Princips der kleinsten Wirkung. Rs.

M. Lévy. Sur une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité. C. R. XCV. 772-774.

Die n freien materiellen Punkte eines Systems mögen nur auf einander wirken, und das zugehörige Potential Π enthalte nicht nur die Coordinaten x_i, y_i, z_i der Punkte, sondern auch die Componenten x_i', y_i', z_i' ihrer Geschwindigkeiten. Das Princip der lebendigen Kraft ist dann erfüllt, wie auch die Function Π beschaffen sei; dagegen gelten die Principe der Flächen und der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes im Allgemeinen nicht. Der Verfasser findet sechs Integrale

$$(1) \qquad \sum_i \left(m_i x_i' + \frac{\partial \Pi}{\partial x_i}\right) = \alpha, \dots,$$

$$(2) \qquad \sum_i \left[m_i (y_i z_i' - z_i y_i') + y_i \frac{\partial \Pi}{\partial z_i'} - z_i \frac{\partial \Pi}{\partial y_i'}\right] = \lambda, \dots,$$

welche in dem besonderen Falle, dass Π von den Geschwindigkeiten nicht abhängt, auf die Schwerpunkts- und auf die Flächengleichungen zurückkommen. „Diese Gleichungen haben eine einfache Bedeutung: Wenn man in irgend einem Augenblicke durch jeden der beweglichen Punkte m_i eine Gerade D_i zieht, deren Projectionen auf die Axen gleich den ersten Gliedern der Gleichungen (1) sind, und diese Geraden wie Kräfte zusammensetzt, bleiben die Geraden sich während der ganzen Bewegung statisch gleich.“ Die Centralaxe bleibt unveränderlich. Diese Gerade entspricht der unveränderlichen Ebene bei centralen Kräften. Im Speciellen wird ein System von zwei Massenpunkten betrachtet und gefunden: „Welches auch das Potential eines Systems

weier beweglicher Punkte sei, durch jeden Punkt des Raumes eht eine feste Ebene und eine feste Axe so, dass die Projecon auf die Dreiecksfläche, deren Spitzen von O und den beiden eweglichen Punkten gebildet sind, sich proportional mit der rojection auf die Axe der Geraden ändert, welche diese beiden unkte verbindet. Befindet sich O auf der unveränderlichen eraden, so steht diese Gerade senkrecht auf der festen Ebene nd fällt mit der festen Axe zusammen." Rs.

G. Morera. Sopra una formula di meccanica analitica. Lomb., Ist. Rend. (2) XV. 537-543.

Es wird direct untersucht, wie sich die Function

$$[\Phi,\Psi]=\sum_{j=1}^{j=n-r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial Q_j}\frac{\partial\Psi}{\partial P_j}-\frac{\partial\Phi}{\partial P_j}\frac{\partial\Psi}{\partial Q_j}\right)$$

verhält, wenn an Stelle von P und Q die ursprünglichen Variabeln p und q eingeführt werden. Der schliesslich für $[\Phi,\Psi]$ erhaltene Ausdruck ist von Mathieu in der „Dynamique analytique" auf Seite 217-221 indirect aus der Störungstheorie abgeleitet.

Rs.

C. Lagrange. Exposition critique de la méthode de Wronski pour la résolution des problèmes de mécanique céleste. Belg., Mém. S. E. XLIV. 1-70.

F. Folie, G. v. d. Mensbrugghe. Rapports sur ce mémoire. Belg., Bull. (3) III. 5-13.

Nach dem Verfasser und den Berichterstattern ist Wronski's Methode allgemeiner als die Methode der Variation der willkürlichen Constanten. Sie unterscheidet sich von ersterer durch die Einführung von neuen variabeln Parametern, besonders für die mittlere Geschwindigkeit W zwischen den äussersten Geschwindigkeiten auf dem variabeln Kegelschnitt, und einer neuen Auswahl von Coordinaten. Die betrachteten Kräftecomponenten sind die radiale Kraft F, die tangentielle Kraft T und die Normal-

kraft P an die Ebene der Bahn. Die Methode, ausgehend von der Relation

$$Gdt = Wd\varphi,$$

(G die Gravitation), welches die Differentialgleichung eines Kegelschnittes in dem Fall ist, wo W constant ist, geht über in die reelle Trajectorie, in der W unter dem Einfluss der Kräfte F, T, P variirt. Der Vorzug der Wronski'schen Methode vor den anderen entspringt aus der Annahme einer fictiven variabeln Masse statt der constanten Masse, der man die Centripetalkraft in den gewöhnlichen Methoden verdankt. Der unter dem Einfluss dieser fictiven Masse beschriebene Kegelschnitt stimmt besser mit der reellen Trajectorie überein, ein Resultat, welches Wronski selbst nicht bemerkt zu haben scheint. Mn. (O.).

A. H. Curtis. Notes on central forces. Mess. (2) XI. 179-190.

Die Arbeit besteht aus zwei Teilen. Der erste handelt von beweglichen Bahnen und der zweite von der Bestimmung des Kräftegesetzes, welches einer Bahn entspricht, die geometrisch auf den Kräftemittelpunkt und eine gegebene Curve bezogen ist, 1) wenn die Bahn die inverse Curve, oder 2) die reciproke Curve in Bezug auf den Kräftemittelpunkt, oder 3) die Fusspunktcurve einer bekannten Curve ist. Glr. (O.).

H. G. Zeuthen. Elementär Behandling af et Par Sätninger om et Punkts Bevägelse. Zeuthen T. (4) VI. 36-50.

Elementargeometrische Betrachtungen werden in diesem Aufsatze zum Beweis einiger Sätze über parabolische und elliptische Bewegung eines Punktes verwendet. Der Verfasser beweist erstens den bekannten Satz, dass alle Punkte, welche, der Wirkung der Schwere unterworfen, mit gegebener Geschwindigkeit in verschiedenen Richtungen hinausgeworfen werden, sich in Parabeln bewegen, welche die nämliche Leitlinie haben und eine feste Parabel berühren. Er zeigt später, dass ein ähnlicher Satz

auch für die elliptische Bewegung O nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze gilt. Um dieses aus der elliptischen Bewegung herzuleiten, betrachtet er besonders die Bewegung eines Punktes S, welche den symmetrischen Punkt des zweiten Brennpunktes F_1 in Bezug auf die Tangente in dem beweglichen Punkte X darstellt. Es wird nämlich dann die Länge der Gerade $F_1 S$ mit der Geschwindigkeit von X proportional, während zugleich die Geschwindigkeit von S die Anziehung darstellt. Diese geometrische Darstellung giebt ein einfaches Mittel nicht nur zur vollständigen Discussion der verschiedenen auftretenden Fälle, sondern auch zur Construction der Bahn. Schliesslich wird gezeigt, wie ähnliche Betrachtungen auch im Falle, dass die Anziehung von dem Centrum einer Ellipse ausgeht, verwendet werden können. Gm.

J. Morrison. Integration of the general equations of motion. Anal. IX. 100-112.

Elementare Untersuchung der elliptischen Bewegung.

Jn. (O.).

G. Dillner. Om integration af differentialeqvationerna i n-kroppar-problemet. Stockh., Öfv. 1882. No. 4. 13-20.

Dieser Aufsatz handelt von der Integration der Differentialgleichungen in dem Problem der n Körper, giebt zwei fundamentale Systeme von Gleichungen an und untersucht die Form der allgemeinsten Integrale, die diesen Systemen genügen.

E.

Gascheau. Etude sur un cas singulier du mouvement d'un point matériel. S. M. F., Bull. X. 207-219.

Gascheau. Explication de deux paradoxes apparents observés dans les solutions de quelques problèmes de mécanique rationnelle. Toul., Mém. (8) IV. 137-146.

1) Der Verfasser untersucht die Bewegung eines materiellen

Punktes, welcher von einem festen Centrum umgekehrt proportional der dritten Potenz der Entfernung angezogen wird. Die Bahn des Punktes ist eine hyperbolische Spirale, deren Pol das Attractionscentrum ist. Der materielle Punkt gelangt zum Pol nach einer endlichen Zeit T, während welcher der Radiusvector unendlich viele Umläufe um den Pol macht. Nachdem der materielle Punkt den Pol erreicht hat, verlässt er ihn in einer zur Polaraxe senkrechten Richtung, um nach derselben Zeit T den Ausgangspunkt wieder zu erreichen. In einer Note bemerkt die Redaction des S. M. F. Bull., dass sie dem Verfasser die ganze Verantwortlichkeit für seine Ansicht überlässt.

In 2) wird der Inhalt von 1) kurz angegeben und vertheidigt, sowie neben dem ersten Satze: „Ein materieller Punkt kann in einer endlichen Zeit einen unendlichen Weg zurücklegen", noch auf den zweiten Satz: „Ein materieller Punkt kann eine unendliche Zeit zur Zurücklegung eines endlichen und bestimmten Weges gebrauchen", näher eingegangen. Rs.

P. Bachmann. Ueber die Bewegung eines Punktes. Pr. Berlin.

Zunächst zeigt der Verfasser: Wenn ein Punkt von den Elementen einer unendlichen Geraden umgekehrt proportional einer Potenz seiner Entfernung von denselben angezogen wird, übt die unendliche Gerade in ihrer Richtung keine Wirkung aus; die unendliche Gerade zieht den Punkt nur in der zu ihr senkrechten Richtung an, und zwar umgekehrt proportional einer Potenz seines Abstandes, welche um eine Einheit kleiner ist, als das für die Elemente der Geraden angenommene Attractionsgesetz angiebt. Es wird nun vorausgesetzt, dass dem angezogenen Punkte im Anfange seiner Bewegung eine Geschwindigkeit ertheilt ist, deren Richtung sich in der Ebene befindet, welche durch die anziehende Gerade und den angezogenen Punkt bestimmt ist, und es wird untersucht, welche Bahn der Punkt beschreibt, wenn dieser umgekehrt proportional der ersten, dritten, vierten und zweiten Potenz seiner Entfernung von den Elementen der unendlichen Geraden angezogen wird. Rs.

G. Greenhill. On the motion of a projectile in a resisting medium. Art. Inst., Proc. XI. No. 7, XII. No. 1.

Der Verfasser giebt die Formeln für die Trajectorie wieder, ie er sie für den Fall, dass der Widerstand der Luft gegen as Geschoss sich wie die dritte Potenz der Geschwindigkeit ndert, in den Proc. R. Artil. Inst. XI. 138 mitgeteilt hatte. Die leichung für die Bahn wird transformirt. In der neuen Gleiiung kommt ein elliptisches Integral dritter Gattung vor, für elches durch Einführung der Θ-Functionen ein geschlossener usdruck erhalten wird. In entsprechender Weise wird auch er früher gewonnene Ausdruck für die Zeit, während welcher sich as Geschoss bewegt hat, umgeformt. Der Verfasser bemerkt, ass der einzige andere vollständig lösbare Fall der sei, wenn er Widerstand der Luft sich proportional der Geschwindigkeit ndert. Drei Tabellen sind beigegeben, welche Herr P. A. Mac-ahon berechnet hat, und die nur von praktischem Interesse sind.

Rs.

I. D'Ocagne. Remarques sur le pendule. Nouv. Ann. (3) I 32-33.

Für ein Kreispendel, welches sich in einem einen constanten Viderstand leistenden Mittel bewegt, werden die beiden Sätze ergeleitet: „Zwei auf einander folgende Winkel, welche das 'endel in gleichen Zeitintervallen beschreibt, sind den Winkeleschwindigkeiten, welche das Pendel in der Mitte jedes der eitintervalle hat, proportional.“ „Die Differenz zweier auf einader folgender Winkel, welche vom Pendel während gleicher eitabschnitte beschrieben werden, ist der Winkelbeschleunigung les Pendels längs der Trennungslinie der beiden Winkel proportional.“

Rs.

Th. v. Oppolzer. Beitrag zur Ermittelung der Reduction auf den unendlich kleinen Schwingungsbogen. Wien. Ber. LXXXVI. 713-732, Wien. Anz 1882. 209-216.

Der Verfasser findet, dass, wenn eine Reihe von Pend
schwingungen Störungen erleidet durch Widerstände, die d
ersten und zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional si
die Aenderung der Amplituden dem Gesetze folgt:

$$\alpha_p = \frac{\alpha_0}{(1+\beta\alpha_0)e^{\varepsilon p} - \beta\alpha_0},$$

wo α_p die Amplitude der p^{ten} Schwingung nach derjenigen
zeichnet, bei welcher die Amplitude α_0 war. ε und p bede
Constante, welche durch Beobachtung von drei Amplituden
mittelt werden können. Dies Ergebnis, welches mit den Re
taten des Herrn Gronau (Ueber die Bewegung schwinge
Körper im widerstehenden Mittel) übereinstimmt, wird vollk
men bestätigt durch die Beobachtungen, welche Herr Anto
Berlin angestellt hat. Mit Hülfe dieses Gesetzes wird die
den unendlich kleinen Bogen reducirte Schwingungsdauer
funden. Ist α_a die Anfangs-, α_e die Endamplitude einer R
von p Schwingungen,

$$T' = \frac{1}{p}(T_1 + T_2 + \cdots + T_p)$$

die aus diesen abgeleitete Schwingungsdauer, so wird die r
cirte Schwingungsdauer gegeben durch den Ausdruck:

$$T_0 = T' - \frac{T'}{\varepsilon p}\{\alpha_a^2 S'(\alpha_a\beta) - \alpha_e^2 S(\alpha_e\beta)\};$$

hier ist $S(\alpha\beta)$ eine Function, definirt durch:

$$S(\alpha\beta) = \frac{(\operatorname{arc} 1')^2}{16\alpha^2\beta^2}[\alpha\beta - \operatorname{logn}(1+\alpha\beta)].$$

In einer der Abhandlung beigefügten, von Herrn F. K. Ginze
rechneten Tafel sind die Werte von log $S(\alpha\beta)$ für die um
fortschreitenden Argumentwerte $\alpha\beta$ zwischen 0 und 4,04
halten. Sbt.

H. Résal. Sur la courbe synchrone de la cycloïd
Nouv. Ann. (3) I. 289-295.

Eine halb geometrische, halb analytische Methode wir
nutzt zu einem einfachen Beweise dafür, dass die synch

ı der Cycloide normal zu dieser ist. Ausserdem werden die ·ücke für die Bogenlänge und für den Krümmungsradius ›urve, sowie für den Inhalt derjenigen Fläche bestimmt, e von der Curve und den Coordinatenaxen begrenzt wird.

Rs.

ÉSAL. Sur les propriétés mécaniques de la lemnis- te. Nouv. Ann. (3) I. 481-490.

n Bezug auf die Tangente der Lemniscate wird der Satz sprochen: „Die Tangente bildet mit dem Radiusvector Winkel, welcher doppelt so gross ist, wie der Polar- ıl.“ Darauf werden die Ausdrücke für die Subtangente, ectification, den Krümmungsradius und die Quadratur der iscate angegeben, beziehungsweise hergeleitet.

ınalytisch gelöst wird „das Theorem von Saladini“ (Mem. t. naz. ital. I. 49. 1804): „In welcher von all' den Curven, ı einer Verticalebene liegend, denselben Anfangspunkt haben, ;t sich ein Schwerpunkt, wenn er irgend ein Bogenstück ·selben Zeit durchlaufen soll, wie die entsprechende Sehne?“ r löst der Verfasser analytisch und geometrisch das Theorem ›. Bonnet (Liouville J. IX. 1844): „Für welche unter allen n, welche denselben Anfangspunkt haben, durchläuft ein ; von jenem Anfangspunkte aus ohne Anfangsgeschwindig- allein unter der Wirkung einer gegen ein festes Centrum teten und proportional der Entfernung wirkenden Kraft l einen Bogen in derselben Zeit, welche er gebrauchen ›, um die entsprechende Sehne zurückzulegen?“

Rs.

ıN GEER. Over de beweging van stelsels, gebonden n voorwaarden, die afhangen van den tijd. Nieuw Arch. II. 1-22.

'ortsetzung der Abhandlung im vorigen Jahrgang (siehe

F. d. M. XIII. 1881. p. 691). In erster Linie wird hier von Bewegung eines Punktes auf einer Oberfläche gehandelt, d Parameter direct von der Zeit abhängen, welche demgemäss eigene Bewegung hat, und deren Form und Grösse sich gl zeitig auf bestimmte Weise verändert. Werden die Coordin eines Punktes der Oberfläche durch zwei unabhängige Grö $q_1 q_2$ und die Zeit ausgedrückt, also

$$x = f_1(q_1 q_2 t) \quad y = f_2(q_1 q_2 t) \quad z = f_3(q_1 q_2 t),$$

so werden ihre Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_1}\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_1}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_1}\frac{d^2 f_3}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial q_2}\frac{d^2 f_1}{dt^2} + \frac{\partial f_2}{\partial q_2}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\partial f_3}{\partial q_2}\frac{d^2 f_3}{dt^2} = \frac{\partial u}{\partial q_2},$$

woraus q_1 und q_2 als Function von t dargestellt werden müs Als Anwendung wird die Bewegung eines Punktes auf e Kugelfläche untersucht, deren Mittelpunkt unveränderlich während der Radius sich mit der Zeit verändert.

Indem nunmehr zu der Bewegung eines Systems überge gen wird, wird der Einfluss untersucht, welchen die Einführ von Bedingungen, die direct abhängig von der Zeit sind, auf Bewegung ausübt. In erster Linie behandelt der Verfasser Drehung eines festen Systems um eine Axe, welche nicht, wie wöhnlich angenommen wird, fest ist, sondern eine gegeb Bewegung hat. Er zeigt, dass die Bewegung der Axe kei Einfluss auf die Drehung um die Axe ausübt, entweder w die Bewegung gleichförmig und geradlinig ist, oder wenn die durch den Schwerpunkt geht. Sodann wird die Bewegung Systems untersucht in dem Falle, dass die Axe eine gleichförm Kreisbewegung hat. Die Bewegung eines festen Systems einen seiner Punkte unter der Voraussetzung, dass dieser Pu eine gegebene Bewegung hat, kommt dann zur Besprechu nach Aufstellung der allgemeinen Formeln werden die bes dern Fälle betrachtet, dass die Bewegung des Punktes geradl und kreisförmig ist. Zum Schluss wird die Aufgabe gelöst, Bewegung eines schweren Körpers zu bestimmen, welcher

mit einem Punkte auf eine horizontale Ebene stützt unter der Voraussetzung, dass diese Ebene eine bestimmte Bewegung in verticaler Richtung hat, und der besondere Fall, dass die Ebene frei fällt, behandelt. G.

GAMBEY. Solution d'une question de mécanique. Nouv. Ann. (3) I. 508-515.

Ein schwerer Punkt M, der auf der Oberfläche eines Rotationskegels mit verticaler Axe bleiben muss, wird von einem Punkt im Scheitel S des Kegels nach einem Gesetz angezogen, welches durch eine Function der Entfernung MS dargestellt wird. Diese Function soll nun so bestimmt werden, dass die Bahn von M eben ist. Es ergiebt sich

$$f(\varrho) = g\cos\theta + \frac{\lambda^2}{p\sin^3\theta}\cdot\frac{1}{\varrho^2} - \frac{\lambda^2\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\cdot\frac{1}{\varrho^3}.$$

Die Bewegung wird dann im Weiteren näher untersucht. O.

KÖKLEN. Ueber die Aufhängepunkte und Axen für isochrone Schwingungen eines Körpers. Kronecker J. XCIII. 177-183.

Die Länge des einfachen Pendels, welches isochron mit einem um eine feste Axe beweglichen Körper schwingt, sei l; ferner sei v „der Trägheitsradius, welcher einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden parallel mit der Schwingungsaxe entspricht, und d der Abstand derselben von O.“ Dann ist

$$l = \frac{v^2 + d^2}{d}.$$

OJ ist das von O auf die Schwingungsaxe gefällte Perpendikel, also J der Aufhängepunkt, durch den unter Umständen mehrere Schwingungsaxen senkrecht zu OJ gehen, und es soll die Frage untersucht werden: Welches ist der Ort der Punkte J, sowie auch die Richtung der zugehörigen Schwingungsaxen, wenn l = const.?“

a, b, c seien die Quadrate der drei durch O gehenden Hauptträgheitsradien, und zwar sei $a > b > c$; ferner sei

$$v_1 = d - \frac{l}{2} \text{ und } \frac{l^2}{4} > a.$$

Die Resultate sind dann: „Alle äusseren Aufhängepunkte für isochrone Schwingungen eines Körpers liegen auf oder zwischen den beiden Mänteln einer Fläche (J)

$$\frac{x^2}{a - ld + d^2} + \frac{y^2}{b - ld + d^2} + \frac{z^2}{c - ld + d^2} = 0,$$

welche aus einer Wellengeschwindigkeitsfläche (V_1)

$$\frac{x^2}{\left(\frac{l^2}{4} - a\right) - v_1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{l^2}{4} - b\right) - v_1^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{l^2}{4} - c\right) - v_1^2} = 0$$

durch Verlängerung ihrer Radien um die halbe Länge des isochronen einfachen Pendels abgeleitet ist. Für die Punkte auf einem Mantel von (J) giebt es nur eine Schwingungsaxe, für die anderen zwischen beiden Mänteln zwei. Durch die vier Punkte endlich, in welchen beide Mäntel zusammenstossen, gehen unendlich viele Schwingungsaxen. Also gehen überhaupt alle Axen für isochrone Schwingungen zwischen den beiden Mänteln der Grenzfläche der Aufhängpunkte (J) hindurch.“ Da $l^2 > 4a$ und $v^2 < a$ ist, sind die beiden Werte

$$d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - v^2}$$

stets reell. Man erhält daher für den zweiten Wert von d eine Grenzfläche (J'), indem man $\frac{l}{2}$ auf den Radien von V_1 nach O hin abträgt. Die angegebenen Eigenschaften von (J) lassen sich auf (J') übertragen. Jede der Flächen (J) und (J') besteht aus zwei Mänteln; die Punkte der äusseren Mäntel seien mit J und J', die der inneren Mäntel mit i und i' bezeichnet. Die Punkte zwischen J und i, bez. J' und i', welche gleichfalls Aufhängepunkte sind, mögen mit J_0 und J'_0 bezeichnet werden. Dann besteht auch der Satz: „Auf einer durch den Schwerpunkt O gehenden Geraden liegen beiderseits je vier Aufhängepunkte

isochrone Schwingungen, durch welche nur eine Schwingungs-
e geht; zwei dieser Axen durch J und i' sind parallel und
hen senkrecht auf den beiden anderen durch i und J', welche
o ebenfalls parallel sind. Für die weiteren Punkte J_0 auf
und J'_0 auf $J'i'$ (diese beiden Strecken schliessen einander
ts aus) giebt es je zwei Schwingungsaxen, nämlich die Perpen-
el, welche in J_0 oder J'_0 auf den Tangentialebenen errichtet
rden, die man durch die Gerade an die confocalen Kegel
en kann. Für alle übrigen Punkte auf der Geraden, entweder
ischen i und i' oder ausserhalb J und J', giebt es keine Axen,
welche der Körper Schwingungen machen kann, welche den-
igen des einfachen Pendels von der Länge l isochron sind.
t die Gerade die Richtung einer Asymptote der Focalhyperbel
Grundellipsoids

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

liegen auf ihr vier Punkte mit unendlich vielen Schwingungs-
en, also giebt es für jeden Körper im Ganzen acht solcher
nkte, welche einer bestimmten Länge l des isochronen ein-
chen Pendels entsprechen. Diese acht Punkte haben von O die
tfernungen

$$d = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - b}."$$

Rs.

Lipschitz. Sur le pendule. C. R. XCV. 1141-1144.

Ein schwerer Körper drehe sich frei um eine horizontale
e. Zwei Bewegungen des Körpers werden betrachtet. Die erste
durch die Bedingung charakterisirt, dass die Winkelgeschwin-
gkeit für einen Wert θ_0 des Winkels θ gleich Null ist, und die
eite dadurch, dass die Winkelgeschwindigkeit für $\pi - \theta_0$ von
gleich Null ist. Die Zeit werde im ersten Fall mit t und im
eiten Falle mit t' bezeichnet. Für t und t' hat man zwei
iptische Integrale, welche mit Hülfe passender Substitutionen
andere übergeführt werden, und zwar in elliptische Integrale

erster Art, deren Moduln complementär sind. Ferner hat der Verfasser gefunden, dass die entsprechenden elliptischen Integrale zweiter Art das ausdrücken, was Hamilton in die Mechanik unter der Bezeichnung der „angesammelten lebendigen Kraft" eingeführt hat. Dieses Integral werde im ersten Falle mit w, im zweiten Falle mit w' bezeichnet, und man transformire beide Integrale in derselben Weise wie vorher. Damit der feste Körper sich von der Ruhelage bis zum grössten Winkel von θ bewegt, müssen die neuen Variablen

$$\xi = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}} \quad \text{und} \quad \xi' = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta_0}{2}}$$

von Null bis 1 zunehmen. T, T', W, W' seien die Werte von t, t', w, w', wenn die Integrale in Bezug auf ξ und ξ' von 0 bis 1 genommen werden. Bezeichnet man die vollständigen Integrale der ersten Art mit complementären Moduln mit K und K' und die der zweiten Art mit $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ und berücksichtigt, dass $K\mathfrak{T}' - \mathfrak{T}K' = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{nicht } KT' - TK' = \frac{\pi}{2}\right)$ ist, so gelangt man zu dem Theorem

$$TW' + WT' = 2\pi N.$$

Hierin bedeutet N das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers in Bezug auf die horizontale Axe. Rs.

J. Bertrand. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. C. R. XCIV. 371-372.

Hatt. Sur la loi de déviation du pendule de Foucault. C. R. XCIV. 638-639.

1) Foucault hatte den Satz ausgesprochen: „Wenn die Verticale in der Oscillationsebene ihre Richtung im Raume ändert, werden die auf einander folgenden Lagen der Oscillationsebene durch die Bedingung bestimmt, unter sich kleinste Winkel zu bilden." Foucault wendete dieses Theorem auf den Fall an,

lass das Pendel in der Meridianebene schwingt. Der Verfasser beschäftigt sich mit dem allgemeinen Problem:

„Der Beobachter befinde sich auf der Erdoberfläche in M. Nach der Zeit dt wird er nach M' auf dem durch M gehenden Parallelkreise gelangt sein. Wenn die Oscillationsebene keine scheinbare Bewegung hätte, würde sie sich mit der Erde drehen, und ihre auf einander folgenden Lagen würden einen Parallelkreis umhüllen. J sei der Berührungspunkt in der ursprünglichen Lage, und er gelange nach J', wenn M nach M' gekommen ist. Unter den grössten Kreisen, welche durch M gehen, ist $M'K$ derjenige, welcher mit MJ den kleinsten Winkel macht, und welcher MJ in der Entfernung $MK = 90^\circ$ vom Punkte M schneidet. Der Kreis $M'J'$ würde keine Abweichung erkennen lassen; die scheinbare Rotation ist daher $J'M'K$. Sie muss berechnet werden und werde mit θ bezeichnet." Es wird gefunden

$$\theta = \cos MP \cdot \frac{JJ'}{\varrho}.$$

$\cos MP$ ist gleich dem Sinus der Breite; $\frac{JJ'}{\varrho}$ ist der Winkel, um welchen sich die Erde gedreht hat.

2) Im Anschluss an 1) giebt der Verfasser einen neuen Beweis für den Foucault'schen Satz:

$$d\alpha = \frac{dP}{2} \cdot \sin l.$$

Rs.

H. Résal. Développements sur la question relative à l'influence de la rotation de la terre sur le mouvement du pendule. Nouv. Ann. (3) I. 337-343.

Es sei C der Mittelpunkt der Erde, O der Aufhängepunkt des Pendels. Der Verfasser zerlegt die Winkelgeschwindigkeit der Erde ω, von welcher nur die erste Potenz berücksichtigt wird, in zwei Componenten, nämlich in $\omega \sin\lambda$ um OC und in $\omega \cos\lambda$ um CH, die zu OC senkrechte Gerade in der Meridianebene. Die Wirkung jeder der beiden Componenten auf die Be-

wegung des Pendels wird besonders untersucht, wobei sich zeigt, dass die letztere Componente ausser Rechnung bleiben kann.

Rs.

Ph. Gilbert. Les preuves mécaniques de la rotation de la terre. Darb. Bull (2) VI. 189-224.

Eine historische Darstellung, in welcher auch die neuesten Gyroskope besprochen sind. Vom gyroskopischen Pendel von G. Sire und von einem Apparate (Barogyroskop), welchen R. Ducretet nach des Verfassers Wünschen construirt hat, sind Abbildungen beigegeben.

Rs.

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthod de Lagrange à divers problèmes de mouvement relati Brux., S. sc. VI. 270-374; VII. 11-110.

C. Jordan. Rapport sur ce mémoire. C. R. XCV. 111-1 (1882).

Die Abhandlung hat zum Gegenstand die Untersuchung d Bewegung gyroskopischer Apparate in Bezug auf ein Axensyst (système de comparaison), welches mit einer gleichförmigen R tationsbewegung versehen ist, und zwar mit Hülfe einer Gl chung von Bour zur Anwendung der Lagrange'schen Form auf relative Bewegungen. Die Bour'sche Gleichung wird k bewiesen; die geometrische Interpretation einzelner Glieder, d darin vorkommen, giebt für jedes Problem fast ohne Rechnu die Differentialgleichungen der Bewegung als Function d passendsten Variabeln ohne Coordinatentransformation.

Diese Methode wird zuerst auf die Frage des Gleichgewic und der relativen Bewegung eines Ringes angewendet, der ei kleine angehängte Masse trägt, und der um eine horizontale A beweglich, um eine verticale Axe in gleichförmiger Rotation bewegung fortgeführt wird.

Die gefundenen Gleichungen zeigen, dass seine Bewegu

eines schweren Punktes auf einem sich gleichförmig um erticalen Halbmesser drehenden Kreis zurückgeführt wernn. Diese letztere Bewegung stellt einen einfachen Typus f welchen complicirtere Bewegungen derart zurückgeführt können, dass, wenn man bis an's Ende die Lösung des mit Hülfe elliptischer Functionen durchführt, einfache ıtionen in den Formeln genügen, um ebenso die vollstänsung der gyroskopischen Probleme zu finden.

ıs der Rechnung ergiebt sich, dass, wenn die Geschwin- gering ist, es für den schweren Punkt nur zwei Gleich- slagen giebt, welche auf der Rotationsaxe liegen. Für össere Geschwindigkeit giebt es vier Gleichgewichtslagen; den ausserhalb der Verticale gelegenen entsprechen dem Gleichgewicht. Wenn im Anfangsmoment, die relative indigkeit gleich Null gesetzt, der bewegliche Punkt keine Gleichgewichtslagen einnimmt, dann beschreibt er um die stabile Gleichgewichtslage eine Reihe periodischer Oscil- ı, deren Gesetz sich explicite durch elliptische Functionen ken lässt. Ferner kann er in dem zweiten der oben en Fälle oscilliren und immer auf derselben Seite der e bleiben.

r ein Gyroskop, bestehend aus einer Scheibe oder einem), dem man eine Rotation n um seine geometrische Axe gehat, einem innern Ringe I und einem äussern Ringe E, in gleichförmiger Rotation ω um seinen Durchmesser ZZ' ı wird, giebt es zwei oder vier Gleichgewichtslagen bezüglich eibenaxe. Ist diese Geschwindigkeit Null, so bleibt deswegen e noch nicht im Gleichgewicht, wenn nicht die Trägheitste des Torus und des Ringes I einer einfachen Relation n. In diesem Falle findet Gleichgewicht für jede Neigung ometrischen Axe zur Axe ZZ' statt. Ausser den Gleich- sfällen folgt die Oscillation der Torusaxe in Bezug auf n gleichen Gesetzen, wie die eines schweren Punktes auf Kreise, der sich um einen verticalen Durchmesser dreht, wird durch die Formeln des oben bezeichneten Problems ellt. Der Ausdruck für die Rotation der Scheibe hängt

die genannte Construction zu bekannten Resultaten und erk eine Reihe merkwürdiger durch den Apparat dargestellter nomene.

Ausserhalb seiner Gleichgewichtslagen beschreibt der Oscillationen, deren Gesetz dasselbe ist, wie das des schw Punktes im obigen Problem; die Bewegung des gyros schen Pendels wird also auf ein gelöstes Problem zu geführt. Kann man das Quadrat der Winkelgeschwindi des Trägers vernachlässigen, dann gilt das Bewegungsg für das einfache Pendel. Mit der Untersuchung einige sonderer Fälle schliesst der zweite Teil. Im dritten wird di Methode auf die gyroskopischen Bewegungen an der Ober der Erde angewendet, oder allgemein eines Planeten mit g förmiger Rotation um eine Axe. Wenn man diese Geschwi keit ω beliebig annimmt, die Schwere dagegen als consta Grösse und Richtung für alle Punkte des Körpers voraus dann erhält man die Bewegungsgleichungen in der folg einfachen Form:

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q} = Mg\frac{\partial \varrho \cos \overline{\varrho g}}{\partial q}.$$

T ist die halbe lebendige Kraft bezüglich des beweglichen stems, V das geometrische Product der Rotationsaxe des Pla in die Axe des Paares der relativen Bewegungsgrössen Körpers, q irgend eine der Variabeln, welche die Lage des pers bestimmen, M seine Masse, ϱ der Radiusvector des Sc punktes des Körpers und $\overline{\varrho g}$ der Winkel zwischen diesem Ra vector und der Richtung der Schwerkraft. Diese Gleichung noch einfacher, wenn man annimmt, (wie es bei den Experi ten mit dem Foucault'schen Gyroskop an der Erdoberfläch Fall ist), dass der Schwerpunkt des Körpers mit dem Auf punkt O des Axensystems während der ganzen Dauer der wegung ($\varrho = 0$) zusammenfällt. Man braucht dann nur die Grössen T und V zu berechnen und kann dann die Bewegungsgleichungen des Torus und seiner Ringe ni schreiben.

Im zwölften und den folgenden Paragraphen untersuch

erfasser auf diesem Wege die scheinbare Bewegung des Gyro-kops, indem er Glieder zweiter Ordnung von ω in den ver-schiedenen von anderen Geometern betrachteten Fällen berücksich-igt. (Torusaxe, ganz freie, geführt in einer Leitebene, auf einem Kegel etc.) Da aber die vereinfachende Hypothese betreffs der Schwere nicht identisch mit der von Lottner und Bour ist, so unterscheiden sich die Gleichungen durch Glieder von der Ord-nung von ω^2. Diese Gelegenheit wird zur Integration gewisser Differentialgleichungen, die noch nicht behandelt worden sind, mit Hülfe elliptischer Functionen benutzt. Ist die Torusaxe ganz frei, und kann man die Massen der Ringe vernachlässigen, dann erhält man die Werte der Winkel Θ, Ψ, φ, von denen die Lage des Torus und seiner Ringe abhängt, als explicite Functionen der Zeit. Ist die Axe des Torus gezwungen, sich zu bewegen in einer zum Planeten festen Ebene oder auf der Oberfläche eines festen Kegels, dann sind die Lagen des relativen Gleichgewichts der Torusaxe leicht zu bestimmen; man kommt auf Foucault'sche Resultate. Tritt dies Gleichgewicht nicht ein, so hat man wieder die Bewegung eines schweren Punktes auf einem sich um einen verticalen Durchmesser drehenden Kreise, (erstes Problem), welche den Typus darstellt, auf den die Oscillation der Torusaxe zu-rückgeführt wird; eine einfache Anwendung der Formeln dieses Problems würde das genaue Gesetz dieser Oscillation geben. Unter andern merkwürdigen Resultaten findet man, dass, wenn die Rotation des Planeten schnell genug, die des Torus langsam genug ist, die Axe desselben, in einer Horizontalebene erhalten, immer auf derselben Seite der Meridianebene oscillirt.

Der vierte Teil der Arbeit behandelt die Fälle der schein-baren Bewegung eines gyroskopischen Systems auf der Erdober-fläche, in denen die Schwere zu der Rotation des Planeten hin-zutritt, um die Torusaxe abzulenken. Das Pendel von Sire giebt Veranlassung zu dieser Untersuchung (§ XVII.). Vorausgesetzt, die horizontale Aufhängungsaxe des Pendels sei fest in Bezug auf die Erde, aber habe ein beliebiges Azimut; das Pendel habe irgend welche Neigung und der Torus eine gegebene Anfangs-rotation, dann erhält man die Bewegungsformeln unmittelbar aus

der Gleichung (A). Man schliesst hieraus zuerst, dass die Gleichgewichtslage des Pendelstabes einen kleinen Wink der Verticalen macht, indem sie in dem einen oder andern der Richtung der Rotation des Torus folgt; der Wert Winkels hängt übrigens vom Azimut der Oscillationseb Könnte man dem Torus eine genügend rasche Rotation ve dann würde dieser Apparat ein deutliches Bild der Be der Erde geben. Entfernt aus der Gleichgewichtslage, das Toruspendel Oscillationen, für die wieder das Ge Bewegung eines schweren Punktes gilt, der sich auf einem verticale Secante drehenden Kreise bewegt. Die Formel alle Elemente dieses idealen Pendels als Function der D gyroskopischen Pendels. Da die Abweichung in der schriebenen Construction zu wenig bemerkbar ist, so h der Verfasser einen empfindlicheren Apparat, den er Barog nennt. Ein Stahlbügel liegt auf zwei Schneiden an de eines Horizontaldiameters. Im Innern trägt er einen To zur Axe einen zweiten, zum ersten senkrechten Durchme In der unteren Verlängerung der Axe trägt der Bügel ei längs welchem man einen Schieber auf und ab beweg Da der Schwerpunkt des Torus sehr empfindlich auf d der Schneiden liegt, so hält das Gewicht des Schiebers ticalen Stift, wenn der Torus in Ruhe ist.

Die durch die Gleichung (A) gelieferten strengen Glei dieses Systems der scheinbaren Bewegung ergeben, Stift im Gleichgewicht ist, wenn er mit der Verticale Winkel E macht, der durch die Formel gegeben ist:

$$\operatorname{tg} E = \frac{C\omega n \cos L \cos\alpha}{g\mu\delta - C\omega n \sin L},$$

wo n die Anfangsgeschwindigkeit des Torus, L die Br Ortes, α der Winkel der Oscillationsebene des Stiftes Meridian, μ die Masse des Schiebers, δ seine Entfern der Linie der Schneiden, C das Trägheitsmoment de bezüglich seiner Axe ist. Daraus folgt für $\alpha = 0$, d Stift nach Norden oder Süden abgelenkt wird, je na Sinne der Rotation n, während, wenn die Oscillationsebene

eridian ist, jegliche Abweichung verschwindet. Experi- haben diese theoretischen Resultate bestätigt. Herr Jordan dass dieser neue Apparat das Foucault'sche Gyroskop zum e der Drehung der Erde ersetzen könne. Er sei auch r zu construiren. Die Formeln für die Oscillationen geben 5tigen Anhalt für die Form und die bequemsten Dimen- des Apparates und sichern dem Phänomene volle Ent- ung.

ie letzten Capitel der Arbeit geben die Bewegungsgleichungen Kreisels unter Berücksichtigung der Erdrotation. Hierüber t übrigens Foucault schon Experimente angestellt zu haben. ifferentialgleichungen können mit Hülfe von (A) leicht auf- lt werden, jedoch bietet ihre Integration, abgesehen von n besonderen Fällen, grosse Schwierigkeiten. Die Analyse fertigt die schon von Foucault gemachte Bemerkung, dass xe des Kreisels nur dann eine unveränderliche Richtung halten könne, wenn die Richtung in der Meridianebene und einen kleinen Winkel mit der Verticalen macht, ent- r nach Norden oder Süden, je nach dem Sinn der Rotation Kreisels. Mn. (O.).

EYROUS. Note sur les équations différentielles du ouvement d'un corps solide libre ou gêné sollicité par s forces quelconques. Toul., Mém. (8) IV. 81-87.

Der Verfasser verschafft sich die Differentialgleichungen des chteten Problems auf anderem Wege, als im vorigen Jahre . d. M. XIII. 1881. 708-709), nämlich nach der Lagrange'- Methode, indem er die lebendige Kraft und die Arbeit be- it. Rs.

. JARLETON. On some deductions of McCullagh's ectures on rotation." Dublin. Trans.

McCullagh's Lectures on Rotation (zuerst in den Dublin Trans. . veröffentlicht) beschäftigen sich vorzugsweise mit der Be-

Bewegung eines festen Körpers um einen festen Punkt ohne Einwirkung äusserer Kräfte. Statt des Momentenellipsoids braucht McCullagh das Gyrationsellipsoid, welches zu ersterem reciprok ist.

McCullagh beweist, dass der Schnitt auf der Centrifugal-Paar-Axe (die rechtwinklig zur Momentenaxe und zur augenblicklichen Rotationsaxe steht) mit dem Gyrations-Ellipsoid Flächen in der unveränderlichen Ebene proportional der Zeit beschreibt. Aus diesem Resultat leitet Herr Jarleton die Poinsot'sche Gleichung ab, welche die Rotationsgeschwindigkeit der Ebene, in welcher die Momenten-Axe und die augenblickliche Rotationsaxe liegen, als Function des Winkels zwischen ihnen ausdrückt. Die Ableitung geschieht mit Hülfe eines Satzes aus der Theorie der Flächen zweiter Ordnung, welcher den Winkel zwischen der Senkrechten auf einer Tangentialebene und dem Halbmesser des Berührungspunktes in Verbindung bringt mit den Axenlängen des Centralschnittes, der durch den Berührungspunkt und rechtwinklig zur Ebene der früheren Linien geht. Für diesen Satz giebt der Verfasser einen neuen und einfachen Beweis, der sich auf elementare Eigenschaften von confocalen Flächen stützt. Später erhält er dadurch eine Differentialgleichung zwischen dem Winkel, der von der Centrifugal-Paar-Axe mit einer festen Linie in der unveränderlichen Ebene gebildet wird, und dem Winkel zwischen der Momentenaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe. Durch Integration dieser Gleichung lässt sich die eine Grösse durch die andere ausdrücken mittels elliptischer Functionen erster und dritter Art. Bei der Ausführung der Reduction auf elliptische Functionen gelingt es, die algebraischen Zeichen und die relativen Grössen der verschiedenen Constanten zu bestimmen. Schliesslich giebt der Verfasser mit Hülfe des schon erwähnten Satzes für Oberflächen zweiten Grades einen Ausdruck für den Winkel zwischen der Momentenaxe und der augenblicklichen Rotationsaxe als Function der Zeit mittels elliptischer Functionen erster Ordnung. Weiter kommt der Verfasser zu dem Satz, dass die Normale an den Kegel, welchen die augenblickliche Rotationsaxe beschreibt, eine Krümmungslinie auf dem

.tionsellipsoid ist. Er verbessert auch einen Zeichenfehler in · der McCullagh'schen Gleichungen, die er weitläufig unter-t. Csy. (O.).

Hess. Ueber das Problem der Rotation. Klein Ann. X. 461-470.

Die Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt ür die zwei Fälle bereits gelöst: 1) Der Körper bewegt sich seinen Schwerpunkt; 2) ein Umdrehungskörper rotirt um n festen Punkt seiner Axe. Der Verfasser zeigt, dass für n beliebigen starren Körper vom Gewichte P, welcher um n festen Punkt O unter dem Einflusse eines beliebig an-fenden Kräftepaares rotirt, „die Componente des wirkenden ftepaares bezüglich der Richtung der Schwere während der zen Dauer der Bewegung constant ist.“ Die Cosinus a'', b'', c'' Winkel, welche die Verticale OZ mit den drei Hauptträg-saxen (OX', OY', OZ') des Körpers bildet, können leicht be-mt werden. Wenn man diese Werte in die Euler'schen 'egungsgleichungen einsetzt, bekommt man ein System dreier ıltaner linearer Bewegungsgleichungen für die Winkelge-windigkeiten p, q, r der Drehung um OX', OY', OZ'. Indem Bedingung hinzugefügt wird, dass die drei Axen des Kräfte-res, der Figur und der Schwere in einer und derselben Ebene en, (dies findet statt, wenn die Axe des afficirenden Kräfte-res, welches die Bewegung im Anfang hervorbringen soll, in durch die Figuraxe, die Verbindungslinie des festen Punktes ıit dem Schwerpunkte S, gelegte verticale Ebene fällt), er-man die beiden Sätze: „Die Grösse des Kräftepaares, welches Körper angreift, ist während der ganzen Dauer der Bewegung stant.“

„Die Kräftepaaraxe beschreibt im Raume einen Kreiskegel, ıen Spitze der feste Drehpunkt ist, und dessen Axe die Rich-; der Schwere besitzt.“

Die Lösung vereinfacht sich, wenn man über die Lagen des werpunktes S und des Unterstützungspunktes O specielle

Annahmen macht. Wenn der Schwerpunkt auf einer durch (gehenden Hauptaxe liegt, reichen zur Lösung statt der Abel'schen bereits hyperelliptische Functionen aus; wenn das Kräftepaar um die Figuraxe selbst wirkt, gebraucht man nur noch ultra- elliptische Functionen, und wenn das anfängliche Kräftepaar um die Axe der Schwere wirkt, erhält man die Grössen, welche die Lagen des Systems bestimmen, in elliptischen Functionen der Zeit. „Der Kreiskegel, welchen die Kräftepaaraxe im Raume beschreibt, reducirt sich auf die Verticalaxe, so dass diese eine invariable Linie, die Kräftepaarebene (d. i. die Horizontalebene durch den festen Punkt) eine invariable Ebene vorstellt."

Rs.

A. G. GREENHILL. On the steady motion of a solid of revolution rolling on a surface of revolution under gravity. Quart. J. XVIII. 229-231.

Als Ergänzung zu einer früheren Mitteilung (Quart. J. XVII. 86-89, s. F. d. M. XII. 1880. 696) wird die Bedingung dafür hergeleitet, dass ein fester Umdrehungskörper unter der Wirkung der Schwere auf einer Umdrehungsfläche, deren Axe vertical ist, stationär rollt. Rs.

H. LEAUTE. Sur les solides d'égale résistance. C. R. XCV 1219-1220.

Résal erwähnt in seinem „Traité de Mécanique générale" Tome V. § 40 (Profil des lames du dynamomètre de Poncelet), dass Poncelet empfohlen habe, Federn von gleichmässiger Dicke anzuwenden, man aber oft für diese äussere Fläche eine parabolische Form wähle, weil man glaube, dadurch einen Körper von gleichmässigem Widerstande zu erhalten. Résal's Untersuchung führte zu keinem Resultate, welches in der Praxis benutzt werden konnte. Der Verfasser wünschte daher, die Form des äusseren Profils für einen Körper von gleichem Widerstande zu finden, wenn sich der Körper unter analogen Bedingungen befindet

die Feder eines Dynamometers. Ferner wollte er die Lö-g für die Praxis verwerten. In dem Auszuge deutet der Ver-ser an, welchen Erfolg er erzielt hat: Die Discussion seiner rmeln lasse die Beziehung zwischen der theoretischen Curve und gewöhnlichen Parabel erkennen. Wenn man mit p die Grösse bezeichnet, indem l die Länge und e_0 die halbe Dicke des ckes im Befestigungspunkte bedeuten, betrage der Fehler un-ähr $\frac{p}{2}$, falls man den gewöhnlichen Umriss nehme, sei er kleiner als $\frac{p}{25}$, falls man einen weniger einfachen Um-s wähle, welchen der Verfasser beschreibt. Rs.

GROSSMANN. Zur Theorie der Reglage. D. Uhrm. Z. VI. 9-11.

Die Theorie der Reglage besteht in der Berechnung der itdauer einer Unruheschwingung. Mittels des Trägheitsmomen-t der Unruhe A und der Kraftmomente F, welche auf die Unruhe wirken, kann man die Winkelbeschleunigung $J = \frac{F}{A}$ be-mmen. Daraus berechnet man die Winkelgeschwindigkeit, und s dieser die Zeitdauer einer Schwingung. Der Verfasser giebt , wie man das Trägheitsmoment $A = \frac{P}{g} R^2$ annähernd be-chnet. Unter den Kräften, welche auf die Unruhe wirken, ist bei weitem grösste die der Spiralfeder. Es wird gezeigt, s man das Moment derselben auf praktischem Wege bestim-n kann. Auch wird noch die Untersuchung, wie man es mit lfe der Elasticitätsgesetze berechnet, begonnen. Eine Fort-zung soll folgen. Sbt.

B. Hydrodynamik.

R. Reiff. Ueber die Principien der neueren Hy
dynamik. Habilitationsschrift. Freiburg und Tübingen. Mohr

Die allgemeinste Bewegung eines Volumenelements
Flüssigkeit kann man bekanntlich (abgesehen von der Tr
lation) ersetzen durch eine Dilatation und eine Rotation.
kann aber auch, statt die Bewegung eines Volumenelement
betrachten, nur die eines Linienelements in's Auge fassen.
Bewegung desselben lässt sich als lineare Dilatation verbu
mit einer Drehung auffassen. Die genauere Erörterung d
Zerlegung und ihres Zusammenhangs mit der ersten Art der
legung bildet den wesentlichsten Inhalt der vorliegenden Sc
Die wichtigsten Resultate, zu denen der Verfasser gelangt,
folgende: Diejenigen von einem Punkte ausgehenden Lini
mente, für welche die Veränderung ihrer Länge in einem
element der Länge selbst umgekehrt proportional ist, bilde
Radien einer Fläche zweiter Ordnung. Die Axen dieser F
heissen die Hauptdilatationsaxen. Für incompressible Fl
keiten ist die Fläche ein Hyperboloid, auf dessen Asymp
kegel diejenigen vom Mittelpunkte ausgehenden Linienele
liegen, die keine Dilatation erleiden. Die Rotationsgeschw
keiten der verschiedenen von einem Punkte ausgehenden L
elemente sind verschieden nach Grösse und Richtung.
Rotationsgeschwindigkeiten bestehen aus zwei Teilen, 1
derjenigen Rotation, die bei der Dilatation des Volumenele
die einzelnen Radien dieses Elements erleiden, 2) aus
allen Radien gemeinsamen Teile; letzterer ist gleich der Rota
geschwindigkeit des Volumenelements bei der ersten A
Zerlegung. Der eben genannte zweite Teil hat noch fol
Bedeutung: Er stellt die Rotationsgeschwindigkeiten der H
dilatationsaxen dar; man kann ihn aber auch auffassen als
leren Wert der Rotationsgeschwindigkeiten der verschie
von einem Punkte ausgehenden Radien. Erwähnt mag e
noc hwerden, dass es im Allgemeinen drei von einem Punkt

de Linienelemente giebt, die bei der Elementarbewegung ihre ıng nicht ändern, und dass diese schief zu einander stehen. [ach des Referenten Ansicht sind Erörterungen, wie die skizzirten, wenn ihre Resultate auch nur zum Teil neu ıützlich. Die Ableitungen, die der Verfasser in der vorliegen- .rbeit giebt, lassen indessen zu wünschen übrig. Nament- st der folgende principielle Irrtum zu rügen. Bei der ntarbewegung beschreibe ein Linienelement den Winkel nd es seien die Projectionen des Winkels εdt auf die Coor- nebenen resp. ϑdt, ιdt, $\varkappa dt$, so sollen nach des Verfassers ıt ϑ, ι, $\varkappa$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit des hteten Linienelements sein. Das ist unrichtig; es müsste mit dem Worte Winkelgeschwindigkeit etwas anderes ge- sein, als man sonst in der Mechanik darunter versteht, as wieder ist nirgends gesagt.

ı einem Schlussparagraphen wird die Combination einer otatorischen Bewegung der ganzen Flüssigkeit mit Poten- vegung behandelt, ohne dass sich wesentlich Neues er- Die Einleitung endlich enthält historische Notizen über die en, in denen die Elementarbewegung einer Flüssigkeit erörtert ist. Wn.

ↄWNSEND. On a property in the theory of the ıtational strain of an incompressible lamina in the ne of its mass. Herm. 1882.

ɜweis des folgenden Satzes: Wenn bei einer rotationslosen ung einer ebenen Flüssigkeitslamelle in ihrer Ebene die inien und ihre Orthogonalen für die Maximalverschiebung ɔlecüle durch die Gleichungen

$$r^n \cos(n\vartheta) = a^n \quad \text{und} \quad r^n \sin(n\vartheta) = b^n$$

tellt werden, so sind die Gleichungen der entsprechenden ı für die grösste Dilatation von der Form:

$$r^{\frac{1}{2}n} \cos\left(\frac{1}{2} n\vartheta\right) = a^{\frac{1}{2}n} \quad \text{und} \quad r^{\frac{1}{2}n} \sin\left(\frac{1}{2} n\vartheta\right) = b^{\frac{1}{2}n}.$$

Csy. (Wn.).

J. J. Thomson. On the vibrations of a vortex ri[ng] and the action upon each other of two vortices i[n a] perfect fluid. Phil. Trans. CLXXIII. 493-521.

Die in der Arbeit behandelten Fragen sind folgende: 1) W[enn] der Querschnitt eines Wirbelrings klein ist gegen seine Oeffn[ung], so werden die Schwingungen untersucht, welche die innere [Axe] (d. i. die Verbindungslinie der Mitten der Querschnitte) ausfü[hren] kann, falls dieselbe stets nur wenig von der Kreisform abwe[icht]. 2) Es wird nach der Wirkung gefragt, welche zwei dera[rtige] Wirbelringe scheinbar auf einander ausüben, die sich so bewe[gen], dass sie stets um ein grosses Vielfaches ihres Durchmessers [von] einander entfernt bleiben. Die Flüssigkeit, in der sich die R[inge] befinden, ist dabei als incompressibel und reibungslos ange[nom]men. Die rein kinematische Methode,nach der beide Fragen be[han]delt werden, beruht auf dem Satze, dass, wenn $\Gamma(x, y, z, t)$ [= 0] die Gleichung einer Fläche ist, welche immer dieselben Fl[üssig]keitsteilchen enthält, auch

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u\frac{\partial \Gamma}{\partial x} + v\frac{\partial \Gamma}{\partial y} + w\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = 0$$

ist; dabei sind u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten[, die] Differentialquotienten aber partielle. Da die Oberfläche [des] Wirbelrings stets aus denselben Teilchen bestehen muss, [ist] (A) auch die Bedingung dafür, dass $\Gamma(x,y,z,t) = 0$ die Glei[chung] der Oberfläche eines Wirbelrings ist. Diese Bedingung in [Ver]bindung mit den bekannten Ausdrücken für die Rotatio[nsge]schwindigkeit eines Teilchens genügt, wie der Verfasser [zeigt,] zur vollständigen Absolvirung der oben genannten Fragen. [Die]selben bilden nur ein Beispiel aus einer grossen Zahl von [Pro]blemen der Wirbelbewegung, die alle einer rein kinemati[schen] Lösung fähig sind: so würde u. A. eine rein kinematische [Gas]theorie (die Gasmolecüle als Wirbel gedacht) sich aufstellen l[assen], falls man nur die gegenseitigen Wirkungen der Gasmol[ecüle,] nicht aber ihre Wirkungen auf das das Gas enthaltende [Gefäss] in Betracht zieht. Auch das Problem der Gastheorie, di[e Be]wegung zweier Molecüle nach ihrem Zusammenstoss zu f[inden,]

muss sich durch rein kinematische Betrachtungen lösen lassen, also viel einfacher, als in der gewöhnlichen Gastheorie, wo das Problem des Zusammenstosses ziemlich complicirte dynamische Betrachtungen erfordert. Solche Folgerungen lassen erkennen, dass die Wirbeltheorie einen viel fundamentaleren Charakter hat, als die gewöhnliche Gastheorie, nach der die Atome aus kleinen Stücken fester Materien bestehen.

Cly. (Wn.).

A. G. Greenhill. On the rotation of a liquid ellipsoid about an axis, not a principal axis, but lying in a principal plane. Cambr., Proc. IV. 208-222.

In einer früheren Arbeit (cf. F. d. M. XIII. 1881. p. 719) hatte der Verfasser behauptet, es schiene nicht möglich zu sein, dass ein flüssiges Ellipsoid um eine andere Axe, als eine Hauptaxe rotire und dabei eine freie Oberfläche habe. Inzwischen wurde er mit der Riemann'schen Arbeit über die Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids (Göttinger Abhandl. 1861; Riemann, gesammelte Werke, p. 168) bekannt, in der gezeigt ist, dass man eine mögliche Form des Gleichgewichts erhält, falls die Rotationsaxe in einer der Hauptebenen des Ellipsoids liegt. In der vorliegenden Arbeit nun behandelt der Verfasser die obige Frage von Neuem, wobei er den umgekehrten Weg einschlägt wie Lejeune-Dirichlet und Riemann. Die genannten Autoren nehmen von vorne herein die Existenz von Flächen gleichen Druckes an, die der Ellipsoidfläche ähnlich sind, und sie bestimmen dann diejenige Bewegung der Flüssigkeit, welche mit der Existenz jener Flächen gleichen Druckes verträglich ist. Umgekehrt geht Herr Greenhill hier davon aus, dass der Flüssigkeit auf irgend eine Weise eine gewisse Bewegung erteilt ist, und untersucht dann den in einem Punkte stattfindenden Druck für den Fall, dass die Flüssigkeit von starren Wänden eingeschlossen ist. Daran schliesst sich die Erörterung der Bedingungen, die nötig sind, damit an der Oberfläche einer ellipsoidisch

begrenzten Flüssigkeitsmasse der Druck constant, und daher eine freie Oberfläche dieser Form möglich sei.

Glr. (Wn.).

H. Lamb. On the forces experienced by a solid moving in an infinite mass of liquid. Quart. J. XIX. 66-70.

Die Gleichungen, von denen die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit abhängt, sind von Thomson und Kirchhoff so abgeleitet, dass der Körper und die Flüssigkeit als ein dynamisches System betrachtet werden. Die eigentlichen hydrodynamischen Gleichungen kommen bei dieser Ableitung, die nur das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials voraussetzt, gar nicht in Betracht. Aus den Thomson-Kirchhoff'schen Gleichungen ergeben sich nun, wenn man dieselben mit den Gleichungen für die Bewegung eines freien Körpers vergleicht, die auf den bewegten Körper von der umgebenden Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte. Dieselben sind äquivalent einer Einzelkraft, deren eine Componente

$$(1) \qquad X = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) + r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w}$$

ist, und einem Kräftepaar, dessen Moment die Componenten hat:

$$(2) \qquad L = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + W\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r},$$

und zwei andere analoge. Darin sind u, v, w die linearen, p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten des Körpers, bezogen auf ein im Körper festes Axensystem, während T die lebendige Kraft der Flüssigkeit darstellt. In dem vorliegenden Aufsatze handelt es sich nun darum, diese Kräfte, statt auf dem oben angegebenen indirecten Wege, direct aus den hydrodynamischen Gleichungen abzuleiten. Dies geschieht unter Benutzung mehrerer Hülfsformeln, die sich auf ähnlichem Wege ergeben, wie der Green'sche Satz.

Wn.

A. SCHÜLKE. Die Bewegung eines Rotationskörpers in einer incompressiblen Flüssigkeit. Hoppe Arch. LXVIII. 113-150.

Der Verfasser knüpft an die bekannte Arbeit von Kirchhoff iber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, uf die keine Kräfte wirken, an (cfr. F. d. M. II. 1870. 731; Kirchhoff, Mechanik p. 233-247). Herr Kirchhoff hatte die Lösung n zwei speciellen Fällen zu Ende geführt, während er im allgemeinen Falle die Rechnung nur bis zur Aufstellung der elliptichen Integrale, von denen das Problem abhängt, durchgeführt atte. Der allgemeine Fall war dann weiter behandelt durch Köpcke (cf. F. d. M. IX. 1877. 670), der alle in der Kirchhoff'chen Lösung vorkommenden Grössen durch Thetafunctionen auslrückte. In der vorliegenden Arbeit wird zunächst dieselbe Reluction auf Thetafunctionen auf etwas einfacherem Wege vorgeommen. Die Vereinfachung gelingt durch kleine Umformungen ler Kirchhoff'schen Formeln, sowie durch passende Verfügung iber die Integrationsconstanten, resp. über die Anfangslage der Axensysteme. Endlich wird gezeigt, wie man, auch ohne die lliptischen Functionen zu benutzen, durch Discussion der transormirten Kirchhoff'schen Formeln ein deutliches Bild des Beegungsvorgangs gewinnen kann. Namentlich lässt sich die Gealt der Curve bestimmen, welche die Projection des Anfangsınktes des im Körper festen Axensystems auf eine Ebene nkrecht zur Rotationsaxe beschreibt; und daraus ergiebt sich die chraubenbewegung jenes Anfangspunktes, sowie die Richtung der otationsaxe. Wn.

DE ST.-VENANT. Des mouvements que prennent les diverses parties d'un liquide dans l'intérieur d'un vase ou réservoir d'où il s'écoule par un orifice. C. R. XCIV. 904-909, 1004-1008, 1139-1144.

Der vorliegende Aufsatz knüpft an eine im Jahre 1870 verffentlichte Arbeit von Boussinesq an (cf. F. d. M. II. 1870. 738-741), n der gezeigt war, dass der Bewegungszustand einer durch

eine Oeffnung in dünner Wand ausfliessenden Flüssigkeit bestimmt ist durch das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.$$

Dabei ist x, y, z der Punkt, auf den sich das Geschwindigkeitspotential bezieht, die Ebene der Oeffnung ist $\xi = 0$, und $F(\xi,\eta)$ verschwindet für alle Punkte ausserhalb der Oeffnung. Den obigen Ausdruck kann man auffassen als das Potential der Newton'schen Attraction, welche auf die im Punkte x, y, z befindliche Masseneinheit der Flüssigkeit ausgeübt wird durch eine dünne materielle, über die Fläche der Oeffnung ausgebreitete Schicht. Für Punkte in grösserer Entfernung von der Oeffnung kann man nun, wenn die Oeffnung klein ist, näherungsweise die Anziehung der Schicht ersetzen durch die ihres Schwerpunktes. Bei dieser Näherung ist daher die Geschwindigkeit jedes Punktes der Flüssigkeit umgekehrt proportional dem Quadrat seines Abstandes von der Mitte der Oeffnung und nach dieser Mitte hingerichtet. Diese Bemerkung führt unmittelbar zu einer graphischen Construction der Curven, in welche sich eine ursprünglich der Ebene der Oeffnung parallele Gerade allmälich deformirt. Man braucht nur um die Mitte der Oeffnung eine Halbkugel, die die Fläche der Oeffnung zur Basis hat, zu beschreiben, das Volumen derselben durch concentrische Kugeln in gleiche Teile zu teilen und zu beachten, dass jedes Teilchen auf demselben Kugelradius bleibt und in jedem Zeitintervall von einer Kugelfläche bis zur nächsten gelangt. Im Anschluss an die graphische Construction wird auch die Gleichung jener Curve aufgestellt und discutirt. Diese Betrachtungen, welche die Bewegung der Flüssigkeit in sehr weiten Gefässen, und zwar nur in Punkten, die von den Wänden entfernt sind, angenähert ergeben, lassen sich auch auf den Fall ausdehnen, dass die Flüssigkeit seitlich durch Wände begrenzt ist, welche auf der Ebene der Oeffnung senkrecht stehen und dieser Oeffnung nahe liegen. Man hat dann nur die Grundfläche unbegrenzt zu nehmen und zu der einen wirklich vorhandenen Oeffnung andere hinzuzufügen. Letztere müssen

eine derartige Lage haben, dass, wenn man alle Oeffnungen als anziehende Centra betrachtet, die zu den ursprünglich vorhandenen Wänden senkrechten Anziehungscomponenten verschwinden. Somit sind die obigen Betrachtungen nur dahin zu modificiren, dass an Stelle eines anziehenden Centrums deren unendlich viele treten. Für die Praxis genügt es, nur einige dieser Centra, die der ursprünglichen Oeffnung zunächst liegen, in's Auge zu fassen.

Wn.

J. Boussinesq. Intégration de certaines équations aux dérivées partielles, par le moyen d'intégrales définies contenant sous le signe $\int$ le produit de deux fonctions arbitraires. C. R. XCIV. 33-36.

J. Boussinesq. Équations différentielles du mouvement des ondes produites à la surface d'un liquide par l'émersion d'un solide. C. R. XCIV. 71-74.

J. Boussinesq. Sur les ondes que fait naître, dans l'eau en repos d'un canal, l'émersion d'un cylindre solide, plongé en travers dans ce canal. C. R. XCIV. 127-130.

J. Boussinesq. Sur les ondes produites par l'émersion d'un solide à la surface d'une eau tranquille, quand il y a lieu de tenir compte de deux coordonnées horizontales. C. R. XCIV. 1505-1508.

Das bestimmte Integral

$$(1)\qquad \varphi = \int_0^{\infty} f\left(x \mp \frac{t^2}{2\alpha^2}\right)\psi\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha$$

$$= \int_0^{\infty} f\left(x \mp \frac{\alpha^2}{2}\right)\psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right)d\alpha$$

genügt der linearen partiellen Differentialgleichung

$$(2)\qquad \frac{\partial^{2n}\varphi}{\partial t^{2n}} + A\frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n} = 0,$$

falls $\psi(z)$ ein Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$(\mp 1)^n \psi^{(n)}(z) + A\psi(z) = 0$$

ist, während f eine willkürliche Function ist. Das Resultat wird zunächst auf zwei bekannte Probleme angewandt, nämlich auf die Ermittelung des Wärmezustandes eines unendlich langen Stabes, der an seinem einen, im Endlichen liegenden Ende erwärmt wird, sowie auf die Bestimmung der in einem solchen Stabe sich fortpflanzenden transversalen Wellen.

Die Hauptanwendung bezieht sich auf solche Wellenbewegungen einer schweren Flüssigkeit, wie sie durch das plötzliche Herausziehen eines vorher in die Flüssigkeit getauchten Körpers entstehen. Die Wellenbewegungen einer schweren Flüssigkeit hängen bekanntlich von folgenden Gleichungen ab, in denen φ das Geschwindigkeitspotential bezeichnet, während die Ebene $z = 0$ mit der ursprünglichen Oberfläche der Flüssigkeit zusammenfällt, und die positive x-Axe die Richtung der Schwere hat:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \tau = g\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \text{ für } z = 0,$$

wozu noch eine Bedingungsgleichung für etwaige feste Grenzwände kommt. Für die hier in Rede stehende Bewegung wird nun die Annahme gemacht, dass

$$\text{für } t = \infty \text{ und für } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \infty$$

die sämmtlichen Geschwindigkeitscomponenten verschwinden. Dann ergiebt sich, dass der oben mit τ bezeichnete Ausdruck nicht nur für $z = 0$, sondern überall im Innern der Flüssigkeit verschwindet. An Stelle dieser Gleichung setzt der Verfasser weiter die folgende, welche auf dasselbe hinauskommt:

$$g\frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} = 0 \text{ und } \tau = 0 \text{ für } t = 0.$$

Wählt man jetzt noch die Zeiteinheit so, dass $g = 1$ wird, und nimmt φ von y unabhängig an, so sind die Gleichungen, von denen das Problem abhängt, folgende:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \text{ für } t = 0, \quad \varphi = 0 \text{ für } r = \infty \text{ oder } t = \infty,$$

ozu noch zwei Anfangsbedingungen kommen. Ist im Anfang ur eine Verrückung, aber keine Geschwindigkeit vorhanden, ist lso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ für } t = 0,$$

› wird die Lösung folgende:

$$\varphi = \int_0^\infty \left[f\left(x - \frac{\alpha^2}{2}, z\right) + f\left(x + \frac{\alpha^2}{2}, z\right) \right] \psi\left(\frac{t^2}{2\alpha^2}\right) d\alpha,$$

o

$$\psi(\gamma) = \int_0^{\sqrt{\gamma}} \sin(\gamma - m^2) dm,$$

rner

$$f(x,z) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x + z\eta) d\eta}{1 + \eta^2}$$

. Hierin stellt $F(x)$ die anfängliche Verrückung der Oberfläche, h. den Wert von $-\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $t = 0$, $z = 0$ dar. Die Wellenhe in einem beliebigen Punkte der Oberfläche zur Zeit t wird

$$h = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \left[F\left(x - \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) + F\left(x + \frac{t^2}{2\alpha^2}\right) \right] \psi'\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) d\alpha,$$

ıe Formel, die für grosse Werte von x in eine von Cauchy f viel umständlicherem Wege abgeleitete Formel übergeht avants étrangers I. 186). Nachdem diese Formel eine einfache ›utung erfahren, sodann kurz angedeutet ist, wie sich die Reltate gestalten, wenn im Anfang nur Geschwindigkeiten, aber ine Verrückungen vorhanden sind, zeigt der Verfasser zum hluss, dass sich die obige Lösung auch auf den Fall aushnen lässt, wo φ ausserdem noch von der Coordinate y abngt. In Bezug auf die für diesen allgemeineren Fall abgeteten Resultate müssen wir auf die Arbeit selbst verweisen.

Wn.

A. G. Greenhill. On the flow of viscous liquid in a pipe or channel. Lond., M. S. Proc. XIII. 43-46.

Das Problem der Bewegung einer schweren, reibenden Flüssigkeit in einer Röhre hängt von genau denselben Gleichungen ab, wie das der Bewegung einer reibungslosen Flüssigkeit in einem Cylinder, dessen Querschnitt dem der Röhre gleich ist, falls der Cylinder um eine zu seinen Erzeugenden parallele Axe rotirt. Die Gleichungen sind in beiden Fällen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+M=0,$$

während an der Grenzfläche $u=0$ ist. Dabei ist u für das erste Problem die Geschwindigkeitscomponente parallel der Röhrenaxe x, M eine von der Druckdifferenz, der Röhrenlänge, der Dichtigkeit und dem Reibungscoefficienten abhängige Constante, während für das zweite Problem u gleich der Strömungsfunction vermindert um $\frac{1}{4}M(y^2+z^2)$ ist, unter $\frac{1}{2}M$ die Rotationsgeschwindigkeit des Cylinders verstanden. Diese Gleichungen werden nun angewandt auf die Fälle, wo der Querschnitt der Röhre ein Kreis, eine Ellipse, ein gleichseitiges Dreieck, ein Kreisausschnitt, ein Rechteck, endlich von zwei Hyperbeln begrenzt ist. Zum Schluss wird für das erste Problem die Ausflussmenge berechnet.

Der Verfasser bemerkt selbst, dass fast alle von ihm abgeleiteten Resultate schon von Graetz gefunden seien (cf. F. d. M. XII. 1880. 704-707), der aber nur das erste der beiden oben genannten Probleme behandelt hat, auf das Problem in der zweiten Fassung dagegen nicht eingegangen ist. Wn.

M. Margules. Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. Wien. Ber. LXXXIII. 588-606. (1881).

M. Margules. Die Rotationsschwingungen flüssiger Cylinder. Wien. Ber. LXXXV. 343-368.

Es handelt sich in beiden Aufsätzen um die Bestimmung

einer ebenen Bewegung einer incompressiblen reibenden Flüssigkeit unter den folgenden Bedingungen. Die Flüssigkeit ist von zwei coaxialen Cylindern begrenzt, die um ihre Axe gegebene einfache Schwingungen mit abnehmender Amplitude ausführen, und zwar haftet die Flüssigkeit an den Cylinderwänden. In allen zur Cylinderaxe senkrechten Ebenen sind ferner die Bewegungen congruent; auch sind dieselben allein vom Abstand ϱ von der Cylinderaxe abhängig. Aeussere Kräfte wirken auf die Flüssigkeit nicht. Die Geschwindigkeitscomponenten der ebenen Bewegung sind dann

$$u = -\varphi \cdot \frac{y}{\varrho}, \quad v = \varphi \cdot \frac{x}{\varrho}.$$

Für die Function φ folgt aus den hydrodynamischen Gleichungen die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} - \frac{\varphi}{\varrho^2} - \frac{1}{k} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0,$$

worin k der Coefficient der inneren Reibung ist. Diese Gleichung wird auf bekannte Art mit Hülfe der Bessel'schen Functionen von der Ordnung 1 integrirt, und zwar kommt hier nur die Summe zweier particulärer Integrale in Frage von der Form

$$\varphi = e^{-\alpha k t} \{ C J_1 (\varrho \sqrt{\alpha}) + D Y_1 (\varrho \sqrt{\alpha}) \}.$$

Dieser Ausdruck, in dem die Constanten C, D, α complexe Grössen sind, wird, unter Benutzung der bekannten Reihen für die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art, in einen reellen und einen imaginären Teil zerlegt und dadurch gezeigt, dass die willkürlichen Constanten aus den Grenzbedingungen bestimmt werden können. Sodann wendet der Verfasser die allgemeinen Formeln zur numerischen Berechnung und Discussion folgender specieller Fälle an: 1) Der innere der beiden coaxialen Cylinder fällt fort, der äussere bewegt sich a) mit constanter Amplitude, b) so, dass das logarithmische Decrement der Amplitude $= 2\pi$ ist. 2) Der äussere Cylinder ruht, nur der innere bewegt sich. 3) Beide Cylinder sind starr verbunden. Zum Schluss zeigt der Verfasser, wie man auch die semiconvergenten Reihen der Bessel'schen Functionen für das obige Problem benutzen kann. Dadurch lässt sich allgemein beweisen, was vorher nur

an Beispielen hervortrat, dass sich die Wellenlängen einfacher Schwingungen mit wachsendem Radius festen Grenzen nähern und dass die Grenze mit wachsendem Decrement der Amplitude abnimmt.

Dies der Inhalt der zweiten Arbeit. Die erste behandelt nach derselben Methode die Flüssigkeitsbewegung innerhalb eines Cylinders und zeigt zugleich, dass keine wesentliche Aenderung der Schlussformeln eintritt, wenn die Flüssigkeit an der festen Wand gleitet, statt dort fest zu haften. Ferner wird hier die stationäre Bewegung der Flüssigkeit behandelt, die entsteht, wenn der äussere Cylinder ruht, der innere mit constanter Winkelgeschwindigkeit um die gemeinsame Axe rotirt. Wn.

M. Margules. Ueber die Bewegung zäher Flüssigkeiten und über Bewegungsfiguren. Wien. Ber. LXXXIV. 1881.

Der Verfasser entwickelt aus den hydrodynamischen Gleichungen für reibende incompressible Flüssigkeiten einige allgemeine Sätze, die sich auf stationäre Bewegungen beziehen, und von denen die folgenden hier Platz finden mögen: 1) In einem ruhenden geschlossenen Gefässe kann (bei eindeutigem Kräftepotential) keine stationäre Bewegung der Flüssigkeit stattfinden. 2) Die Summe der auf irgend eine Axe bezogenen Drehungsmomente, welche auf die stationär bewegte Flüssigkeit in einer geschlossenen Stromfläche (d. i. einer solchen, in welcher die Geschwindigkeit normal zur Fläche überall null ist) ausgeübt werden von den äusseren Kräften und den gesammten Druckkräften, ist null. Ausserdem wird für eine beliebige Bewegung einer reibenden Flüssigkeit ein Ausdruck für denjenigen Teil der lebendigen Kraft entwickelt, welcher durch die Reibung in eine andere Form der Energie verwandelt wird. Wn.

L. Grossmann. Ueber die Bestimmung der inneren Reibungsconstanten von Gasen und Flüssigkeiten mittels schwingender Scheiben. Wiedemann Ann. XVI 619-633.

Auszug aus des Verfassers Inaugural-Dissertation (Breslau O), eine wesentlich experimentelle Arbeit. Der Verfasser ɛt, dass die Formeln, welche O. E. Meyer für die Coulomb'- e Methode entwickelt hat, und die, welche Maxwell gegeben , zu grosse Werte liefern müssen. Ausserdem stellt er For- n auf, die sicher untere Grenzen geben. Diese Grenzen en den wahren Werten ziemlich nahe. „Die einfachste Me- de, die von Coulomb, soll dadurch wieder zu Ehren gebracht den, indem sie den wahren Wert der inneren Reibungscon- nte ziemlich genau (vielleicht mittels eines Reductionsfactors z genau) berechnen lässt; einen bei Weitem sichereren Auf- luss über diese Grösse wird aber die Methode von Maxwell en, indem die Grenzen hier viel enger zu ziehen sind. Da- en muss es bei der Methode der Transpiration vorläufig un- schieden bleiben, ob die gefundenen Zahlenresultate zu gross r zu klein ausfallen." Rs.

S. Schmidt. Theoretische und experimentelle Unter- uchungen über innere Reibung von Flüssigkeiten. Diss. Breslau. Köhler.

S. Schmidt. Bestimmung der Reibung von Flüssig- ɛeiten nach der Methode von Maxwell. Wiedemann Ann. XVI. 633-660.

Die zweite Arbeit ist im Wesentlichen ein Abdruck der ersten. Verfasser hat die Arbeit des Herrn L. Grossmann fortgesetzt. E. Meyer liess die Methode, welche Maxwell zur Bestimmung der bung in Gasen angegeben hatte, auf Flüssigkeiten anwenden. Boden des Gefässes, in welchem die Flüssigkeit enthalten ist, let die feste Scheibe. Der Gefässboden und die bewegliche eibe werden parallel und horizontal vorausgesetzt. Der Draht, welchem die Scheibe hängt, soll Axe der Scheibe und des fässes sein. Die Scheibe berührt die Oberfläche der Flüssig- t. Die Temperatur der Flüssigkeit soll während des Versuches stant sein, was bei des Verfassers Experimenten nicht erfüllt

so grösser ist, je kleiner die Dichtigkeit ist. Auch wird daraus Verminderung berechnet, welche die lebendige Kraft der rbelbewegungen durch eine Reibung erfährt.

Weiter wird angenommen, dass die Flüssigkeit unzusammenückbar ist und sich bis in das Unendliche an der einen Seite er ebenen Fläche erstreckt. Ohne Reibung bleibt die Wirbelwegung in der Grenzebene, mit Reibung pflanzt sie sich durch ganze Flüssigkeit fort; die Geschwindigkeit dieser Fortpflanng wird berechnet und die Uebereinstimmung mit den Unterhungen von Zöppritz (Wiedemann Ann. III. 596, s. F. d. M. X. 78. p. 649) gezeigt. Darauf kommt der Verfasser auf die bennte Frage nach der Bewegung eines Umdrehungsellipsoids in er Flüssigkeit, doch jetzt mit Berücksichtigung der Reibung l unter der Voraussetzung, dass alle Bewegungen sehr klein l stationär sind. Geht das Ellipsoid in eine Kugel über, so d die Berechnung der Widerstände und Strombahnen sehr einh. Ist aber die Bewegung nicht stationär, so gelangt man m Ellipsoid auf eine sehr complicirte Differentialgleichung. er der Voraussetzung, dass die Geschwindigkeiten endliche rte haben, ist die Auflösung mit Berücksichtigung der Reibung nlich. G.

LAMB. On the oscillations of a viscous spheroid. Lond., M. S. Proc. XIII. 51-66.

Die hydrodynamischen Gleichungen für incompressible reide Flüssigkeiten werden hier angewendet zur Bestimmung der nen Schwingungen, welche eine nahezu kugelförmige Flüssigmasse vollführen kann, falls auf dieselben keine andern te wirken, als die gegenseitige Anziehung der einzelnen Teile. das Potential dieser Anziehung, p der Druck, ϱ die Dichtig- μ der Reibungscoefficient, und setzt man

$$\varpi = \frac{p}{\varrho} - v,$$

ferner an, dass ϖ sowohl, als die Geschwindigkeitscompo- u, v, w von der Form sind $e^{-\alpha t}$ multiplicirt mit einem von

t unabhängigen Factor, so wird

$$\nabla^2\varpi = \frac{\partial^2\varpi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varpi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varpi}{\partial z^2} = 0,$$

so dass ϖ unmittelbar in eine nach Kugelfunctionen f
tende Reihe entwickelt werden kann. Jede der Geschwi
componenten nimmt die Form an

$$u = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\omega}{\partial x} + (u_1 + u_2)e^{-\alpha t},$$

wobei u_1 sowohl als u_2 der Gleichung genügen:

$$\text{(A)} \qquad \nabla^2 u + \frac{\alpha\varrho}{\mu}u = 0.$$

Berücksichtigt man bei der Lösung der Gleichung (A
noch zwei analoge Gleichungen für die beiden ander
nenten hinzukommen, die Continuitätsgleichung, so erg
wie durch eine längere Entwickelung begründet wird, d
Lösungen:

$$u_1 = \sum_n \psi_n \left\{ y\frac{\partial\chi_n}{\partial z} - z\frac{\partial\chi_n}{\partial y} \right\},$$

$$u_2 = \sum_n \left\{ \psi_{n-1}\frac{\partial\frac{r^n T_n}{a^n}}{\partial x} - \frac{n}{n+1}(\psi_n - \psi_{n-1})\frac{r^{2n+1}}{a^{2n+1}}\frac{\partial\left(\frac{a^{n+}}{r^{n+}}\right.}{\partial} \right.$$

Darin ist χ_n eine räumliche harmonische Kugelfunction
Kugelflächenfunction n^{ter} Ordnung, während ψ_n eine B
Function mit dem Index $n + \frac{1}{2}$ ist; nach der bei uns
Bezeichnung wird

$$\psi_n = \frac{1}{r^{n+\frac{1}{2}}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(r\sqrt{\frac{\alpha\varrho}{\mu}}\right);$$

ferner ist $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und a der mittlere Radius d
kugelförmigen Masse. Die obigen Summen sind über al
Zahlen n auszudehnen.

Die Lösung von der Form u_1 stellt nicht-radiale
gungen dar. Die Bestimmung der Grösse α mit Hülfe
flächenbedingungen (diese sind dadurch gegeben, dass

deren Gleichung $r = a + \Sigma S_n$ ist, wobei S_n wieder
ächenfunction darstellt, ein constanter Druck in der
s Kugelradius ausgeübt wird) ergiebt sich dann aus
nten transcendenten Gleichung. Schwieriger wird die
von α für die Lösung von der Form u_2. Die hier
transcendente Gleichung kann nur für den Fall, dass
sehr gross oder sehr klein ist, annähernd gelöst
e sich ergebenden Näherungswerte stimmen im ersten
n von Darwin, im zweiten mit den von Thomson ge-
sultaten überein. Einige Bemerkungen über die Dauer
der untersuchten Schwingungen, sowie über die da-
iden Wirbelbewegungen, endlich eine Verification der
nentwickelung abgeleiteten Resultate mit Hülfe der
-Function (dissipation function) bilden den Schluss
Die obigen Entwickelungen finden, wie der Ver-
rkt, auch auf andere Probleme eine Anwendung,
Schwingungen einer Flüssigkeitskugel, falls nur die
pannung wirkt. Wn.

CK. Ueber die Bewegungen der Luft an der
läche. Wiedemann Ann. (2) XVII. 128-148.

liegende Arbeit geht von derselben Annahme aus,
ldberg und Mohn (cf. F. d. M. VIII. 1876. 617, XII.
hren Untersuchungen zu Grunde gelegt haben. Die-
hen darin, dass man die Luft als eine incompressible
ansieht, während von äusseren Kräften nur ein der
keit proportionaler Widerstand wirkt. Das in Be-
ende Stück der rotirenden Erdoberfläche wird dabei
r die geographische Breite wird ein Mittelwert an-
Die Betrachtung wird auf horizontale Strömungen
es wird daher die verticale Geschwindigkeitscompo-
einen Teil des in Betracht kommenden Gebiets gleich
während für einen andern Teil $w = cz$ (c constant)
wird. Für die horizontalen Geschwindigkeitscom-
v gelten nun die allgemeinen hydrodynamischen

Gleichungen (ohne Reibung), nachdem darin der oben genannte Widerstand und der Einfluss der Erdrotation an Stelle der äusseren Kräfte eingeführt ist. Aus diesen Gleichungen werden zunächst durch einfache Umformungen einige Folgerungen gezogen, während die Hauptanwendungen derselben die stationäre Bewegung der Luft $\left(\frac{\partial u}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial t} = 0\right)$ betreffen. Den Gleichungen der stationären Bewegungen kann man, wie bekannt, genügen, wenn man

$$(1)\qquad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y},\quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial W}{\partial y}$$

setzt. Betrachtet man zunächst das Gebiet reiner Horizontalbewegung ($w = 0$), so ist dort

$$(2)\qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Für φ nimmt der Verfasser nun die allgemeine Lösung der letztgenannten Gleichung, während von der entsprechenden Gleichung für W nur ein particuläres Integral

$$(3)\qquad W = -\frac{\lambda}{k}\varphi$$

in Betracht gezogen wird. Dabei ist $\lambda = 2\sigma\sin\beta$, σ die Winkelgeschwindigkeit der Erde, β die geographische Breite, k der constante Factor im Ausdruck für den Widerstand. Für dasjenige Gebiet, über dem ein verticaler Luftstrom aufsteigt, wo also $w = cz$, daher $\Delta\varphi = -c$ ist, lässt sich eine der obigen particulären Lösung analoge für W aufstellen, nämlich

$$(3a)\qquad W = -\frac{\lambda}{k-c}\varphi.$$

Wendet man indessen diese particuläre Lösung auf die Grenze beider Gebiete an (was für den Fall, wo die Grenze beider Gebiete ein Kreis ist, schon von Mohn und Guldberg gemacht ist), so ergiebt sich, dass dort die Geschwindigkeit sowohl nach Grösse als Richtung plötzliche Veränderungen von endlicher Grösse erleidet. Diese unzulässige Folgerung zeigt, dass die gefundene particuläre Lösung (3a) für W nicht ausreicht zur

Lösung des gestellten Problems. Die weitere Behandlung indessen wird nicht mehr allgemein durchgeführt, sondern nur unter der Annahme, dass das Gebiet $w = cz$ das Innere eines Kreises vom Radius R einnimmt, während das Gebiet $w = 0$ ausserhalb dieses Kreises liegt; ferner wird φ und W als nur vom Abstand r vom Mittelpunkte abhängig angenommen. Die partiellen Differentialgleichungen für φ und W gehen dann in gewöhnliche Differentialgleichungen über, die sich unmittelbar integriren lassen, und durch passende Wahl der Integrationsconstanten lässt sich den Continuitätsbedingungen genügen. Die so gefundene particuläre Lösung ist jedoch den Beschränkungen $k > c$ und $c > 0$ unterworfen. Nachdem die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und den Druck weiter discutirt sind, schliesst der Verfasser mit einer Anwendung seiner Formeln auf ein Zahlenbeispiel. Den Fall eines absteigenden Luftstroms (c negativ) hat der Verfasser nicht erledigt. Eine Bemerkung über die dabei sich darbietende Schwierigkeit trifft nach des Referenten Ansicht nicht das Wesen der Sache. Der Grund liegt vielmehr darin, dass in diesem Falle das particuläre Integral (3) für das äussere Gebiet nicht mehr ausreicht. Wn.

SPRUNG. Zur Theorie atmosphärischer Wirbel. Hamb. Mitt. No 2; 27-31.

Im ersten Teile wird die Beschleunigung der relativen Bewegung eines schweren Punktes auf der rotirenden Erdoberfläche bestimmt. Die Ableitung des bekannten Ausdrucks für diese Beschleunigung ist weder besonders elegant, noch streng. Mit Hülfe des gefundenen Ausdrucks werden dann die Differentialgleichungen für die Bewegung eines schweren Punktes auf der Erdoberfläche aufgestellt, auf den eine Centralkraft wirkt, während derselbe zugleich einen Reibungswiderstand proportional der Geschwindigkeit erleidet. Diese Gleichungen werden unter der Voraussetzung, dass die geographische Breite constant ist, auf Polarcoordinaten transformirt und der dadurch gewonnene Ausdruck für die Grösse der Centralkraft discutirt. Wn.

G. Schmidt. Analogien zwischen elektrischen und Wasserströmen, calorischer und elektrischer Kraftübertragung. Wien Ber. LXXXVI. 194-205; Wien Anz. 1882. 136-137.

Als Analogon eines elektrischen Generators betrachtet der Verfasser ein Gefäss, dem in 1^s M_0 kg. Wasser zufliessen, und an das sich ein verticales cylindrisches, in horizontaler Richtung sich umbiegendes Rohr schliesst von dem Querschnitt f und solcher Gesammtlänge l, dass in Folge des dadurch hervorgerufenen Widerstandes die Ausflussmenge gleich der Zuflussmenge ist. Die Höhe H vom Wasserspiegel im Gefässe bis zum Schwerpunkte der Ausflussmündung ist die motorische Kraft des Elementes, die Ausflussmenge das Analogon der Stromstärke, und der Effect des Elementes ist $E = M_0 H$ mkg. in 1^s. Es ergiebt sich dann, dass der „Widerstand des Elementes" $r_0 = \frac{H}{M_0} = \frac{l}{kf}$ von demselben Typus ist wie der Widerstand eines elektrischen Stromes in einer Leitung von der Länge l, dem Querschnitte f und dem Leitungsvermögen k. Wird der horizontale Teil des Rohres um L mtr. verlängert, so fliesst eine kleinere Menge M in 1^s mit der constanten Geschwindigkeit u hindurch; ein Teil der motorischen Kraft wird durch den Widerstand des Elementes r, der andere z durch den Widerstand der Leitung λ verbraucht; es folgt: $\lambda = \frac{z}{M} = \frac{L}{kf}$, und $r = \frac{H-z}{M}$, also der Gesammtwiderstand $r + \lambda = \frac{H}{M}$, und die Stromstärke $J = \frac{H}{r+\lambda} = M$.

Für n über einander aufgestellte Elemente je von der motorischen Kraft H, bei denen nur das oberste Gefäss offen ist, wird die Stromstärke gefunden:

$$J = \frac{nH}{nr + \lambda} = M,$$

analog dem Ohm'schen Gesetze. Werden n Elemente über einander, und in jedem Niveau m Elemente neben einander verbunden, so erhält man für die Stromstärke den Wert

$$M = \frac{H}{\frac{r}{m} + \frac{\lambda}{n}},$$

velcher für einen bestimmten Wert von mn ein Maximum wird
n dem Falle, dass der Widerstand der Leitung gleich dem der
Kette ist.

Wenn durch eine Pumpe eine Wassermenge M kg. in 1^s
uf die Höhe H mtr. gehoben und durch eine Röhrenleitung,
eren Verlusthöhe z beträgt, dieselbe einem Wasserrade zuge-
ührt wird, so bleibt von der erzeugten potentiellen Energie
$E_a = MH$ der Teil $E_i = M(H-z) = Mh$ als der für das Rad ver-
ügbare Effect übrig, und die durch den Röhrenwiderstand in
^{s} verbrauchte und in Wärme umgesetzte Arbeit ist

$$E_w = Mz = M^2\lambda.$$

Diese Vorrichtung ist ein Analogon zu einem Elektromotor von
ler Stromstärke $J-i$, (λ der Gesammtwiderstand, $J\lambda = H$ die
lektromotorische Kraft der Batterie, $i\lambda$ die des Elektromotors),
ür den der absolute Effect $E_a = (J-i)J\lambda$, der indirecte Effect
$E_i = (J-i)i\lambda$, die in Wärme umgesetzte Arbeit

$$E_w = E_a - E_i = (J-i)^2 . \lambda$$

st. Eine zweite Analogie erhält man, wenn man das Wasserrad
rsetzt durch eine calorische Maschine, welche einen Carnot'schen
Process zwischen den absoluten Temperaturen T_1 und T_2 durch-
ührt, wobei statt h die Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$, statt M das
Zeuner'sche Wärmegewicht $\frac{Q_1}{AT_1}$ zu setzen ist, und die indirecte
Arbeit $E_i = \frac{Q_1}{AT_1}(T_1 - T_2)$ geliefert wird; wenn man ferner die
Pumpe durch eine sogenannte calorische Pumpe, d. i. eine Maschine
ersetzt, welche einen umgekehrten Carnot'schen Process zwischen
den Temperaturen T_2 und T_3 ($> T_1$) ausführt, wobei die Arbeit
$E_a = \frac{Q_3}{AT_3}(T_3 - T_2)$ erforderlich ist; die von der calorischen
Pumpe abgeleitete Wärmemenge Q_3 geht auf dem Wege zur
alorischen Maschine durch Ausstrahlung teilweise ($Q_3 - Q_1$) ver-
oren, so dass der verloren gegangene Wärmeeffect

$$E_w = \frac{Q_3 - Q_1}{A} = \frac{Q_1}{AT_1}(T_3 - T_1) = E_a - E_i$$

ist. Wenn also:

$$M = J - i = \frac{Q_1}{AT_1};\quad H = J\lambda = T_3 - T_2;$$

$$h = i\lambda = T_1 - T_2 \text{ und } (H - h) = z = (J - i)\lambda = T_3 - T_1$$

ist, so bestehen die Analogien:

$$E_a = MH = MJ\lambda \qquad = (J - i)J\lambda = \frac{Q_1}{AT_1}(T_3 - T_2),$$

$$E_i = Mh = Mi\lambda \qquad = (J - i)\,i\lambda = \frac{Q_1}{AT_1}(T_1 - T_2),$$

$$E_w = Mz = M(J - i)\lambda = (J - i)^2\lambda = M^2\lambda = \frac{Q_1}{AT_1}(T_3 - T_1).$$

Aus der Vergleichung folgen (den Bestimmungen des Congresses gemäss) die Beziehungen:

1 Volt = Einheit der elektromotorischen Kraft = 10^8 mtr.,

1 Ampère = Einheit der Stromstärken = $\frac{10^{-6}}{g}$ kg. in 1",

1 Ohm = Einheit des Widerstandes = $10^{11}.g$ mtr.
für die Stromstärke von 1 kg.

Sbt.

Capitel 5.

Potentialtheorie.

E. Beltrami. Sul potenziale magnetico. Brioschi Ann. (2) X. 241-260.

Sir W. Thomson hat gezeigt, dass bei einem Magneten eine bestimmte, durch besondere Eigenschaften ausgezeichnete Gerade und ein eben solcher Punkt existirt, die er als Axe und Centrum des Magneten bezeichnet. (Vergl. Reprints of papers on electrostatics and magnetism, London 1872). Herr Beltrami gelangt nun,

ndem er die Anziehung gleich einer beliebigen Function der Distanz setzt, zu dem Resultat, dass auch hier noch eine ausgezeichnete Gerade und ein ausgezeichneter Punkt oder Axe und Centrum existiren. Wählt man dann für das Anziehungsgesetz das Newton'sche, so stimmen die Definitionen der beiden Autoren für die Axe überein, für das Centrum dagegen nicht. Die Methode beruht darauf, dass das Potential zweier Systeme von Massenpunkten approximativ unter der Voraussetzung entwickelt wird, dass die Distanz beider Systeme sehr gross sei im Vergleiche mit ihren Dimensionen. An die ausführliche Discussion des so entstehenden Ausdruckes für das Potential schliesst sich die Vergleichung mit den Thomson'schen Ausdrücken. Den Schluss bildet eine Theorie der Trägheitsmomente von Massensystemen ohne Schwerpunkt. B.

TONELLI. Sopra la funzione potenziale in uno spazio di *n* dimensioni. Brioschi Ann. (2) X. 291-321.

Bezieht sich auf eine Arbeit von Beltrami, die 1869 in den Mem. di Bologna erschienen war. B.

F. ANGELITTI. Sull' attrazione secondo una potenza intera qualunqe della distanza. Batt. G. XX. 346-369.

Unter der Voraussetzung, dass die Anziehung einer ganzen positiven Potenz der Distanz umgekehrt proportional sei, werden folgende homogene Massenverteilungen behandelt:

1) Massen und angezogener Punkt in einer Ebene: unbegrenzte Gerade, Halbebene, Kreisbogen, Kreissector und Kreissegment (angezogener Punkt im Centrum), Parabelbogen, Ellipsenbogen.

2) Massen und angezogener Punkt nicht mehr in einer Ebene: unbegrenzte Ebene, Umdrehungsfläche und Umdrehungskörper (Punkt auf der Umdrehungsaxe). B.

J. Boussinesq. Sur un potentiel à quatre variables, qui rend presque intuitives l'intégration de l'équation du son et la démonstration de la formule de Poisson concernant le potentiel inverse à trois variables. C. R. XCIV. 1065-1069.

Um den Punkt (x, y, z) innerhalb oder ausserhalb eines Körpers wird mit beliebigem Radius r eine Kugel beschrieben; ist $d\sigma$ ein Element der Kugeloberfläche und ϱ die Dichtigkeit in $d\sigma$, so wird das über die ganze Kugel erstreckte Integral

$$\varphi = \int \frac{\varrho d\sigma}{r}$$

als das Potential mit vier Variablen bezeichnet. Dasselbe genügt der Bedingung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Verfasser giebt einige Andeutungen über den Nutzen, welchen man in der mathematischen Physik aus der Einführung von φ ziehen kann. B.

P. Opitz. Sätze über Anziehung. Göttingen. Vandenhoeck und Ruprecht.

E. J. Nanson. On the potential of a uniform spherical shell. Mess. (3) XII. 39-40.

Einfache Methode, das Potential einer sphärischen Scheibe zu bestimmen. Glr. (O.).

H. Résal. Sur la détermination du niveau potentiel de l'ellipsoide. Résal J. (3) VIII. 55-61.

De Saint-Germain. Extrait d'une lettre adressée à M. Résal. Résal J. (3) VIII. 297-299.

Unter Potential-Niveau ist der constante Potentialwert im Innern eines elektrisirten Leiters verstanden. Der erste Aufsatz leitet

auf directem Wege einen etwas schwerfälligen, und der weiteren Reduction nicht leicht zugänglichen Integral-Ausdruck für das Potential-Niveau eines dreiaxigen Ellipsoids ab, der für den Fall der Rotationsellipsoide ausgewertet wird, während der zweite Artikel zeigt, wie das Resultat sich unmittelbar in seiner einfachsten Gestalt aus dem bekannten Ausdrucke für das Potential eines homogenen Ellipsoids ergiebt. B.

St. Glaser. Ellipsoidische Flächenbelegungen, deren Wirkung auf innere Punkte der Richtung und Stärke nach constant ist. Hoppe Arch. LXVIII. 100-106.

Die Aufgabe wird behandelt, indem der Ausdruck für die Dichtigkeit der gesuchten Belegung direct aufgestellt und dann durch Rechnung die Eigenschaft verificirt wird, dass das innere Potential eine lineare Function der Coordinaten ist. B.

W. M. Hicks. On toroidal functions. Phil. Trans. CLXXI. 609-652.

Die Untersuchung wurde als Grundlage für gewisse andere in der Theorie der Wirbelbewegung betrachtet, mit specieller Berücksichtigung einer vom Verfasser in den Cambr. Phil. Soc. Proc. III. 276 aufgestellten Gravitationstheorie. Das Wort „Torus" wird als Name für „Ring" hier beschränkt auf solche, die durch Rotation eines Kreises entstehen, gebraucht. Unter „toroidal functions" sind Functionen zu verstehen, welche der Laplace'schen Gleichung genügen, und die geeignet sind, die für die Torus-Oberfläche gegebenen Bedingungen auszudrücken. Der erste Abschnitt behandelt die Theorie der Anwendung aequipotentialer Linien in der Ebene als orthogonaler Coordinaten in Problemen von drei Dimensionen, z. B. können die Linien bestehen aus dem durch zwei feste Punkte gehenden Kreissystem und dem dazu orthogonalen System. Durch Umdrehung um die Linie durch die zwei Punkte gewinnt man, wie bekannt, passende Functionen für Probleme, welche mit zwei Kugeln zusammenhängen; durch

Umdrehung um die Linie, welche die Entfernung zwischen den beiden Punkten rechtwinklig schneidet, bekommt man Functionen, die mit dem Torus zusammenhängen. Der zweite Abschnitt ist einer Entwickelung der „zonal toroidal“ Functionen gewidmet, d. h. derjenigen Functionen, die bei Symmetrie um die Axe eine Rolle spielen. Die ausserhalb und innerhalb des Torus liegenden Räume können einzeln betrachtet werden. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich mit sectorialen toroidalen Functionen, welche für den allgemeinsten Fall von nicht-symmetrischen Bedingungen gebraucht werden. Der vierte Abschnitt giebt kurz die passenden Functionen für einen Torus ohne centrale Oeffnung. Sie stehen zu den vorhergehenden Functionen in demselben Verhältnis, wie die Bessel'schen zu den Kugelfunctionen. Im fünften Abschnitt werden einige Beispiele zur Anwendung der Methode gegeben, wie das Potential eines Ringes, das elektrische Potential eines Torus und seine Capacität, das elektrische Potential eines Torus und eines elektrisirten kreisförmigen Drahtes, das Potential unter der Einwirkung eines elektrisirten Punktes und das Geschwindigkeitspotential eines Torus, der sich parallel zu seiner Axe bewegt, und endlich die Energie der Bewegung.

Der Verfasser erwähnt Riemann's „Ueber das Potential eines Ringes“, eine Note von W. D. Niven in Messenger 1880 und C. Neumann's „Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand u. s. w.“ (Halle), der in seiner Arbeit fast dieselben Orthogonalcoordinaten, wie der Verfasser braucht. Cly. (O.)

Elfter Abschnitt.

Mathematische Physik.

Capitel 1.

Molecularphysik, Elasticität und Capillarität.

A. Molecularphysik.

G. J. MICHAËLIS. Ueber die Theorie der elastischen Nachwirkung. Wiedemann Ann. XVII. 726-736.

Der Verfasser modificirt die Theorie der elastischen Nachwirkung, wie Warburg sie (Wied. Ann. IV. 1878. 232-249) gegeben hat, dadurch, dass er noch Kräfte einführt, welche die Molecüle in ihre ursprünglichen Richtungen zurückzutreiben suchen, wie W. Weber in seiner Theorie des inducirten Magnetismus ähnliche Kräfte, welche bestrebt sind, die Molecularmagnete in ihrer natürlichen Richtung festzuhalten, eingeführt hat. Darauf zeigt der Verfasser, wie verschiedene von Braun beobachtete Erscheinungen (Poggendorff Ann. CLIX. 1876. 337-389) aus dieser Theorie abgeleitet werden können. Rs.

L. SOHNCKE. Ableitung des Grundgesetzes der Krystallographie aus der Theorie der Krystallstructur. Wiedemann Ann. XVI. 489-500.

Zunächst wird gezeigt, dass das „Rationalitätsgesetz" kurz so ausgesprochen werden kann: „Wählt man drei mögliche

Kantenrichtungen als Axen, so sind die Indices aller Krystallflächen derselben Substanz ganze Zahlen." Da nun jede Theorie der Krystallstructur die Forderung stellen muss, dass dieselbe dieses Gesetz „der rationalen Flächenindices" als notwendige Folge ergiebt, löst der Verfasser die Aufgabe, im Anschluss an seine „Entwickelung einer Theorie der Krystallstructur" (Leipzig, Teubner 1879) das Rationalitätsgesetz abzuleiten. Dabei wird von der Hypothese ausgegangen: „Als Krystallfläche kann nur eine solche durch das unendlich regelmässige Punktsystem gelegte Ebene auftreten, auf welcher unendlich viele Systempunkte liegen." Rs.

B. Elasticitätstheorie etc.

A. Castegliano. Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici. Atti d. Torino, XVII. 705-713.

Früher hatte der Verfasser den Satz bewiesen: „Die Ableitung derjenigen Arbeit, welche auf die Deformation eines elastischen Körpers oder Systemes verwendet ist, in Bezug auf eine der äusseren Kräfte wird dargestellt durch die Projection auf die Richtung der Kraft von der Verrückung ihres Angriffpunktes." Mit Benutzung dieses Satzes gewinnt der Verfasser in vorliegender Arbeit das Resultat: „Wenn P und Q zwei beliebige der äusseren Kräfte sind, welche auf einen elastischen Körper oder auf ein elastisches System wirken, und wenn p und q die Verrückungen ihrer Angriffspunkte sind, ist der Coefficient von Q in dem Ausdrucke von p gleich dem Coefficienten von P in dem Ausdrucke von q." Im Folgenden werden Anwendungen von diesem Satze gemacht. Rs.

W. J. C. Sharp. On the invariants of a certain orthogonal transformation, with special reference to the theory of the strains and stresses of an elastic solid. Lond., M. S. Proc. XIII. 216-239.

Die orthogonale Transformation bezieht sich auf drei Variable x, y, z, d. h. man geht von einem rechtwinkligen Coordinatensysteme im Raume zu einem zweiten solchen mit gleichem Anfangspunkt O über. Der Herr Verfasser giebt zunächst eine systematische Zusammenstellung aller in der Mechanik fester und flüssiger Körper, Elektricität, Magnetismus, Potentialtheorie etc. auftretenden Invarianten einer solchen Transformation, insbesondere von denen, die einer oder zwei Flächen zweiten Grades mit O als Mittelpunkt zugehören. Es mögen dies einige Beispiele erläutern.

Die Gleichung der Centralaxe (in der Statik) lautet

$$\frac{\xi - \frac{N\Sigma Y - M\Sigma Z}{R^2}}{\Sigma X} = \frac{\eta - \frac{L\Sigma Z - N\Sigma X}{R^2}}{\Sigma Y} = \frac{\zeta - \frac{M\Sigma X - L\Sigma Y}{R^2}}{\Sigma Z}.$$

Da sowohl die Zähler als die Nenner je drei mit x, y, z cogrediente Grössen sind, bleiben diese Gleichungen bei der Transformation ungeändert. Eine Fläche zweiten Grades mit O als Mittelpunkt lautet:

$$U \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = \mu.$$

Hier werden die sechs Coefficienten linker Hand nach demselben Gesetz transformirt, wie $x^2, y^2, z^2, yz, zy, xy$. Dann giebt es bekanntlich drei Invarianten $D, S, \triangle$ in jenen Coefficienten, resp. vom ersten, zweiten, dritten Grade, sowie zwei unabhängige Covarianten (und zwar vom zweiten Grade in den Variabeln). Besonders wichtig für die Physik sind die beiden speciellen Fälle, wo die a, b, c, f, g, h einmal proportional sind mit

$$u^2, v^2, w^2, vw, wu, uv;$$

andererseits mit

$$uu', vv', ww', \frac{1}{2}(vw'+v'w), \frac{1}{2}(wu'+w'u), \frac{1}{2}(uv'+vu'),$$

(u, v, w cogredient mit x, y, z). Im ersten Falle verschwinden S und $\triangle$ identisch. D wird $u^2+v^2+w^2$, wie z. B. das Momentquadrat

$$(Yz-Zy)^2+(Zx-Xz)^2+(Xy-Yx)^2.$$

Im zweiten Falle verschwindet $\triangle$, D wird $uu'+vv'+ww'$, S wird $(vw'-v'w)^2+(wu'-w'u)^2+(uv'-u'v)^2$, wie z. B. die Functionen

51*

$u dx + v dy + w dz,\ u \frac{\partial \varrho}{\partial x} + v \frac{\partial \varrho}{\partial y} + w \frac{\partial \varrho}{\partial z},\ u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds} + w \frac{dz}{ds}$

in der Hydrostatik,

$$(yz' - z'x)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2$$

in der Geometrie. Ein anderer hervorragender Fall ist der, wenn a, b, c, f, g, h proportional sind mit

$\Sigma Xx,\ \Sigma Yy,\ \Sigma Zz,\ \frac{1}{2} \Sigma (Yz + Zy)$ etc. (X_i, Y_i, Z_i cogredient mit x, y, z).

Hier ist $D = \Sigma Xx + \Sigma Yy + \Sigma Zz$, wie z. B. die virtuelle Arbeit

$$\Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Hat man zwei Reihen von Grössen $a, b, c \ldots,\ a', b', c' \ldots$, so treten noch drei Combinanten E, θ, θ' auf. Ein Beispiel für E ist das Thomson'sche vollständige Differential

$$a' da + b' db + \cdots 2h' dh,$$

wo die $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$, die Zug- resp. Druckcomponenten sind. Unter die Form E fallen auch die beiden Ausdrücke

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2,\quad A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2$$

in den Euler'schen Bewegungsgleichungen. In der Hydrodynamik sind die $a, b, c \ldots$ proportional mit

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdots$$

Hier treten noch drei weitere Invarianten Ω, H, Z auf, deren Bedeutung nachgewiesen wird.

Nunmehr folgen noch einige Anwendungen dieser Invarianten. So wird in diesem Sinne der Beweis geführt, dass die Rotation eines starren Körpers um einen festgehaltenen Punkt auf die Rotation um eine Axe, und dass die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers auf eine Schraubenwindung zurückkommt. Zum Schluss wird entwickelt, wie sich die Invarianten der Druck-, sowie die Combinanten der Zug- und Druckkräfte vermöge der Invarianten der Zugkräfte allein ausdrücken lassen.

My.

R. R. Webb. Stress and strain in cylindrical and polar coordinates. Mess. (2) XI. 146-155.

Der Verfasser giebt einen Ausdruck für die Spannung in cylindrischen Coordinaten (r, θ, z) und in Polarcoordinaten in drei Dimensionen; dann bildet er die Bewegungsgleichungen in beiden Coordinatensystemen. Er betrachtet ferner die folgenden besonderen Fälle: 1) die cylindrische radiale Spannung; 2) die cylindrische transversale Spannung; 3) die gleichförmig in einer senkrecht zur Axe liegenden Ebene verteilte Torsion; 4) die sphärische radiale Spannung. Glr. (O.).

J. Boussinesq. Les déplacements qu'entraînent de petites dilatations ou condensations quelconques produites, dans tout milieu homogène et isotrope indéfini, sont calculables à la manière d'une attraction newtonienne. C. R. XCIV. 1648-1650.

Es wird der Satz gefunden: „Man kann sich vorstellen, dass die wirklichen Dilatationen in den verschiedenen Teilen eines Körpers von Verrückungen herrühren, welche in jedem Augenblicke und in jedem Punkte dieselbe Grösse, aber die entgegengesetzte Richtung der Newton'schen Attraction haben, die auf die Masseneinheit während derselben Zeit und in demselben Punkte von einer Masse ausgeübt werden würde, deren Dichte beständig proportional diesen Dilatationen wäre. Folglich ist die entgegengesetzte Verrückung, welche jedes Teilchen in die Lage des natürlichen Zustandes zurückbringen würde, in Grösse und Richtung durch die Anziehung dargestellt, welche es ausübt."

Gewisse totale Verrückungen, welche gewissen Dilatationen entsprechen, können daher nach dem Newton'schen Attractionsgesetze bei Benutzung des vorstehenden Satzes berechnet werden. Für eine Flüssigkeit gelangt man auch auf diesem Wege zu dem Resultate, welches der Verfasser in einer anderen Mitteilung (C. R. XCV. 1504) veröffentlicht hat. Rs.

J. Boussinesq. Équilibre d'élasticité d'un solide limi par un plan. C. R. XCV. 1052-1055.

J. Boussinesq. Sur la transmission d'une pressi oblique, de la surface à l'intérieur, dans un sol isotrope et homogène en équilibre. C. R. XCV. 1149-1

1) In einer 1878 veröffentlichten Abhandlung (C. R. LXXX 1260, siehe F. d. M. X. 1878. 674-675) hatte der Verfasser Gleichgewicht eines homogenen und isotropen festen Kör untersucht, welcher auf einer Seite von der Ebene xy begr wird und auf allen anderen Seiten sich in's Unendliche ausde und welcher auf der Fläche $z=0$ äusseren Drucken unter fen ist, deren Componenten (p_x, p_y, p_z) in Bezug auf die Fläc einheit für jeden Punkt gegeben sind; doch beschränkte Verfasser sich damals auf den besonderen Fall, dass die äuss Drucke sich auf die normalen Componenten p_z reduciren. Ce hat in seinen Ricerche intorno all' equilibrio de' corpi ela isotropi (Acc. dei Lincei 1882) auch das Vorhandensein vo und p_y angenommen. Der Verfasser zeigt, dass die 1878 ihm benutzten Principien in einfacher Weise auch zu den ne Resultaten von Cerruti führen.

2) Zwei in 1) gefundene Formeln gestatten nachzuwei dass der im vorigen Jahre mitgeteilte Satz (C. R. XCIII. 703- s. F. d. M. XIII. 1881. 737), in welchem nur senkrecht gegen Oberfläche wirkende Drucke berücksichtigt wurden, verallgemei werden kann: „Jede äussere Wirkung, die in einem Punkte Oberfläche eines festen Körpers ausgeübt wird, pflanzt sich den zur Oberfläche parallelen Schichten nach dem Innern Druck von genau entgegengesetzter Richtung fort, und j Druck ist einerseits proportional der Componente der gegebe äusseren Kraft nach jener Richtung und anderseits umgek proportional dem Quadrate der Entfernung r vom Angriffspu und direct proportional dem Verhältnis ($z:r$) der Tiefe der Sch zu dieser Entfernung.“ Ferner wird eine der Folgerungen gegeben, welche aus einer jener beiden Formeln gezogen wer kann. Es wird bestimmt, welche Gestalt die Oberfläche

Körpers annimmt, wenn auf ein im Coordinatenanfangspunkte befindliches Element nur die tangentiale Elementarkraft dT in der Richtung der x-Axe wirkt: „Jeder Kreis vom Radius r, welcher um den Angriffspunkt der Kraft dT als Mittelpunkt auf der Oberfläche beschrieben ist, bleibt nach den Deformationen vollständig in derselben Ebene, welche sich nur um den zur Kraft senkrechten Durchmesser um den Winkel

$$\frac{z}{x} = \frac{dT}{4\pi(\lambda+\mu)r^2}$$

gedreht hat. Die Projectionen der Niveaulinien $z = \text{const.}$, der deformirten Oberfläche auf deren ursprüngliche Ebene sind Kreise, welche durch den Anfangspunkt gehen und ihre Mittelpunkte auf der Richtung der angreifenden Kraft haben; hieraus folgt, dass die Linien grösster Neigung analoge Kreise sind, welche aber ihre Mittelpunkte auf der senkrechten Axe der y haben."

Rs.

H. Hertz. Ueber die Berührung fester elastischer Körper.

Kronecker J. XCII. 156-171.

Zwei elastische isotrope Körper berühren sich in einem sehr kleinen Teile ihrer Oberflächen und durch diesen Teil übt der eine auf den anderen einen endlichen, senkrechten Druck aus; für sie bestimmt der Verfasser aus der Elasticitätstheorie die Verschiebungen und Spannungen in der Nähe des Berührungspunktes. Das beiden Körpern nach der Deformation gemeinsame Stück der Oberfläche wird die Druckfläche, die Begrenzung dieser die Druckfigur genannt. Die Druckfläche wird als eine Fläche zweiten Grades betrachtet. Die Grössen, welche sich auf den einen oder den andern der beiden Körper beziehen, seien durch die Indices 1 und 2 von einander unterschieden, die Elasticitätsconstanten seien also K_1, θ_1 und K_2, θ_2. Zur Abkürzung wird gesetzt

$$\vartheta_1 = \frac{2(1+\theta_1)}{K_1(1+2\theta_1)} \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = \frac{2(1+\theta_2)}{K_2(1+2\theta_2)}.$$

Der Gesammtdruck sei p.

Als Druckfigur wird eine Ellipse gefunden, deren Axen a und gegeben sind durch die Gleichungen

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)^3(b^2+u)u}} = \frac{A}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,\frac{16\pi}{3p},$$

$$\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)^3u}} = \frac{B}{\vartheta_1+\vartheta_2}\,\frac{16\pi}{3p},$$

oder, wenn die Grössen A und B durch die Hauptkrümmung und einen Hülfswinkel τ ausgedrückt werden,

$$a = \mu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}},\quad b = \nu\sqrt[3]{\frac{3p(\vartheta_1+\vartheta_2)}{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}}$$

wo μ und ν transcendente Functionen des Winkels τ sind. einer Tabelle sind die Werte dieser Functionen für die 10 W von τ: 0°, 10°... 90° mitgeteilt. Es ergiebt sich, „dass die Dr ellipse immer länglicher ist, als die Ellipsen, in welchen der stand der beiden Körper constant ist. Für die absolute Gr der Druckfläche folgt, dass dieselbe bei gegebener Form Oberflächen proportional ist der dritten Wurzel aus dem Dr sowie der dritten Wurzel aus der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$... Bei glei Gestalt der sich berührenden Oberflächen ist die Annäher proportional der $\frac{2}{3}$ten Potenz des Druckes und der gleichen tenz der Grösse $\vartheta_1+\vartheta_2$." Die Beanspruchung des Elemen in welchem der Berührungspunkt liegt, wird bestimmt, überha die Verteilung des senkrechten Druckes in der Druckfläche un sucht. Dabei ist die Bestimmung der Maximaldrucke von Wi tigkeit, welche in den auf einander gepressten Körpern vork men; denn von diesen hängt es ab, ob der Druck ohne bleibe Deformation ertragen wird, „...es ist bei unserer heutigen Ke nis von der Festigkeit spröder Körper überhaupt nicht mögl genau dasjenige Element zu bestimmen, in welchem die Be gungen für das Zustandekommen eines Sprunges bei wachsend Druck zuerst auftreten. Indessen zeigt eine eingehendere I cussion so viel, dass in Körpern, welche in ihrem elastisc Verhalten dem Glase oder harten Stahle ähnlich sind, bei weit

die stärksten Zugkräfte in der Oberfläche und zwar am Rande der Druckfigur auftreten. Es wird durch eine solche Discussion wahrscheinlich, dass der erste Sprung an den Enden der kleinen Axe der Druckellipse entsteht und senkrecht zu dieser Axe am Rande der Druckellipse entlang läuft." Besonders einfach werden die Formeln für den Fall, dass beide sich berührende Körper Kugeln sind. Nachdem der Verfasser einige Beispiele gegeben hat, wendet er die Formeln auf den Stoss elastischer Körper an, d. h. dieses Problem wird näherungsweise gelöst. Die grösste Annäherung der Körper, der zwischen den Körpern gleichzeitig auftretende Maximaldruck, die Dimensionen der Stossfläche und die Dauer der Berührung (die Stosszeit) werden bestimmt. Die Werte dieser Grössen für den centralen Stoss zweier Stahlkugeln von gleichem Radius werden angegeben.

Rs.

G. H. DARWIN. On the stresses caused in the interior of the earth by the weights of continents and mountains. Phil. Trans. CLXXIII. 187-230.

Der Verfasser betrachtet die Festigkeit und Härte der Erdmaterie von einem Gesichtspunkt aus, der bisher nicht berücksichtigt zu sein scheint. Der erste Teil (p. 188-218) ist einer mathematischen Untersuchung gewidmet, die sich auf eine bekannte Arbeit von W. Thomson stützt. Der zweite Teil enthält eine summarische Uebersicht und Discussion der vorangehenden Arbeit.

Cly. (O.).

R. R. WEBB. On the equilibrium of a bent plate. Mess. (2) XI. 156-160.

Untersuchung des Gleichgewichtes einer geneigten Platte, unter den Bedingungen, dass dieselbe isotrope elastische Eigenschaften habe, und dass die Abweichung von einer ungespannten Platte von gleichmässiger Dicke unendlick klein ist.

Glr. (O.).

RAYLEIGH. On the infinitesimal bending of surfaces of revolution. Lond., M S. Proc. XIII. 4-16.

Es wird vorausgesetzt, dass bei der Biegung von Umdrehungsflächen die Deformation näherungsweise so erfolge, als wenn die dünne Schale im Ganzen unausdehnbar wäre. Die Rechnung wird hierdurch wesentlich erleichtert, die Untersuchung aber auf die centrale Schicht beschränkt. Der Verfasser stellt die Bedingungen dafür auf, dass die Grösse einer Kugelfläche ungeändert bleibt, und giebt die hierbei möglichen Verrückungen an. Daraus werden die möglichen Verrückungen einer Vollkugel abgeleitet. Die potentielle Energie der Biegung wird berechnet, und es wird bewiesen, dass die potentielle Energie V, welche irgend einer Zahl von Verrückungen gewisser Art entspricht, nur die Quadrate und nicht die Producte der Amplituden enthält. Nachdem noch die Werte von V für eine Halbkugel und für den Fall, dass der grösste Wert von θ statt 90° nur 60° beträgt, angegeben sind, hat sich der Verfasser Alles verschafft, was zur Lösung statischer Probleme in Bezug auf die Deformation von Kugelschalen unter der Wirkung gegebener Kräfte erforderlich ist. Um auch die Zahl der freien Schwingungen finden zu können, wird der Ausdruck für die kinetische Energie aufgestellt. Dies führt zu Bemerkungen über tönende Glocken von nahezu halbkugelförmiger Gestalt.

Endlich wird die Deformation einer allgemeinen Umdrehungsfläche unter der Voraussetzung untersucht, dass keine auf der Oberfläche gezogene Linie eine Längenänderung erleidet. Bei der Rechnung werden Cylindercoordinaten benutzt. Die einfachste Anwendung der erhaltenen Resultate bezieht sich daher auf den Kreiscylinder $r = \text{const}$. Eine ausgedehntere Klasse lösbarer Fälle erhält man bei der Annahme

$$r^3 \frac{d^2r}{dz^2} = \text{const.},$$

welcher Gleichung durch die Flächen zweiten Grades im Allgemeinen genügt wird. Rs.

W. Voigt. Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen. Wiedemann Ann. XVI. 273-321, 398-416.

Die Hauptresultate dieser Untersuchung sind folgendermassen zusammengefasst:

1) Bei Prismen von doppeltsymmetrischem Querschnitt, die aus Krystallen geschnitten sind, ist im Allgemeinen die „freie“ Biegung, — wie sie durch Zugkräfte normal zur Längsaxe oder durch Drehungsmomente um Axen, die in den Grundflächen liegen, hervorgebracht wird, — von einer Drillung um die Längsaxe begleitet; desgleichen die durch ein einziges Drehungsmoment um die Längsaxe erzeugte „freie“ Torsion von einer Biegung. Es lassen sich für jedes Krystallsystem diejenigen Richtungen angeben, welche die Längsaxe und die beiden Hauptträgheitsaxen des Querschnitts des Prismas haben müssen, damit diese Nebenänderungen verschwinden und durch die angeführten Ursachen reine Biegung und reine Drillung hervorgerufen werden. Diese Lagen empfehlen sich besonders für die Beobachtung; bei der Benutzung anderer als dieser bestimmten Prismengattungen hat man Sorge zu tragen, dass jene Nebenänderungen unbehindert zu Stande kommen können, wenn man nicht, was sich nur bei der Biegung ausführen lassen dürfte, Veranstaltungen treffen will, sie gänzlich aufzuheben.

2) Die Theorie der freien gleichförmigen Biegung eines Prismas aus einem krystallinischen Medium lässt sich für jede Gestalt des Querschnitts und jede Orientirung des Prismas im Krystall „streng“, (d. h. wenn der Querschnitt des Prismas so klein gegen seine Länge ist, dass man statt der in Wahrheit stattfindenden Verteilung der äusseren Kräfte auf den unterstützen-Querschnitten eine beliebige einführen kann, die nur mit jener gleiche Componentensummen und Drehungsmomente ergiebt), durchführen, die der reinen Biegung (mit aufgehobener Torsion) wenigstens soweit, dass eine Formel zur Bestimmung einer Constanten durch die Beobachtung gewonnen wird.

was sich durch die Beobachtung prüfen lässt. Darum n sie bei geeigneter Wahl des Verhältnisses $\frac{m}{n}$ als un- Constante durch die Combination von Beobachtungen reren gleich orientirten Prismen eliminiren, und zugleich se T, den eigentlichen Torsionscoefficienten, bestimmen, Vert in der Abhandlung gleichfalls durch die Elasticitäts- n des Krystalles für jedes Krystallsystem und eine be-)rientirung des Prismas angegeben ist.

)ie Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen alle Krystallsysteme genug Daten, um alle Elasticitäts- n eines Minerals zu bestimmen, ja noch mehr als dies, lie Möglichkeit gegeben ist, unter allen Beobachtungs- vorteilhafteste auszuwählen. Da nach den Darlegungen ssers die Beobachtungen der Biegung bequemer sind r Torsion, wird man so viel Daten, als möglich, durch en zu gewinnen suchen und nur die noch ausserdem ermittelst Torsionsbeobachtungen bestimmen.

Rs.

---

r. Volumen- und Winkeländerung krystallini- Körper bei all- oder einseitigem Druck.
n Ann. XVI. 416-427.

erfasser zeigt, wie die Volumen- und Winkeländerun- Körpern verschiedener Krystallsysteme bei allseitig oder bei einseitigem Drucke berechnet werden können, , wie in einer Anmerkung erwähnt ist, unter Anwen- Gedanken, welche F. Neumann in seinen Vorlesungen ticität entwickelt hat.

Rs.

Qu
m

Die Theorie des longitudinalen Stosses cylin- Stäbe. Berl. Ber. 1882. 683-702.

ösung des Problems vom Stoss zweier cylindrischer Körper, wie sie von Poisson in seinem Traité de § 499-504 gegeben ist, wurde von F. Neumann in

mit den nach seiner Theorie berechneten Werten sich in Einklang befinden.

In einem Nachtrage wird noch kurz erwähnt, dass in Folge der Abhandlung von Hertz „Ueber die Berührung fester elastischer Körper" der Verfasser einige Beobachtungen bezüglich des Einflusses der Krümmung der zusammenstossenden Flächen gemacht hat. Das Ergebnis wird mitgeteilt. Die Krümmung ist von Einfluss; doch meint der Verfasser, dass neben der Wirkung der Krümmung die von ihm erörterten Umstände sehr merklichen Einfluss haben. Daher hat er begonnen, die Elasticität der an verschiedenen Oberflächen haftenden condensirten Gasschichten beobachtend zu untersuchen." Rs.

L. Boltzmann. Experimente über den Stoss von Cylindern. Wiedemann Ann. XVII. 343-347.

Abdruck von Wien. Ber. LXXXIV. 1225-1229, s. F. d. M. XIII. 1881. 740. Rs.

Sebert et Hugoniot. Sur les vibrations longitudinales des barres élastiques dont les extrémités sont soumises à des efforts quelconques. C. R. XCV. 213-215, 278-281, 338-340.

Sebert et Hugoniot. Sur le choc longitudinal d'une tige élastique fixée par l'une de ses extrémités. C. R. XCV. 381-384.

Sebert et Hugoniot. Sur les vibrations longitudinales des verges élastiques et le mouvement d'une tige portant a son extrémité une masse additionnelle. C. R. XCV. 775-777.

1) Nachdem an die Arbeit von de Saint-Venant (siehe das Referat über die Abhandlung von Hertz, oben p. 809) erinnert ist, in welcher angenommen war, dass der betrachtete Stab dem Stosse eines zweiten prismatischen Stabes, der dieselbe Symmetrieaxe hat, unterworfen ist, wird das Problem gelöst: Die Schwingungs-

bewegung einer homogenen elastischen Stange von endlicher Län zu bestimmen, deren eines Ende irgend welchen mit der Z veränderlichen Wirkungen (Drucken oder Spannungen) unt worfen ist, und deren anderes Ende frei oder befestigt ist. F longitudinale Schwingungen elastischer Stäbe gilt die Gleichun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{Eg}{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Das allgemeine Integral ist

$$u = \varphi(x+at) + \psi(x-at).$$

Die Functionen φ' und ψ' werden entsprechend den Bedingung gleichungen des Problems (zunächst für den Fall, dass das ei Ende des Stabes fest ist) vollständig bestimmt. Die Function φ und ψ, deren Werte zu kennen jedoch selten erforderlich i können daher durch einfache Quadraturen erhalten werden. der zweiten Note wird gezeigt, wie man die Spannung und d Geschwindigkeit irgend eines Stabpunktes bekommt. In d dritten Mitteilung wird das bisher als fest angenommene Sta ende als frei vorausgesetzt. Um zu zeigen, wie die Methode b Aufgaben über den Stoss angewendet wird, beschäftigen sich d Verfasser mit folgender Verallgemeinerung eines Problems, we ches Navier 1823 in seiner Abhandlung über die Hängebrück zuerst behandelt hat: Ein Stab sei am einen Ende befestigt u am anderen dem Stosse eines Körpers vom Gewichte Π unte worfen. Dieser Körper sei ziemlich kurz und starr, damit m dessen Vibrationsbewegung vernachlässigen kann, und auf dies Körper wirke parallel zur Richtung des Stabes eine Kraft $F($ Man soll die Bewegung des Systems bestimmen, indem man a nimmt, dass die kleine Masse nach dem Stosse unveränderli mit dem Stabe verbunden bleibt. Der Ausdruck für φ' wird g geben, wenn $t < \frac{2l}{a}$ ist.

2) Die eben genannte Aufgabe wird für den Fall, da $t > \frac{2l}{a}$ ist, weiter behandelt.

In 3) werden aus den mitgeteilten Formeln Folgerung gezogen. Die Abhandlung von Philipps' „Solutions de dive

blèmes de Mécanique, dans lesquels les conditions imposées . extrémités des corps, au lieu d'être invariables, sont des ctions données du temps, et où l'on tient compte de l'inertie toutes les parties du système. (Liouville J. (2). IX. 25-83. 14)" war den Verfassern bei ihren früheren Mitteilungen noch bekannt. Sebert und Hugoniot sehen als besonderen Vorteil er Behandlung des Problems an, dass sie nicht die Functionen und ψ selbst, sondern deren Ableitungen φ' und ψ' bestimmen, weil dadurch die Elementarvorgänge der Phänomene klarer vortreten. Einvon Philipps behandelter Fall wird benutzt, um an einem Beispiele erkennen zu lassen. Rs.

SAINT-VENANT. Du choc longitudinal d'une barre élastique libre contre une barre élastique d'autre matière ou d'autre grosseur, fixée au bout non heurté; considérations du cas extrême où la barre heurtante est très raide et très courte. C. R. XCV. 359-365, 422.

SAINT-VENANT. Solution, en termes finis et simples, du problème du choc longitudinal, par un corps quelconque, d'une barre élastique fixée à son extrémité non heurtée. C. R. XCV. 423-427.

1) Die Mitteilungen von Sebert und Hugoniot veranlassten den erfasser, eine Fortsetzung seiner 1867 veröffentlichten Abhandlung zu geben. Die Gleichungen des vorliegenden Problems nnen auf zwei Arten gelöst werden: 1) in endlichen Termen urch die Summe zweier willkürlicher Functionen von $(x \pm wt)$, ren Gestalt sich nach jeder Reflexion der Erschütterungen ändert; durch trigonometrische Reihen. Es wird die zweite Lösungsart enutzt und im Speciellen angenommen, dass die Zeit, während elcher der Schall die Länge des stossenden Stabes, der prismatisch, elastisch, aber sehr kurz und hart sei, durchläuft, als nendlich klein gegen die entsprechende Zeit für den gestossenen rismatischen elastischen Stab betrachtet werden kann. Dann ird genau jener Ausdruck gefunden, welchen Navier 1823 für

die Verrückungen von Punkten einer elastischen Stange angegeben hat, welche am einen Ende befestigt und am anderen Ende von einem starren Körper von beliebiger Gestalt gestossen wird.

In 2) wird die erste Lösungsart benutzt, um für den praktisch wichtigen Fall, dass der am einen Ende gestossene Stab am anderen Ende befestigt ist, die Lösung in geschlossener Form zu geben. Rs.

J. Boussinesq. Résistance d'une barre prismatique et homogène, de longueur supposée infinie, au choc transversal et au choc longitudinal. C. R. XCIV. 1044-1047.

J. Boussinesq. Sur le choc d'une plaque élastique plane supposée indéfinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement en un de ses points et qui lui reste uni. C. R. XCV. 123-125.

Transversal gegen die Mitte oder longitudinal gegen das eine Ende einer unendlich langen Stange stosse ein Körper, ohne abgelenkt zu werden, mit der Geschwindigkeit V. Die Verrückungen, welche in Folge dessen die einzelnen Punkte des Stabes erleiden, sind zu bestimmen. Für den ersten Fall der transversalen Bewegung sei der Querschnitt der Stange symmetrisch in Bezug auf eine Ebene senkrecht zur Richtung, in welcher die transversale Bewegung stattfindet. Nachdem die Differentialgleichung und die Grenzbedingungen aufgestellt sind, erfolgt die Integration nach einer Methode, welche der Verfasser in den C. R. XCIV. 33 (s. Seite 781) mitgeteilt hat. Ist w die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles längs der Stange, ∂ die Elasticitätsgrenze und k eine Zahl, welche allein vom Querschnitt der Stange abhängt, so darf die der Stange mitgeteilte Geschwindigkeit v niemals den Wert $\frac{\partial}{k} w$ übersteigen, wenn die Structur nicht geändert werden soll. Für einen kreisrunden oder elliptischen Stab ist $k = 2$, für einen rechteckigen $\sqrt{3}$. Darauf

rd der Fall longitudinaler Stösse behandelt, welcher zu dem reits von Young aufgestellte Satze führt: Das Verhältnis der össten Geschwindigkeit, welche der Stange durch longitudinale össe mitgeteilt wird, zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit des halles darf die Elasticitätsgrenze nicht überschreiten, wenn e Structur keine Aenderung erleiden soll. Aus beiden Sätzen ird gefolgert: Die Geschwindigkeit eines transversalen Stosses, elcher eben fähig ist, die Structur zu ändern, ist im Verhältnis n $1:k$ kleiner, als diejenige eines longitudinalen Stosses, welcher dieselbe Wirkung durch Ausdehnung hervorbringt, und zwar t das Verhältnis $1:2$ für einen runden Stab, und $1:\sqrt{3}$ für nen rechteckigen Stab, der senkrecht zu seiner Seitenfläche geossen wird. Diese Sätze gelten auch für Stangen von endcher Länge, so lange die durch den Stoss erzeugte Bewegung n nicht gestossenen Ende der Stange nicht bemerkbar ist.

In 2) werden analoge Betrachtungen für eine Platte angellt. Dabei wird eine in den C. R. XCIV. 514 (s. Seite 302) tgeteilte Integrationsmethode benutzt. Es bezeichne v die Geswindigkeit des direct erschütterten Teiles der Platte, w die schwindigkeit, mit welcher sich longitudinale Schwingungen der Platte fortpflanzen, ∂ und ∂' die linearen Hauptdilatatio-, so wird gefunden

$$v = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}(\partial-\partial')w = 0{,}9069(\partial-\partial')w.$$

raus schliesst der Verfasser, dass das Verhältnis $\frac{v}{0{,}9069w}$ Wert der Elasticitätsgrenze des Stoffes nicht erreichen kann, ne dass der Rand des Teiles, auf welchen der Stoss ausgeübt rd, eine bleibende Veränderung erleidet. Es sei μ die Masse s stossenden Körpers, bezogen auf die Masse der Oberflächenheit der Platte, V die Geschwindigkeit jener Masse zur Zeit $= 0$, h die halbe Dicke der Platte und $a = \frac{hw}{\sqrt{3}}$, so ergiebt h ferner: Die Verrückung des gestossenen Punktes strebt der enze $\frac{\mu V}{3a}$ zu, während für den Fall des transversalen Stosses

gegen eine unendlich lange Stange diese Verrückung bes
wächst, obgleich die Geschwindigkeit sich der Grenze Null
„Wenn der gestossene Punkt in seine neue Ruhelage gek
ist, haben sich die umgebenden concentrischen Ringe i
Platte um ihn in einer Ebene, welche der ursprünglichen
parallel ist, am Ende von Zeiten gebildet, die proportion
Quadraten der Ringradien sind." R

H. Résal. Sur un point de la théorie mathém
des effets du jeu de billard. C. R. XCIV. 1548-1551.

H. Résal. Sur une question de principe qui se
porte à la théorie du choc des corps imparfaite
élastiques. C. R. XCV. 547-549.

H. Résal. Sur le choc des corps imparfaite
élastiques. C. R. XCV. 578-582.

H. Résal. Du choc de deux sphères en ayant é
à leur degré d'élasticité et au frottement dévelo
au contact. C. R. XCV. 615-619.

H. Résal. Du choc de deux billes posées sur un
de billard. C. R. XCV. 655-659.

H. Résal. De l'effet d'un coup de queue incliné
une bille. C. R. XCV. 700-703.

H. Résal. Remarques sur la théorie des chocs. C. R.
745-747.

1) Es handelt sich um den Stoss eines Balles, welcher
auf einer Ebene S gegen eine zu dieser senkrechte Eben
wegen muss. Der Ball besteht aus homogenen Kugelsch
deren Dichte sich in der Richtung vom Mittelpunkte zur
fläche ändern kann. Die Masse wird der Einfachheit w
gleich 1 gesetzt. Von der Componente der Rotation des
um seinen Schwerpunkt in der Richtung der Normale v
welche während des Stosses constant bleibt und bei den

s Reibung erzeugten Wirkungen keine Rolle spielt, wird abgeben. Es sei C die Lage des Ballmittelpunktes während des sses, A der Berührungspunkt mit S', Ay die durch A gehende rallele zur Schnittlinie der beiden Ebenen, Az die äussere rmale zu S, v die zu Ax parallele Componente der Geschwingkeit v von C zu irgend einer Zeit während des Stosses, p und die Componenten der Rotation um C parallel zu Ay und Az. er Verfasser bestimmt v, p, q für das Ende des Stosses, beachtet dann den einfachen Fall, dass zu Anfang des Stosses $= 0$ ist, und fügt die Bemerkung hinzu, dass die angestellten trachtungen sich auch auf den Fall anwenden lassen, wenn e Ebene S' durch eine zur Ebene S normale Cylinderfläche etzt wird, wie beim „billard forain“.

2) Navier's Raisonnement wird nach dessen Darstellung in rchitecture de Belidor. 1819. Tome I. p. 121 wiedergegeben. n Formeln von Navier entsprechen die, welche der Verfasser '3 in seinem Traité de Mécanique générale Tome I. gegeben . Der Verfasser kennt genaue Experimente über den Stoss ollkommen elastischer Körper nur von Coriolis (Théorie hématique des effets du jeu de billard, p. 89). Diese Eximente scheinen die Hypothese von Navier, welche für den cten Stoss auf die des Verfassers zurückkommt, zu rechtigen. Nach dem Verfasser kann man bezüglich des Stosses ier unvollkommen elastischer Körper von beliebiger Gestalt e Gleichung aufstellen, welche ausdrückt, dass der Verlust an endiger Kraft sich aus zwei Teilen zusammensetzt, von weln der eine proportional der lebendigen Kraft der verlorenen schwindigkeiten, d. i. dem Doppelten der im Innern erzeugten leculararbeit, und der andere gleich dem Doppelten der durch Reibung verbrauchten Arbeit ist. Die Auswertung dieses iten Gliedes bietet im Allgemeinen grosse Schwierigkeiten dar.

In 3) wird zunächst der Verlust an lebendiger Kraft beim sammenstoss zweier unelastischer Körper berechnet. Es behne m ein Massenmolecül der beiden Körper, Ov_0, Ov_1, Ou die einem Punkte O aus gezogenen Geraden, welche beziehungsise die Geschwindigkeiten v_0 vor dem Stosse, v_1 nach dem

Stosse, u im Augenblicke der grössten Zusammendrückung darstellen, $U = \overline{v_0 v_1} = \overline{v}_0 - \overline{v}_1$ die während des Stosses verlorene Geschwindigkeit, $\varphi_0 = \overline{v_0 u} = \overline{v}_0 - \overline{u}$ die im ersten Teile des Stosses verlorene Geschwindigkeit, $\varphi_1 = \overline{v_1 u} = \overline{v}_1 - \overline{u}$ die im zweiten Teile des Stosses gewonnene Geschwindigkeit, J_0 und J_1 die Projectionen der Punkte v_0 und v_1 auf die Richtung $0x$. Es wird angenommen, dass φ_1 direct entgegengesetzt φ_0 ist, dass folglich die Punkte v_0, u, v_1 in einer geraden Linie liegen, und dass $U = \varphi_0 + \varphi_1$ ist. Indem dann $\varphi_1 = n\varphi_0$ gesetzt wird, wo n zwischen 0 und 1 liegt, gelangt der Verfasser schliesslich zu der Gleichung

$$\Sigma m v_0^2 - \varepsilon m v_1^2 = \varepsilon \Sigma m U^2 - 2Jw,$$

in welcher $\varepsilon = \dfrac{1-n}{1+n}$ ist, J den Impuls bedeutet, welcher von der im Stosspunkte entwickelten tangentialen Moleculararbeit herrührt, und w die Projection der Gleitungsgeschwindigkeit in der Richtung von J bezeichnet. Darauf berechnet der Verfasser die Wirkung eines horizontalen Queuestosses auf einen Billardball.

4) enthält eine weitere Anwendung der in 3) veröffentlichten allgemeinen Formel. Jede der beiden Kugeln soll frei beweglich und aus concentrischen homogenen Schichten zusammengesetzt sein, deren Dichte von Schicht zu Schicht sich ändern kann. Es wird gefunden: Während der ganzen Dauer des Stosses hat die Reibung dieselbe Richtung, sie hängt von der relativen Bewegung der beiden Körper zu Anfang des Stosses ab. Für zwei genau gleiche Kugeln hat bereits Coriolis diesen Satz ausgesprochen. In 7) wird mitgeteilt, dass dies ein specieller Fall des Satzes ist, welchen Philipps 1849 in Liouville J. gegeben hat.

In 5) zeigt sich: Wenn zwei gleich grosse Bälle auf einer Billardfläche zusammenstossen, ist die Richtung der Reibung nicht constant, entgegen der Annahme von Coriolis. Die Rechnung wird nur für den Fall weitergeführt, dass es sich um eine erste Annäherung handeln soll, und dass der angestossene Ball anfänglich in Ruhe ist.

6) Mit Coriolis wird angenommen, dass die Elasticität der Billardfläche gering genug ist, damit sie vernachlässigt werden

n. Bereits Coriolis fand, dass die Gleichungen für diesen
, mit einander wohl vereinbar sein würden, wenn man an-
me, dass die Reibung zwischen Ball und Billardfläche während
Stosses dieselbe Richtung habe. Für diesen Fall werden
Bewegungsgleichungen aufgestellt, aus welchen sich ergiebt,
s die Bewegung des Ballmittelpunktes parallel zu Cx recht-
ig oder rückläufig sein wird, je nachdem $\cos\gamma \lesseqgtr f \cot i$ ist.
rbei bedeutet Cx die durch den Mittelpunkt C des Balles ge-
e Horizontale in der verticalen Ebene, welche parallel zur
ueaxe durch C geht, γ die auf die constante Richtung der
oung bezügliche Constante, f den Reibungscoefficienten für
Ball auf der Billardfläche, i die Neigung der Queueaxe
en die Billardfläche. Wenn diese Neigung nicht genügend
is ist, kann folglich keine rückläufige Bewegung eintreten.

7) Philipps schlug vor, das Problem des Stosses unvollkom-
. elastischer Körper dadurch zu lösen, dass angenommen
l, die Grösse der normalen gegenseitigen Wirkung im zwei-
Teile des Stosses, d. h. nach dem Augenblicke, wann die
iste Zusammendrückung stattgefunden hat, sei ein Bruchteil
entsprechenden Grösse im ersten Teile des Stosses. Unter
er Annahme behandelt der Verfasser den directen Stoss zweier
per, welche parallele Translationsbewegungen ausführen, und
ingt zu den Formeln, welche er in 1) gegeben hat. Die
iothese von Philipps ist durch ihre Einfachheit sehr verführe-
h und der Verfasser ist geneigt, sie bei der Lösung der ver-
edenen Probleme des Billardspieles, welche er schon behan-
hat, anzuwenden. Rs.

LAMB. On the vibrations of an elastic sphere.
,. M. S. Proc. XIII. 189-212.

Dieselbe Methode, welche der Verfasser in einer etwas früher
iffentlichten Mitteilung (On the Oscillations of a Viscous
eroid. Proc. L. M. S. XIII. 51-66 s. p. 789) angewendet hat, wird
lie Untersuchung der Schwingungen einer elastischen Kugel be-
t. Die wichstigsten der Resultate sind bereits durch Järisch

auf anderem Wege gefunden worden (siehe F. d. M. XI. 1879 723-724). Es genüge daher dieser Hinweis auf die Arbeit.

Rs.

M. DA T. P. VIANNA. Influencia das cargas un movimento sobre as nigas rectas. Lisboa. 1882.

Im ersten Capitel untersucht Herr Vianna die Vibration von geraden Balken, wenn die Belastung auf einem Punkt vereint ist. Im zweiten Capitel beschäftigt er sich mit den Schwingungen gerader Balken, wenn die Belastung gleichmässig auf ihnen verteilt ist. Für beide Aufgaben benutzt Herr Vianna die Methoden der Herren Philipps und Bernandot, aber er dehnt die Genauigkeit weiter aus, als die beiden Ingenieure.

Tx. (O.)

TRESCA. Théorie de la résistance des étoffes tissées à l'extension. C. R. XCV. 1315-1321.

Durch Beobachtungen hat der Verfasser gefunden, dass das bekannte Gesetz der Elasticität des Zuges, wonach die Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze der Belastung proportional ist, nicht mehr für Riemen aus Geweben (und Leder) gilt, dass vielmehr hier die Ausdehnungen geringer sind, als jenes Gesetz erfordern würde. Um diese Abweichung theoretisch zu erklären, denkt er sich die Fäden des Einschlaggarns als (unzusammendrückbare) Cylinder, welche zwischen die der Kette eingeschaltet sind, so dass die letzteren jene längs ihres halben Umfanges umfassen. Bei einer Belastung entfernen sich die Cylinder von einander, und die Fäden lösen sich von ihnen. Das Gewebe erfährt hierbei eine grössere Verlängerung als die Fäden. Wenn α den Bogen bezeichnet, längs dessen sich der Faden von dem Cylinder trennt, so ist die Relation zwischen der für die Längeneinheit verstehenden Verlängerung i des Gewebes und der Belastung derselben gegeben durch die Gleichungen:

$$i = \frac{1}{\cos\alpha} - 1, \quad f = \frac{2E\omega \sin\alpha}{\pi}(\operatorname{tang}\alpha - \alpha),$$

›rin ω den Querschnitt, ϱ den Elasticitätscoefficienten bedeutet. e Berechnung von i und f für eine Reihe von Werten des inkels α bestätigt die Ergebnisse der Beobachtung. Je dichter s Gewebe ist, desto grösser wird bei einer gleichen Belastung ɜ Verlängerung. Wären die Fäden des Einschlaggarns abge- ıttet, so würde die Ausdehnung eine geringere werden. Diese .nn auch von einer Deformation derselben abhängen.

Sbt.

. Léauté. Sur l'application de la résistance des matériaux aux pièces des machines. C. R. XCIV. 843-845.

Die Hypothese, dass man die Componenten und Momente r äusseren Kräfte berechnen könne, wie wenn die Teile keine formation erführen, von der man bei der Bestimmung des derstandes der Baumaterialien Gebrauch macht, ist nicht mehr lässig für die Bestandteile von Maschinen; hier hängen die äfte wesentlich von deren Deformation ab. Das Problem führt Folge dessen nicht auf einfache Quadraturen, sondern auf fferentialgleichungen, welche vom Verfasser aufgestellt werden.

Sbt.

C. Capillarität.

Volkmann. Ueber die Molecularanziehung von Flüssigkeiten auf einander. Wiedemann Ann. (2) XVI. 321-335.

Es werden folgende Definitionen aufgestellt und physikalisch gründet: 1) Die Capillaritätsconstante

$$\alpha = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}H = \frac{1}{8}\pi\varrho^2\int_0^\infty r^4\varphi(r)\,dr$$

nn als Mass der Cohäsion oder der Anziehung zweier gleich-

artiger Flüssigkeitsteile dienen. 2) Ein dem obigen vollkommen entsprechender Ausdruck

$$\alpha_{12} = \frac{1}{8} \pi \varrho_1 \varrho_2 \int_0^\infty r^4 \varphi_{12}(r) dr$$

dient als Mass der Adhäsion oder der Anziehung zweier verschiedenartiger Flüssigkeiten. 3) Ein solches Mass lässt sich aufstellen, gleichviel, ob die Flüssigkeiten mischbar sind oder nicht. So lange $\alpha_{12} < \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$, sind die Flüssigkeiten nicht mischbar; sie sind es dagegen, wenn $\alpha_{12} \geqq \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ ist. Es kann aber sehr wohl α_{12} grösser sein als eine der beiden Grössen α_1 oder α_2, ohne dass eine Mischung eintritt. Dabei sind jedoch die Fälle einer bei der Mischung stattfindenden Contraction, sowie einer nur teilweisen Mischung der Flüssigkeiten ausgeschlossen. Wn.

Van der Mensbrugghe. Interprétation théorique de l'effet produit par une couche mince d'huile, répandue à la surface de la mer, pour calmer l'agitation des flots. C. R. XCV. 1055-1056.

Breitet sich eine dünne Schicht reinen Wassers über einer Oelschicht aus, so wird die Oberflächenspannung, damit also die potentielle Energie der ganzen Masse vermehrt. Hierdurch aber ist ein Verlust an lebendiger Kraft bedingt. Das ist der Grund der im Titel genannten Erscheinung. Die Vermehrung der potentiellen Energie lässt sich aus vorhandenen Messungen numerisch bestimmen. Wn.

Capitel 2.
Akustik und Optik.

A. Akustik.

W. MATZKA. Kritische Berechnungen der musikalischen Töne und der diatonischen Tonleitern. Prag. Abh. (6) XI. B.

Eine sehr breite, elementare Erörterung, um die Intervalle der diatonischen Tonleiter zu ermitteln. Zunächst geht der Verfasser von einer gespannten Saite aus, die er um $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ etc. ihrer Länge verkürzt denkt. Die Verhältnisse der Schwingungszahlen der resultirenden Töne geben successive die gesuchten Intervalle. Eine zweite Art der Ermittelung stützt sich darauf, dass die einzelnen Töne durch Zahlenwerte repräsentirt werden, die Mittelwerte zwischen 1 und 2 darstellen, und deren Zähler und Nenner durch keine andern Primzahlen, als 2, 3, 5 teilbar sind. Für die Quinte und die unterhalb liegenden Töne werden die Mittelwerte so gebildet, dass die Zähler und die Nenner zweier Töne addirt werden, z. B. ergiebt sich für die Quinte als Mittelwert zwischen dem Grundton $\left(\frac{1}{1}\right)$ und der Octave $\left(\frac{2}{1}\right)$ die Zahl $\frac{3}{2}$ etc. An Stelle von $\frac{1}{1}$ wird dabei nach Bedürfnis $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}$ etc. genommen. Die zwischen der Quinte $\left(\frac{3}{2}\right)$ und der Octave $\left(\frac{2}{1}\right)$ liegenden Mittelwerte dagegen werden nach dem Schema $\frac{3m+2n}{2m+n}$ gebildet. Endlich wird gezeigt, wie sich auch ohne den Begriff der Mittelwerte die gesuchten Zahlen aus den der zweiten Ermittelung zu Grunde liegenden Principien finden lassen. Wn.

E. BELTRAMI. Sulla teoria della scala diatonica. Lomb. Ist. Rend. (2) XV. 61-66.

Ist für den Grundton das Intervall der Octave bekannt $=\frac{1}{2}$, das der Terz und der Quinte unbekannt und resp. $= r, s$, so erhält man dadurch, dass man von s und von $\frac{1}{s}$ um Terz und Quint weiter geht, für die einzelnen Töne der Tonleiter die Intervalle

$$1,\ 2s^2,\ r,\ \frac{1}{2s},\ s,\ \frac{r}{2s},\ rs,\ \frac{1}{2}.$$

Es muss dann

$$1 > 2s^2 > r > \frac{1}{2s}$$

sein. Die einfachsten rationalen Zahlen, welche diese Aufstellungen erfüllen, sind $s=\frac{2}{3}$, $r=\frac{4}{5}$.

Wn.

SCHNELL. Harmonische Teilung und consonirender Dreiklang. Grunert Arch. LXVIII. 219-222.

Bei dem Durdreiklang (c, e, g) bilden die Schwingungszahlen, bei dem Molldreiklang ihre reciproken Werte (die entsprechenden Saitenlängen des Monochords) eine arithmetische Reihe erster Ordnung.

Wn.

B. Theoretische Optik.

A. BEER. Einleitung in die höhere Optik. Zweite umgestaltete Auflage, bearbeitet von V. v. Lang. Braunschweig. Vieweg.

Der Bearbeiter der neuen Auflage des seit dreissig Jahren wohlbekannten Buches hat den bei der ersten Auflage verfolgten

ung der Darstellung Abschnitt für Abschnitt beibehalten und im lgemeinen auch an dem Inhalt nur geringe Aenderungen vornommen. Eine völlige Umarbeitung mussten jedoch, in Becksichtigung der neueren Literatur, die Abschnitte erfahren, elche folgende Gegenstände behandeln: Die Brechungsverhältsse der Gase, die Frauenhofer'schen Linien, das natürliche icht polarisirte) Licht, die analytische Ableitung der allgemeinen esetze der Lichtbewegung in Krystallen (hier ist statt der uchy'schen Darstellung diejenige gewählt, über die F. d. M. II. 1880. p. 749-751 berichtet ist), das Dispersionsgesetz, die ellenfläche zweiaxiger Krystalle. Fortgelassen ist die in der sten Auflage enthaltene Tabelle mit den Brechungsquotienten nfach brechender Körper und die Zusammenstellung der optihen Constanten krystallisirter Körper, weil diese Tabellen mit m eigentlichen Zwecke des Buches in keinem Zusammenhange nden. In einem Anhange finden sich ziemlich vollständige teraturverzeichnisse über Doppelbrechung und Dispersion; auch Text enthält die neue Auflage mehr, resp. genauere Literaturchweise, als die frühere. Jedenfalls hat das Buch durch die gefübrten Aenderungen nichts von seiner Brauchbarkeit verren. Wenn dasselbe auch nach wie vor nicht die ganze theotische Optik behandelt, sondern einige wichtige Capitel ganz überht, ist es zur Einführung in das Studium jener Disciplin doch npfehlenswert. Wn.

LECHER. Ueber Ausstrahlung und Absorption. Wien. Ber. LXXXV. 441-490; Wien. Anz. 1882. 57-59; Wiedemann Ann. (2) XVII. 477-518.

Siehe Abschn. XI. Cap. 4. C.

KIRCHHOFF. Zur Theorie der Lichtstrahlen. Berl. Ber. 1882. 641-669.

Der vorliegende Aufsatz, dessen wesentlichen Inhalt Herr rchhoff schon seit Jahren in seinen Vorlesungen vorgetragen

hat, will die Theorie der Bildung der Lichtstrahlen, ihre Reflexion und Brechung, sowie die Theorie der Beugungserscheinungen in strengerer Weise begründen, als dies bisher geschehen ist. Das wesentliche Hülfsmittel bei diesen Untersuchungen bietet ein Satz dar, der sich aus der Anwendung des Green'schen Satzes auf solche Functionen ergiebt, welche der partiellen Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right\}$$

genügen. Dieser Satz, der eine Präcisirung und Verallgemeinerung des sogenannten Huygens'schen Princips bildet, ist folgender: Genügt $\Phi(t)$ der Gleichung (1) innerhalb eines vollständig begrenzten Raumes, der frei von leuchtenden Punkten ist, ist ferner O ein Punkt im Innern dieses Raumes, ist r_0 die Entfernung des Punktes O von einem Punkte x, y, z der Grenzfläche s, ist endlich $\Phi_0(t)$ der Wert von $\Phi(t)$ im Punkte O, so ist

$$(2) \qquad 4\pi \Phi_0(t) = \int ds\, \Omega,$$

wo

$$(3) \qquad \Omega = \frac{\partial}{\partial N} \left\{ \frac{1}{r_0} \Phi\left(t - \frac{r_0}{a}\right) \right\} - \frac{1}{r_0} f\left(t - \frac{r_0}{a}\right)$$

ist. In (2) und (3) ist N die nach dem Innern des Raumes gerichtete Normale, ds ein Oberflächenelement der Grenzfläche s und

$$f(t) = \frac{\partial \Phi(t)}{\partial N}.$$

Aus vorstehenden Gleichungen folgt, dass die Bewegung des Aethers in dem von der Fläche s umschlossenen Raume angesehen werden kann als hervorgebracht von einer Schicht von leuchtenden Punkten in der Fläche s. Der Satz lässt sich leicht ausdehnen auf den Fall, dass die leuchtenden Punkte innerhalb der Fläche s, der Punkt O ausserhalb liegt, ferner auf den Fall zweier geschlossener Flächen, die einen Teil gemeinsam haben und beide den Punkt O, aber nicht die leuchtenden Punkte umschliessen, oder umgekehrt.

Während in Gleichung (2) die Function Φ_0 eine beliebige

›sung von (1) ist, die nur den bekannten Continuitätsbedingunn zu genügen hat, wird in Folgendem für Φ der Wert angemmen:

$$(4) \qquad \varphi = \frac{D}{r_1}\cos\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi + \frac{D'}{r_1}\sin\left(\frac{r_1}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)2\pi.$$

ırin ist r_1 die Entfernung des Punktes x, y, z von einem festen ınkte x_1, y_1, z_1, D und D' hängen von der Richtung der Linie ab, sind aber im Uebrigen constant. Man kommt auf den ısdruck (4), wenn man die bekannte particuläre Lösung von), welche einfache Kugelwellen darstellt, einmal oder mehrmals ch t differentiirt und dabei λ als eine kleine Grösse betrachtet, ren höhere Potenzen zu vernachlässigen sind. Ein Punkt 1 t den Coordinaten x_1, y_1, z_1, welcher transversale Wellen von r Art aussendet, dass die einzelnen Componenten die Form (4) ben, wird als leuchtender Punkt bezeichnet und im Weiteren ts als Lichtquelle angesehen. Es wird nun der Wert des in) vorkommenden $\int ds\,\Omega$, ausgedehnt über eine begrenzte Fläche abgeleitet für den Fall, dass die Function Φ durch φ ersetzt rd, wobei zunächst $D = 1$, $D' = 0$ gesetzt, nachher D als in liebiger Weise von der Richtung abhängig angenommen wird. enn λ unendlich klein ist, wenn ferner für keinen endlichen il der Fläche s oder ihrer Grenze $r_1 + r_0$ constant ist, wenn dlich die gerade Verbindungslinie der Punkte 1 und 0 nicht rch die Grenze der Fläche oder unendlich nahe an ihr vorbei ht, so verschwindet jenes Integral, falls die gerade Verbindungsie von 1 und 0 die Fläche s nicht schneidet; dagegen hat das tegral den Wert $\pm 4\pi\varphi_0$, wenn ein solches Schneiden stattdet. Dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem Normale N in dem Schnittpunkte einen spitzen oder stumpfen inkel mit der von 1 nach 0 gezogenen Geraden bildet.

Nach diesen Vorbereitungen (§§ 1-3) wird untersucht, wie s von einem leuchtenden Punkte 1 ausgehende Licht durch einen mdartigen Körper modificirt wird. Zunächst wird (§ 4) der ll betrachtet, dass jener Körper völlig schwarz ist, also Licht der reflectirt, noch hindurchlässt. Es wird erörtert, welche

an kann diese als eine Folge davon ansehen, dass zwischen
en Verrückungen der Aetherteilchen in beiden Mitteln und deren
ifferentialquotienten, beide auf Punkte der Grenze bezogen,
neare homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten be-
ehen. Unter Benutzung der obigen Hülfssätze ergeben sich
araus die Gesetze der Reflexion von Strahlen der Form (4)
a beliebigen Flächen. Die analoge Betrachtung für die Brechung
t nicht ausgeführt, würde sich aber in derselben Weise erledi-
en lassen. Wn.

. FRÖHLICH. Experimentaluntersuchungen über die Intensität des gebeugten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XV. 576-613.

Die Arbeit beginnt mit einem experimentellen Teile, in dem
zeigt wird, dass die beobachteten Intensitäten der Hauptmaxima
it der gewöhnlichen Beugungstheorie in Widerspruch stehen.
aran schliesst sich eine theoretische Erörterung zur Aufklärung
eses Widerspruchs. Zu dem Zwecke wird nach dem Vorgange
n Kirchhoff mit Hülfe des Green'schen Satzes der Schwingungs-
stand in einem beliebigen Punkte eines allseitig begrenzten
umes ausgedrückt durch den Schwingungszustand an der Grenze,
sp. dessen Differentialquotienten nach der Normale. Der so
fundene Ausdruck wird angewandt auf den Fall, dass der be-
chtete Punkt von der Lichtquelle durch ein Gitter getrennt ist.
bei wird die Voraussetzung gemacht, dass Kugelwellen, die
Gitter treffen, dort eine sehr schnelle Aenderung der Am-
ude und Phase erleiden. Diese Aenderung denkt der Ver-
er durch eine Fourier'sche Reihe ausgedrückt, deren unbe-
nte Coefficienten auch in dem schliesslichen Ausdruck für
ichtintensität des betrachteten Punktes auftreten. Vergleicht
diesen Intensitätsausdruck mit den Beobachtungen, so findet
was wohl von vorn herein zu vermuten, dass von jenen
annten Coefficienten so viele berechnet werden können,
bachtungsdata vorliegen, dass man daher unendlich viele
dene Functionen für die oben genannten Aenderungen

annehmen kann, deren jede die Beobachtungsdaten mit gle
Genauigkeit wiedergiebt. Jene nicht näher zu bestimme
Aenderungen erklären die Abweichungen der Beobachtunge
der früheren Theorie, die zwar die Lage der Maxima und Mi
genügend genau ergiebt, nicht aber die Grösse der Intensi

Zu dem Aufsatze des Herrn Fröhlich ist zu bemerken,
dasselbe Problem von Herrn G. Kirchhoff in seiner Arbeit
die Lichtstrahlen (cf. das vorhergehende Referat) absolvirt ist
zwar nach des Referenten Ansicht in eleganterer und stre
Weise. Wi

H. Struve. Fresnel's Interferenzerscheinungen th
tisch und experimentell bearbeitet. Diss. Dorpat
Wiedemann Ann. (2) XV. 49-80.

Der Verfasser geht von demselben Grundgedanken au
zuerst Herr H. F. Weber in seiner Theorie der Fresnel'scher
ferenzerscheinungen (Wiedemann Ann. (2) VIII. 401-444, cf. F
XI. 1879. 741-744) ausgesprochen, dass nämlich die Berü
tigung der Diffraction für diese Theorie wesentlich sei.
langt jedoch zu den Weber'schen Endformeln auf viel ei
rem Wege, und ausserdem gelingt es ihm, die Weber'sch
sultate nach zwei Seiten hin zu verallgemeinern. Es ge
dies dadurch, dass von vorn herein das Problem als ein
allgemeinerung einer bekannten Aufgabe aus der Theori
Fresnel'schen Beugungserscheinungen aufgefasst wird. Wi
nämlich bei den Beugungserscheinungen die Intensität in
Punkte P zu bestimmen ist, wenn die von einem leucht
Punkte L ausgehenden Lichtstrahlen durch eine rechteckig
nung gebeugt sind, so treten hier nur an Stelle der einer
gleiche rechteckige Oeffnungen, deren längere parallele
durch einen kleinen Zwischenraum, die beugende Kante, ge
sind. Ferner sind zwei leuchtende Punkte vorhanden,
jeder sein Licht nach einer der Oeffnung sendet. Diese P
die verschiedene Entfernungen von der beugenden Kante h
machen gleichartige Schwingungen, aber von verschiedener I

Folge dieser Fassung des Problems ist die weitere Behand-
ıg desselben in ebenso einfacher Weise möglich, wie bei den
wöhnlichen Beugungserscheinungen. Ebenso wie bei diesen
;iebt sich der Ausdruck für die Intensität in einem beliebigen
nkte, ein Ausdruck, der dann durch die üblichen vereinfachen-
ı Annahmen weiter reducirt wird. Dadurch wird die Betrach-
g der complicirten, den Bessel'schen Functionen verwandten
ınscendente, auf die Herr Weber das Problem zurückgeführt
te, überflüssig. Statt dieser Transcendente treten hier viel-
hr, und das ist eine wesentliche Vereinfachung, in dem Aus-
ck für die Lichtintensität die beiden Functionen

$$M(v) = \int_{v}^{\infty} \cos(\xi^2 - v^2)\,d\xi, \quad N(v) = \int_{v}^{\infty} \sin(\xi^2 - v^2)\,d\xi$$

welche mit den gewöhnlichen Fresnel'schen Integralen durch
'ache Relationen zusammenhängen, sich aber vor denselben
urch auszeichnen, dass sie für positive Argumente v keine
ıodische, sondern eine stetige Abnahme besitzen. Dies wird
aus abgeleitet, dass für positive Argumente v jene Functionen
die Form gebracht werden können:

$$M(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-v^2 x^2} dx}{1+x^4}, \quad N(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-v^2 x^2} dx}{1+x^4}.$$

iter folgen aus dieser Form unmittelbar die Cauchy'schen
ıiconvergenten Reihen zur Berechnung von M und N für posi-
: v, während die Functionswerte für negative Argumente mit
jenigen für positive Argumente durch die Relationen zusam-
ıhängen:

$$M(-v) = \sqrt{\pi} \sin\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - M(v),$$

$$N(-v) = \sqrt{\pi} \cos\left(v^2 + \frac{\pi}{4}\right) - N(v).$$

' die besprochenen Eigenschaften der Functionen M und N
zt sich die Discussion des Intensitätsausdrucks; und aus dieser
cussion ergeben sich nicht nur die Weber'schen Resultate,
dern auch Verallgemeinerungen derselben, die darin bestehen,

dass die virtuellen Lichtpunkte nicht gleiche, sondern verschiedene Abstände von der beugenden Kante haben, und dass die beugende Kante keine mathematische Linie ist, sondern eine im Vergleich zur Wellenlänge des Lichts nicht zu vernachlässigende Breite besitzt. In dem Falle, wo der Interferenzapparat ein Doppelspiegel ist, sind diese Annahmen gleichbedeutend damit, dass die mathematische Durchschnittslinie der Spiegelebenen nicht mit der beugenden Kante zusammenfällt, und dass die beiden Spiegel nicht vollständig an einander grenzen. Die Untersuchung des Einflusses, den eine gewisse Breite der beugenden Kante auf die Erscheinungen ausübt, ist aber nötig, wenn man die Fresnel'schen Interferenzerscheinungen nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ mit der Theorie vergleichen will.

Den Schluss der Arbeit, deren Resultate im Einzelnen mitzuteilen hier zu weit führen würde, bilden Messungen zur Vergleichung der theoretischen Ergebnisse mit der Erfahrung.

Wn.

A. LINDSTEDT. Zur Theorie der Fresnel'schen Integrale. Wiedemann Ann. (2) XVII. 720-725.

Der Verfasser hat eine Tafel für die mit den Fresnel'schen Integralen verwandten Functionen $M(v)$, $N(v)$ (vergleiche das vorhergehende Referat) berechnet, die für $v = \sqrt{\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\pi}$ das Intervall $\beta = 0$ bis $\beta = 8{,}9$ umfasst. Zur Berechnung dienen für grosse Werte von v die bekannten semiconvergenten Reihen, während für kleinere Werte des Arguments neue Recursionsformeln aufgestellt werden, die eine bequeme Berechnung gestatten.

Wn.

H. STRUVE. Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben. Petersb. Mém. XXX. No. 8.

H. STRUVE. Beitrag zur Theorie der Diffraction an Fernröhren. Wiedemann Ann. (2) XVII. 1008-1016.

In der ersten der beiden Arbeiten, die dem Referenten nicht gänglich war, hat der Verfasser, wie er im Eingang der zwei- Arbeit erwähnt, unter anderem die Intensitätsverteilung in r Focalebene eines Fernrohrs für den besonderen Fall unter- cht, dass das geometrische Focalbild der Lichtscheibe gerad- ig begrenzt ist und in allen Teilen dieselbe specifische Inten- ät besitzt. Die Aufgabe führte auf die Bestimmung eines ppelintegrals der Bessel'schen Function $J_1(z)$ und wurde mit lfe von Reihenentwickelungen ausgeführt. Dieselbe Aufgabe n wird in der zweiten Arbeit auf directerem Wege und in ganterer Form gelöst. Aus dem bekannten Ausdruck für die ensität, welche ein Lichtpunkt bei der Beugung durch die eisförmige Oeffnung des Fernrohrs in einem beliebigen Punkte r Focalebene hervorbringt, ergiebt sich durch Integration für e von einer Lichtlinie herrührende Intensität ein Ausdruck von r Form

$$(1) \qquad I = C \int_z^{\infty} \frac{[J_1(x)]^2 dx}{x\sqrt{x^2 - z^2}}.$$

ırch verschiedene Umformungen, bei denen neben anderen kannten Formeln die Neumann'sche Darstellung von $[J_1(x)]^2$ ırch ein Integral von $J_2(x)$, sowie das Mehler'sche Integral für (x) (cf. F. d. M. IV. 1872. p. 227) benutzt werden, gelangt man ı dem Resultate:

$$(2) \qquad I = \frac{3}{8}\pi \frac{H_1(2z)}{z^2},$$

o

$$H_1(z) = \frac{2}{\pi} z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin\beta) \cos^2\beta \, d\beta$$

ne mit den Bessel'schen Functionen nahe verwandte Function t. Für $H_1(z)$ wird noch eine andere Integraldarstellung mitge- ilt, ferner eine convergente und eine semiconvergente Reihen- ıtwickelung, endlich eine Recursionsformel, die $H_1(z)$ mit der unction

$$H_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \sin\beta) \, d\beta$$

verbindet. Aus (2) folgt durch Integration nach z zwischen den Grenzen z und ∞ die Intensitätserteilung an einer geradlinig begrenzten homogenen Lichtscheibe (Kreisscheibe von unendlich grossem Radius). Für dies Integral ergeben sich aus den oben erwähnten Reihen für $H_1(z)$ analoge Reihen, die unmittelbar zu genäherten Ausdrücken für die gesuchte Intensität führen.

Zum Schluss wird angedeutet, wie man auf analoge Weise ein allgemeineres Integral entwickeln kann, das aus (1) entsteht, wenn dort $J_n(ax).J_n(bx)$ an Stelle von $\{J_1(x)\}^2$ tritt. Dies allgemeinere Integral würde seine Anwendung bei einer ringförmigen Objectivöffnung finden. Wn.

J. Delsaux. Sur une propriété de la diffraction des ondes planes dans les systèmes de petites ouvertures. Brux. S. sc. VI. B. 1-8.

Verallgemeinerung von Eigenschaften, die für einen besondern Fall aufgestellt waren. Man vergleiche „Billet, Optique physique" I. p. 224. Mn. (O.)

W. König. Ueber die elliptische Polarisation des reflectirt gebeugten Lichtes. Wiedemann Ann. (2) XVII. 1016-1036.

Die wesentlich experimentelle Arbeit enthält eine theoretische Entwickelung, die sich eng an eine Arbeit von Réthy (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 770) anschliesst. An Stelle der von Réthy betrachteten Kugelwellen geradlinig polarisirten Lichts treten hier nur solche elliptisch polarisirten Lichts. Wn.

Gouy. Sur la propagation des ondes lumineuses, eu égard à la dispersion. Résal J. (3) VIII. 335-356.

Das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit war vom Verfasser bereits im Jahre 1880 in den C. R. ohne Beweis veröffentlicht und von Herrn Cornu bekämpft (cf. F. d. M. XII. 1880. p. 749). Hier tritt nun deutlicher hervor, was der Verfasser meint;

.nterscheidet nämlich in Bezug auf die Fortpflanzungsgeschwin-
keit zwei verschiedene Begriffe, 1) die individuelle Geschwin-
keit einer einzelnen Welle, die $= \frac{\lambda}{T}$ ist, wenn λ die Wellen-
;e, T die Vibrationsdauer; 2) die Fortpflanzungsgeschwindig-
der Lichtintensität bei dem Zusammenwirken einer Zahl
Wellen, die zusammen nahezu homogenes Licht ergeben.
e soll

$$= \frac{\lambda}{T} - \frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}$$

. Es wird dies folgendermassen begründet. Die Bewegung,
che eine einzelne ebene Welle von der Fortpflanzungsrichtung
ervorbringt, sei dargestellt durch die Gleichung

$$(1) \qquad \eta = A\sin(Kx - St) + B\cos(Kx - St),$$

ei zwischen den Constanten S und K eine Gleichung von
Form

$$(2) \qquad S = F(K)$$

findet. Wirken unzählig viele ebene Wellen mit verschiede-
K zu gleicher Zeit, so ist die Verrückung eines Punktes

$$3) \qquad \eta = \int_0^\infty \{\varphi_1(K)\sin(Kx - St) + \varphi_2(K)\cos(Kx - St)\}\, dK;$$

Functionen φ_1 und φ_2 sind durch den Anfangszustand des
iums bestimmt. Die durch (3) dargestellte Lichtbewegung
ugt nahezu homogenes Licht, wenn die Functionen φ_1 und φ_2
alle Werte von K verschwinden, ausser für solche K, die
schen $K_0 - \varepsilon$ und $K_0 + \varepsilon$ liegen, unter ε eine kleine Grösse
tanden. Unter der Voraussetzung, dass diese Bedingung er-
ist, wird die Gleichung (3) in die Form gebracht

$$(4) \qquad \eta = \mathfrak{F}(x,t)\sin[K_0 x - S_0 t + \chi(x,t)].$$

hierdurch repräsentirte Bewegung, deren Intensität

$$(5) \qquad I = \frac{1}{2\Delta t}\int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 dt$$

wird gedeutet als eine Wellenbewegung mit veränderlicher

Wellenlänge, Amplitude und Phase; und zwar sind die Aend rungen dieser Grössen langsame. Denkt man nun die rech Seite von (2) nach dem Taylor'schen Satze nach Potenzen v $K-K_0$ entwickelt und bricht schon nach der ersten Potenz v $K-K_0$ ab, so enthalten die in (4) vorkommenden Functio F und χ die Variabeln x und t nur in der Verbindung $x-tF'($ und auch die Intensität I wird ein Ausdruck der Form

$$I = f[x-tF'(K_0)].$$

Die Gleichung (4) stellt dann eine Wellenbewegung dar, die mit der Geschwindigkeit $v = F'(K_0)$ fortpflanzt. Diese Näher genügt indessen nur, wenn das Licht sehr nahe homogen ist den meisten Fällen wird eine weitere Näherung nötig. Be man daher in der obigen Entwickelung von S noch das G $(K-K_0)^2$ bei, so erhält man für die Functionen $F(x,t)\cos\chi$ und $F(x,t)\sin(\chi(x,t))$ Reihen, die nach Potenzen von t schreiten, während ihre Coefficienten Functionen des Argum $x-tF'(K_0)$ sind. Vernachlässigt man hier die zweiten und h ren Potenzen von t, so folgt für die Fortpflanzungsgeschwindig die vorher $F'(K_0)$ war, der Wert:

$$V = F'(K_0) + F''(K_0)\frac{d\chi(x-tF'(K_0))}{dx}$$

$$= F'(K_0) + \left(\frac{2\pi}{\lambda} - K_0\right)F''(K_0) = F'\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right),$$

falls λ die Wellenlänge der durch (4) repräsentirten Bewe ist. Vermöge der Bedeutung von F kann man schreiben

$$V = \frac{dS}{dK} = \frac{d\left(\frac{1}{T}\right)}{d\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\lambda}{T} - \lambda\,\frac{d\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{d\lambda}.$$

Ist $n = \frac{\lambda}{\lambda'}$ der Brechungsexponent beim Uebergang von e Medium in ein andres, so ist das Verhältnis der Lichtgesch digkeiten in beiden Medien

$$\frac{V}{V'} = n - \lambda\frac{dn}{d\lambda}.$$

nt hält die Resultate der Arbeit noch immer für unan-
ar, die oben skizzirte Begründung für nicht stichhaltig.

Wn.

MMEL. Theorie der elliptischen Doppelbrechung.
demann Ann. (2) XV. 378-390.

ie Grundlage der Untersuchung bilden, abgesehen von ge- hier angebrachten Modificationen, die Gleichungen, von der Verfasser in seiner Theorie der Doppelbrechung aus- ;en war (cfr. F. d. M. X. 1878. 696). Die Modificationen ən darin, dass 1) die Gleichungen nicht auf die Haupt- tätsaxen bezogen werden, sondern auf solche Axen, dass Fortpflanzungsrichtung ist, und dass 2) jeder der beiden ıngen für die Bewegung der ponderablen Molecüle noch satzglied hinzugefügt ist, herrührend von dem schrauben- ən Bau der Molecüle, während die Gleichungen für die ung der Aethermolecüle ungeändert bleiben. Die eben ıten Zusatzglieder sind von derselben Form, wie in der igen Bande des Jahrbuchs besprochenen Arbeit des Ver- (cfr. F. d. M. XIII. 1881. p. 751). Für die Componenten :hwingungen der Aether- und Körpertheilchen wird der ıck

$$l = e^{-\left(K + \frac{q}{c} i\right) z + qit}$$

ımmen, je mit einer Constanten multiplicirt, und es wird ıntersucht, unter welchen Bedingungen diese Ausdrücke ɔigen Grundgleichungen genügen. Es ergiebt sich, dass əwegungen der Aethermolecüle in zwei entgegengesetzt ch polarisirten Wellen bestehen, deren Bahnellipsen ein- ähnlich, aber um einen rechten Winkel gegen einander t sind, und die mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort- ən. Weiter werden die Ausdrücke für die Axenrichtungen, ɛenverhältnis der Ellipsen, der Phasenunterschied beider etc. genauer discutirt und mit Beobachtungen von Jamin ben.

Wn.

noch nichts veröffentlicht, da er zuvor das Einfachere, die htbewegung innerhalb eines einzelnen Mediums habe absol-n wollen. Er habe aber auch schon den Uebergang aus em Medium in ein anderes behandelt. Aus einer darüber nächst zu veröffentlichenden Arbeit teilt er als erwähnens-tes neues Resultat mit, dass zu dem Brechungsgesetze der llennormale ein analoges Gesetz für die Brechung der Ab-tionsnormale hinzutrete. Dadurch gelange er zu Formeln, noch allgemeiner seien, als die Ketteler's. Uebrigens stehe was die Reflexionstheorie betreffe, im Wesentlichen auf teler's Standpunkt, dessen Verdienste in diesem Teile er an-nne. Dagegen müsse er sich seinerseits gegen die Grund-n von Ketteler's Dispersionstheorie wenden. Die von Ketteler die Spitze seiner Theorie gestellten Gleichungen (cf. F. d. M. 1880. p. 758, 759; gegen die Begründung dieser Gleichungen auch Referent wiederholt Bedenken geäussert) seien nicht der Mechanik abgeleitet, sondern Forderungen, die Ketteler ulirt habe, um ihnen ohne weitere Begründung den Rang trischer Grundgesetze zu vindiciren. Ferner arbeite Ketteler Differentialgleichungen, welche eine willkürliche Constante, erst im Integral auftreten sollte, bereits enthielten.

Ein letzter Einwurf von Ketteler, der sich gegen Lommel's rescenztheorie richtet, wird gleichfalls als unhaltbar nach-esen.

Ausser gegen Lommel wendet sich Ketteler auch gegen die xionstheorieen von Glazebrook und Mathieu (cf. F. d. M. XIII. . p. 749). Er findet es verwunderlich, dass diese Autoren len Standpunkt F. Neumann's zurückgehen. Auch halte er alsch, dass Mathieu bei der Reflexion einen Verlust an leben-Kraft postulire. Eine genügende Begründung dieses Ur-wird nicht mitgeteilt. Wn.

OIGT. Bemerkungen zu Herrn E. Lommel's Theorie Doppelbrechung, der Drehung der Polarisations-ne und der elliptischen Doppelbrechung. Wiedemann (2) XVII. 468-476.

hinzugefügt werden, wie sie von Lommel (cf. F. d. M. XIII. . p. 751) benutzt sind. Fällt die z-Axe mit dem Lichtstrahle mmen, so ergiebt das sogenannte Gesetz der Verwandlung Schwingungsarbeit des Aethers die Gleichungen

$$
\text{I)}\quad \begin{cases} m\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta s+\Sigma m'\dfrac{\partial^2\xi'}{\partial t^2}\delta s' = \mathfrak{e}\left(\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)\delta s,\\[2mm] m\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\delta s+\Sigma m'\dfrac{\partial^2\eta'}{\partial t^2}\delta s' = \mathfrak{e}\left(\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\eta}{\partial z^2}\right)\delta s,\end{cases}
$$

end das Gesetz der Verwandlung der Schwingungsarbeit der cularkräfte der Körperteilchen für jede einzelne Moleculartät Gleichungen der Form ergiebt:

$$
\text{I)}\quad \begin{cases} m\dfrac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\delta\mathfrak{s}+m'\dfrac{\partial^2\xi'}{\partial t^2}\delta\mathfrak{s}'\\ \qquad = -\left(\varkappa\xi'+\gamma\dfrac{\partial\xi'}{\partial t}\right)\delta\mathfrak{s}'-\left(\mathfrak{f}\eta'+\mathfrak{g}\dfrac{\partial\eta'}{\partial t}\right)\delta\mathfrak{s}',\\ m\dfrac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\delta\mathfrak{s}+m'\dfrac{\partial^2\eta'}{\partial t^2}\delta\mathfrak{s}'\\ \qquad = -\left(\varkappa\eta'+\gamma\dfrac{\partial\eta'}{\partial t}\right)\delta\mathfrak{s}'+\left(\mathfrak{f}\xi'+\mathfrak{g}\dfrac{\partial\xi'}{\partial t}\right)\delta\mathfrak{s}'.\end{cases}
$$

ı bedeuten ξ, η die Schwingungscomponenten der Aether-, die der Körperteilchen, m, m' ihre Massen. Die Grössen ', $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ sind Constanten. Endlich bedeuten δs, $\delta s'$, $\delta\mathfrak{s}$, $\delta\mathfrak{s}'$ kleine ıckungen, deren resp. Verhältnisse als für das Mittel charakisch gleichfalls als gegeben vorausgesetzt werden. Die vier, Constanten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ enthaltenden Glieder sind zu den früheren hungen des Verfassers neu hinzugetreten. Es wird nun sucht, unter welchen Bedingungen man den Gleichungen II), (denen nach des Referenten Ansicht eine genügende aniche Begründung bisher noch fehlt) genügen kann durch

$$
\text{(III)}\quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda}bz}\cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{az}{\lambda}\right)\right],\\ \eta = \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda}bz}\sin\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{az}{\lambda}\right)\right],\\ \xi' = \mathfrak{A}'_x e^{\frac{2\pi}{\lambda}bz}\cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{az}{\lambda}\right)-\Delta_x\right],\\ \eta' = \mathfrak{A}'_y e^{\frac{2\pi}{\lambda}bz}\sin\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{az}{\lambda}\right)-\Delta_y\right].\end{cases}
$$

Im Allgemeinen beschreiben die Aether- und Körperteilchen focale Ellipsen in demselben Sinne. In den besonderen F $\mathfrak{f} = 0$ oder $\mathfrak{g} = 0$ gehen diese in Kreise über. Je nach Sinne, in dem diese Kreise durchlaufen werden, ist das A tudenverhältnis der Aether- und Körperteilchen nebst dem G unterschiede Δ verschieden; somit ist für beide Fälle auc Refractionscoefficient a und der Extinctionscoefficient b für r läufige Schwingungen ein anderer, als für linksläufige. D die Abhängigkeit dieser Coefficienten von der Wellenlänge ergebenden Formeln werden eingehend discutirt.

Im zweiten Abschnitt werden die magnetischen Mitt trachtet. Die zu Grunde liegenden Gleichungen sind vo ähnlicher Form wie die obigen Gleichungen (I) und (II), nu $\mathfrak{f} = 0$ gesetzt wird. Dieselben Gleichungen, nur wenig r cirt, dienen sodann (dritter Abschnitt) zur Untersuchung e krystallinischer Mittel, welche elliptisch polarisiren, währ den beiden letzten Abschnitten die Gleichungen des erst Erklärung der Drehung der Polarisationsebene, sowie der laren Reflexion und Refraction für senkrechte Incidenz ange werden. Die Einzelresultate dieser Untersuchungen hier teilen, würde zu weit führen. Wi

---

A. Wüllner. Zur Dispersion farblos durchsic Medien. Wiedemann Ann. (2) XVII. 580-587.

Der von Helmholtz in seiner Theorie der anomalen D sion (cf. F. d. M. VI. 1874. p. 654) abgeleitete Dispersions wird umgeformt und dann auf farblos durchsichtige Medien auf solche, für die der Absorptionscoefficient verschwinde gewandt. Für diese ergiebt sich folgende Dispersionsform

$$n^2 - 1 = -P\lambda^2 + Q\,\frac{\lambda^4}{\lambda^2 - \lambda_m^2}.$$

Eine Vergleichung dieser Formel mit den Beobachtungen e weiter, dass für alle untersuchten Substanzen P und Q sehr gleich sind. Setzt man beide gleich, so geht die Forn

e schon von Lommel abgeleitete über (cfr. F. d. M. XI. 1879. 739). Wn.

F. Glazebrook. On the refraction of plane polarised light at the surface of a uniaxal crystal. Phil. Trans. CLXXIII. 595-620.

Die Arbeit ist grösstenteils experimentell. Der Verfasser merkt, dass die Gesetze der Reflexion und Brechung des larisirten Lichtes an einer Krystallfläche aus der elektromagnechen Lichttheorie von Lorentz (Schlömilch Z. XXII.; s. F. d. M. 1878. 689), Fitzgerald (Phil. Trans. CLXXI.; cf. F. d. M. XII. 80. 751) und ihm selbst (Camb. Proc. 1881) abgeleitet sind. recapitulirt die Formeln, zu denen er früher gelangt war, und rmt sie so um, wie es die besonderenBeobachtungsbedingungen fordern. Zwei längere Beobachtungsreihen, die im Herbst 1880 d im Sommer 1881 angestellt sind, führen dann zu dem Erbnis, dass die Formeln, zu denen die elektromagnetische Lichteorie hinsichtlich der Beziehung gelangt, in welcher die Polaritionsebene des einfallenden zu der des an der Oberfläche eines naxigen Krystalls gebrochenen Strahles steht, nicht genau sind, ndern die Erscheinung nur angenähert wiedergeben. Die Foreln sind dieselben, wie die von Neumann, MacCullagh, Kirchff und Anderen aus verschiedenen Hypothesen über die Natur s Aethers abgeleiteten. Im Falle eines isotropen brechenden ediums stimmen dieselben, was die Lage der Polarisationsebene s reflectirten Strahles betrifft, mit Fresnel's Formeln überein, cht aber für den gebrochenen Strahl. Cly. (Wn.).

. J. Glazebrook. On some equations connected with the electromagnetic theory of light. Cambr. Proc. IV. 155-167.

Das Problem der Reflexion und Refraction des Lichtes nach axwell's Theorie ist von Lorentz behandelt worden (Schlömilch XXII.), dann von J. J. Thomson (Phil. Mag. 1880), wenigstens

insofern, als isotrope Medien in Betracht kommen, und dann von Fitzgerald (Phil. Trans. 1881). Die vorliegende Arbeit eine Methode, die Intensität der reflectirten und gebro ebenen Wellen im allgemeinsten Falle zu gewinnen, nämlic einer Welle, welche in einem krystallinischen Medium a Oberfläche eines anderen Krystalls einfällt. Diese Metho einfacher als die Methode von Lorentz oder Fitzgerald. E Resultate sind in einer Form ausgedrückt, dass sie sofort e mentell verificirt werden können. Glr. (O.)

A. C. van Rijn van Alkemade. De elliptische p satie bij de terugkaatsing van het licht door schynende middenstoffen. Diss. Leiden.

Die Dissertation handelt über die elliptische Polarisati der Reflexion des Lichtes an der Oberfläche durchschei Mittel. Der bekannte Satz von Fresnel lässt einige Um welche auf diese Reflexion von Einfluss sind, ausser Acht. (hat dies zu verbessern gesucht, indem er longitudinale S gungen einführte, was aber nicht ausreicht wegen der Sch keiten, welche seine Aethertheorie mit sich bringt. Deshal der Verfasser der elektromagnetischen Theorie von Maxw Vorzug, wobei aber die Schwierigkeit entsteht, dass die pflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Oscillatione einer Constanten abhängt, welche von Helmholtz in die für die Inductionswirkung dreier Stromelemente eingefü und deren Wert man noch nicht hat bestimmen können, s damit die Existenz von longitudinalen Schwingungen zwei wird. Es wird gezeigt, dass, wenn longitudinale Schwin möglich sind, ihr Einfluss jedenfalls klein ist im Vergle dem von Lorentz in Kopenhagen gefundenen Umstand, das Mittel, an deren Grenzfläche das Licht reflectirt wird, nicht von einander getrennt sind, sondern dass daselbst ein allmä Uebergang stattfindet. Weiter wird untersucht, in wiefe wenn auch noch so schwache Absorption des Lichtes beobachteten elliptischen Polarisation beitragen kann, zu

weil die elliptische Polarisation bei Metallen aus ihrer Undurchdringlichkeit erklärt wird, und ferner, weil u. A. nach den Versuchen von Wiedemann auch andere stark absorbirende Mittel eine starke elliptische Polarisation zeigen. Aus der ausführlichen Bezeichnung ergiebt sich indessen, dass diese Absorption zur Erklärung der elliptischen Polarisation nicht beitragen kann. Die Dissertation zeichnet sich durch klare Auseinandersetzung und gründliche Behandlung des wichtigen Gegenstandes aus.

G.

F. Lippich. Ueber polaristrobometrische Methoden.
Wien. Ber. LXXXV. 268-326.

Bringt man zwei Polarisatoren in gekreuzter Stellung vor das Auge, so erscheint das Gesichtsfeld nicht gleichmässig dunkel, sondern von den dunkelsten Stellen aus nimmt die Helligkeit in verschiedener Weise zu. Der Grund dafür liegt darin, dass ein Polarisator entweder nur für eine einzige Strahlenrichtung genau geradlinig polarisirtes Licht giebt, oder dass, wenn für alle Strahlenrichtungen innerhalb gewisser Grenzen das Licht geradlinig polarisirt ist (wie es bei Anwendung doppelbrechender Medien der Fall ist), die Polarisationsebenen der einzelnen Strahlenrichtungen in ihrer Orientirung von einander abweichen. Welchen Einfluss dieser Umstand auf die Helligkeitsverteilung im Gesichtsfelde gekreuzter Polarisatoren hat, wie ferner die Helligkeitsverteilung von der Natur der Polarisatoren und der speciellen Versuchsanordnung abhängt (die Erscheinung ist z. B. verschieden, je nachdem die Polarisatoren in paralleles Licht gestellt sind oder nicht), wird in der vorliegenden Arbeit eingehend erörtert. Damit wird eine theoretische Grundlage für die Construction eines Polarimeters geschaffen, sowie auch manche Wahrnehmungen, die bei Verwendung der üblichen Polarimeter gemacht sind, ihre Erklärung finden. Da die Resultate mehr von physikalischem, als mathematischem Interesse sind, so übergehen wir die Einzelheiten.

Wn.

A. Michelson. Sur le mouvement relatif de la terre et de l'éther. C. R. XCIV. 520-523.

In der Theorie der Aberration des Lichtes wird angenommen, dass der Aether sich in stationärem Zustande befindet. Der Verfasser legt dar, wie er hoffte, die Richtigkeit dieser Hypothese dadurch prüfen zu können, dass er zwei Strahlen interferiren liess, welche in der Luft dieselbe Strecke zurückgelegt haben, aber der eine in der Richtung oder entgegengesetzt der Richtung, wie sich die Erde bewegt, und der andere in dazu senkrechter Richtung. Das Resultat war negativ, „die Hypothese eines stationären Aethers ... würde daher falsch sein."

Man vergleiche: Mascart, Recherches expérimentales des modifications qu'éprouve la lumière par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur. Ann. de l'école norm. (2) III. 363-420. 1874. Rs.

F. Boas. Ein Beweis des Talbot'schen Satzes und Bemerkungen zu einigen aus demselben gezogenen Folgerungen. Wiedemann Ann. (2) XVI. 359-362.

Der der physiologischen Optik angehörende Talbot'sche Satz sagt aus, dass, wenn eine Stelle der Netzhaut von einem periodisch veränderlichen Lichte getroffen wird, bei genügend kurzer Dauer der Periode ein continuirlicher Eindruck entsteht, der dem gleich ist, welcher entstehen würde, wenn das während einer Periode eintreffende Licht gleichmässig über die ganze Dauer der Periode verteilt würde. Der hier mitgeteilte Beweis beruht darauf, dass nach dem Fechner'schen Gesetze zwei dieselbe Stelle der Netzhaut treffende Reize durch Addition zusammengesetzt werden; dass man ferner für die resultirende Empfindung ihren Mittelwert setzen kann, da bei kurzer Dauer der Periode die Schwankungen für die Empfindung unmerkbar werden.

Wn.

C. Geometrische Optik.

F. Hoffmann. Ueber Linienpaare mit optischen, denen der Brennpunkte entsprechenden Eigenschaften. Schlömilch Z. XXVII. 189-192.

„Ist ein Kegelschnitt K und ein beliebig gelegener Punkt P gegeben, so giebt es zwei reelle und ausserhalb K verlaufende Gerade x, y von folgender Eigenschaft: Ist durch P und einen beliebigen Punkt A von K ein Spiegel senkrecht zur Ebene von K aufgestellt, sind ferner X und Y die Schnittpunkte der Geraden x, y mit der Tangente g des Punktes A, so wird ein von X nach P gelangender Lichtstrahl vom Spiegel nach Y reflectirt."

Diese beiden Geraden, für die eine einfache Construction mitgeteilt wird, haben die Eigenschaft, dass immer zwei auf ihr gelegene, in Bezug auf K conjugirte Punkte von P aus unter rechtem Winkel erscheinen. Ueberhaupt lässt jeder Satz über Brennpunkte sofort eine Uebertragung in Bezug auf diese beiden Geraden zu. Wn.

J. Morawetz. Zur Reflexion und Refraction des Lichtes an Curven und Flächen. Schlömilch Z. XXVII. 310-313.

Die Zeit, welche ein von einem Punkte ausgehender Lichtstrahl bedarf, um nach der Reflexion an einer Curve oder Fläche nach einem zweiten Punkte zu gelangen, ist im Allgemeinen kleiner oder grösser, als jene Zeit, welche das Licht brauchen würde, wenn es vom ersten Punkte über irgend einen dem reflectirenden benachbarten Curven- oder Flächenpunkt zum zweiten Punkte ginge. Dieser bekannte Satz wird hier bewiesen mit Hülfe derjenigen Ellipse (resp. des Rotationsellipsoids), welche die beiden oben genannten Punkte zu Brennpunkten hat und die gegebene Curve (resp. Fläche) berührt. Ein analoger Satz für die Brechung des Lichtes ergiebt sich auf ähnliche Weise aus bekannten Eigenschaften des Cartesischen Ovals.

Wn.

F. Kessler. Ueber das Minimum der Zeit bei der Brechung des Lichts. Wiedemann Ann. (2) XV. 331-335

F. Kessler. Ueber das Minimum der Rotation des Lichtstrahls bei combinirter Brechung und Spiegelung an einer Kugel. Wiedemann Ann. (2) XV. 330-333.

F. Kessler. Das Minimum der Ablenkung eines Lichtstrahls durch ein Prisma. Wiedemann Ann. (2) XV. 333-334.

In der erstgenannten der obigen Arbeiten wird zunächst die einfache Construction eines an einer Kugel gebrochenen Lichtstrahls mit Hülfe zweier concentrischer Kugeln von dem n-fachen und $\frac{1}{n}$-fachen Radius erörtert. Diese Construction ist indessen nicht, wie der Verfasser meint, neu. Aus derselben ergiebt sich, bei Anwendung auf die Brechung an einer Ebene, durch einfache Betrachtungen der Satz vom Minimum der Zeit bei Erfüllung des Brechungsgesetzes.

Eine ähnliche, rein geometrische Lösung wird in der zweiten Aufgabe für die Frage nach dem Minimum der Ablenkung eines Strahles mitgeteilt, der in eine Kugel ein- und nach mehrmaliger Reflexion im Innern derselben wieder austritt. (Der Verfasser braucht für Ablenkung den ungewöhnlichen Namen Rotation.) Diese constructive Methode hat den Vorteil, den Gang der Strahlen beim Regenbogen anschaulich zu machen.

In der dritten Arbeit wird der Satz vom Minimum der prismatischen Ablenkung dadurch bewiesen, dass das Viereck, mittelst dessen der Gang eines Lichtstrahls im Prisma dargestellt wird, in seiner Lage geändert wird, und zwar so, dass der brechende Winkel und die Ablenkung constant bleiben, während n bis zu einem Maximum wächst; und dass sodann dasselbe Viereck bei unveränderter Lage wieder auf die ursprüngliche Grösse reducirt wird. Wn.

. Hammerl. Ueber Regenbogen, gebildet durch Flüssigkeiten von verschiedenen Brechungsexponenten. Wien. Ber. LXXXVI. 206-215.

Der theoretische Teil der Arbeit ist nur eine Reproduction ɔr bekannten Newton'schen Theorie, wie man sie in den meisten ıysikalischen Lehrbüchern findet. Wn.

. Delsaux. Sur la théorie de l'arc en ciel. Brux. S. sc. VI. B. 9-16.

Vereinfachung der Theorie von Airy. Mn. (O.).

. Moser. Die Grundformeln der Dioptrik für den praktischen Gebrauch entwickelt. Prag. Ber. 1881. 141-166.

Die wichtigsten und bekanntesten Sätze der Linsentheorie 'erden abgeleitet, ohne dass irgend welche neuen Resultate oder euen Gesichtspunkte dabei zu Tage treten. Den Ausgangspunkt ildet für die Brechung an einer einzelnen Kugelfläche die Beachtung des Doppelverhältnisses folgender vier Strahlen: Einıllender Strahl, gebrochener Strahl, Einfallslot, Einfallstangente. ieraus ergiebt sich das Doppelverhältnis ihrer Schnittpunkte mit inem in ihrer Ebene liegenden, ungebrochen durch die Kugelſäche gehenden Strahle, und weiter folgen Beziehungen zwischen en Coordinaten jener Schnittpunkte. Diese werden benutzt, um ie bekannten Sätze über die Brechung centraler Strahlen aufustellen, während der weitere Gang in allem Wesentlichen der bliche ist. Ein Schlussabschnitt behandelt die sphärische Abreichung, entwickelt aber auch lediglich bekannte Resultate. Wn.

F. Kessler. Ueber den Ersatz eines centrirten Systems brechender Kugelflächen durch eine einzige dieser Art. Wiedemann Ann. (2) XVI. 362-366.

Eine Linse kann, was die Lage ihrer conjugirten Punkte

anbetrifft, durch eine einzige brechende Fläche ersetzt werden. Derartige Flächen giebt es zwei, die so liegen, dass der Scheitel der einen zugleich Mittelpunkt der zweiten ist. Die Scheitel sind aber nichts anderes, als Listing's Symptosen, d. h. die Punkte, in denen Object und Bild an demselben Ort liegen. Die ersetzende Fläche giebt jedoch ein anderes Bildgrössenverhältnis β als die ursprüngliche Linse, für die jenes Verhältnis $= b$ sei; und zwar ist

$$\frac{b}{\beta} = v,$$

wenn v die Vergrösserung ist, welche die Linse im Scheitel der ersetzenden Fläche hervorbringt. Zugleich ist $\nu = v^2$ der Brechungsquotient der ersetzenden Fläche; endlich ist das der einen ersetzenden Fläche angehörige ν der reciproke Wert des ν der andern Fläche.

Für diese Resultate, die der Verfasser zunächst empirisch aus einer Zeichnung ermittelt hatte, wird ein von Herrn V. v. Lang herrührender Beweis mitgeteilt. Wn.

K. W. Zenger. Berechnung des Endomersions-Objectivs für Fernrohr- und Mikroskopobjective. Prag. Ber. 1881. 467-479.

K. W. Zenger. Dioptrische Studien. Prag. Ber. 1881. 479-492.

Es handelt sich in beiden Arbeiten um die Berechnung des sogenannten „symmetrischen Endomersionsobjectivs“. Dasselbe besteht aus einer biconvexen Crownglas- oder Bergkrystalllinse und einer planconvexen Flüssigkeitslinse. Die Radien der drei krummen Flächen dieser beiden Linsen sind gleich, die letzte Fläche eben. Der Verfasser verfolgt den Weg eines beliebigen Strahles durch die beiden Linsen mittelst genauer trigonometrischer Rechnung und bestimmt dadurch, welche Brechungsexponenten die Flüssigkeit für die einzelnen Spectrallinien haben muss, damit vollständige Aplanasie und Achromatismus des Systems erreicht wird. Passende Flüssigkeit stellt er durch Auf-

sen von stearinsauren oder ölsauren Salzen in ätherischen und ten Oelen her, und zwar nehmen diese Lösungen eine gallerttige Form an. Die Symmetrie des Objectivs soll die günstigen Bedingungen für Helligkeit, Tiefe der Schärfe und Ebenit des Gesichtsfeldes darbieten. Wn.

. Meisel. Ueber die Bestrahlung einer Kugel durch eine Kugel. Schlömilch Z. XXVII. 65-86

Es handelt sich um die Bestimmung der Lichtintensität in nem Elemente einer Kugelfläche, die von einer andern Kugelfche beleuchtet wird. Es wird dabei angenommen, dass alle lemente der leuchtenden Kugel gleiche Lichtmengen ausstrahlen, nabhängig vom Emanationswinkel, dass also die Intensität, die n leuchtendes Flächenelement in einem bestrahlten Elemente hervorbringt, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entrnung der beiden Elemente und direct proportional dem Cosinus es Winkels zwischen dem Strahl und der Normale in P ist. iegt P so, dass von ihm aus die ganze zugewandte Seite der uchtenden Kugel übersehen werden kann, so ergiebt sich leicht e Intensität in P. Dagegen führt die Bestimmung auf ellipsche Integrale, wenn die in P an die beleuchtete Kugel gelegte angentialebene die leuchtende Kugel schneidet. Da die Bechnung dieser Integrale für die Anwendung zu mühsam sein ürde, so hat der Verfasser folgendes Näherungsverfahren betzt. Man denke sich von P an die leuchtende Kugel den Behrungskegel gelegt, diesen durch eine Ebene senkrecht zu iner Axe geschnitten, dann in jedem Punkte innerhalb des hnittkreises ein Lot auf der Ebene des Kreises errichtet, dessen inge gleich der Intensität ist, welche das entsprechende Element der leuchtenden Kugel in P hervorbringt. Die Endpunkte ler Lote begrenzen einen Rotationskörper, dessen Volumen die inze in P stattfindende Intensität giebt, falls von P die Kugel s ein voller Kreis erscheint. Ist das Letztere nicht der Fall, ist nicht das gesammte Volumen des Rotationskörpers zu bechnen, sondern nur ein Teil desselben. Die Näherung besteht

nun darin, die wirkliche Meridiancurve des genannten Rotationskörpers durch eine zweckmässig gewählte Ellipse zu ersetzen, und dann den in Frage kommenden Teil des Volumens zu berechnen.

Weiter wird die Intensitätsvariation im Halbschatten der beleuchteten Kugel untersucht. Der Verfasser denkt sich eine Ebene senkrecht zur Centrale beider Kugeln gelegt und berechnet die Intensität in einem Flächenelemente dieser Ebene, das im Halbschatten liegt, näherungsweise in derselben Art, wie oben; nur wird hier die Meridiancurve des in Frage kommenden Rotationskörpers durch eine Parabel ersetzt, statt durch eine Ellipse. Ein Zahlenbeispiel schliesst die Arbeit, deren Ergebnisse im Einzelnen mitzuteilen zu weit führen würde. Wn.

Capitel 3.

Elektricität und Magnetismus.

A. Maxwell. Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von B. Weinstein. Berlin. J. Springer. 1883.

Während die zweite Auflage des berühmten Lehrbuchs erschien, ist der Verfasser gestorben, so dass derselbe nur die neun ersten Capitel durchsehen konnte. Die englische, zweite Auflage wurde von Dr. Niven besorgt. Bei der hohen Bedeutung des Werkes für die Entwickelung der Elektricitätslehre, vielleicht für unsere gesammte Naturerkenntnis, ist eine Uebertragung desselben in die deutsche Sprache mit Dank zu begrüssen. Die Uebersetzung ist von sachkundiger Hand gemacht; besonders sind alle Rechnungen nochmals durchgesehen worden. Auf die neueste Literatur hat der Uebersetzer noch besonders in Anmerkungen hingewiesen. Den Inhalt des Werkes: die consequente, mathematische Bearbeitung der Faraday'schen Ideen über die Elektricität dürfen wir wohl als bekannt voraussetzen. Ok.

. WIEDEMANN. Die Lehre von der Elektricität. Braunschweig. 1882. Band I.

Bei Herstellung der dritten Auflage des bekannten Hand-:chs des Galvanismus und Elektromagnetismus ist dasselbe zu nem Werke umgearbeitet worden, welches jetzt die ganze Elek-cititätslehre umfasst. Der vorliegende erste Band enthält ausser ner historischen Einleitung die Grundbegriffe der Elektrostatik, e Elektricitätserregung durch Contact und die Gesetze der nstanten Ströme. Ueber das Verhältnis des Werkes zur mathe-atischen Theorie sagt der Verfasser in dem Vorwort: „Auf die athematische Behandlung des Gegenstandes bin ich so weit ein-gangen, als ihr Schwerpunkt in der Physik liegt, so weit sie so zur Feststellung der allgemeinen Principien und zur Discussion er Methoden und Begründung ihrer Resultate dient."

Ok.

:. CLAUSIUS. Ueber die verschiedenen Maasssysteme zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen. Verh. d. naturh. Ver. f. Rheinl. und Westf. XXXIX., Wiedemann Ann. (2) XVI. 529-551.

.. HELMHOLTZ. Ueber absolute Maasssysteme für elektrische und magnetische Grössen. Wiedemann Ann. (2) XVII. 42-55.

. CLAUSIUS. Ueber den Zusammenhang zwischen den Einheiten der Elektricität und des Magnetismus. Wiedemann Ann. (2) XVII. 713-719.

Bekanntlich bedient man sich bei der Zurückführung elek-ischer und magnetischer Grössen auf absolutes Mass entweder des lektrostatischen oder des elektromagnetischen Masssystems. In em ersten bildet die Elektricitätsmenge den Ausgangspunkt, relche gemessen wird durch die Kraftwirkung, welche sie auf ine andere Elektricitätsmenge ausübt. In ganz ähnlicher Weise eht das andere Masssystem von der Menge des Magnetismus aus. Während die Ableitung aller Grössen nach dem zweiten Mass-

system ohne Bedenken stattfindet, kann es zweifelhaft erscheinen, in welcher Weise der „Magnetismus“ im ersten System auf absolute Einheiten zurückgeführt wird. Maxwell hat in seinem „Treatise on Electricity“ hierzu die Kraft benutzt, welche ein Stromdraht auf einen Magnetpol ausübt, und gelangt dabei zu der symbolischen Formel für eine magnetische Menge:

$$[m_s] = [M^{\frac{1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}].$$

In derselben bedeutet M die Masse, L die Länge. Clausius hält diese Art der Ableitung für nicht zutreffend. Nach seiner Auffassung soll bei beiden Masssystemen die bekannte Beziehung herangezogen werden, nach welcher das magnetische Moment gleich ist dem Product aus einer Fläche und dem dieselbe umfliessenden Strom. Hieraus folgt die Gleichung:

$$[m_s] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} T^{-2}].$$

Die Abhandlung enthält dann weiter eine Discussion der Zurückführung der beiden Maasssysteme auf einander, sowie Vorschläge, die Grössen nach dem in der Pariser Conferenz eingeführten, praktischen Maasssystem in besonders einfacher Weise auszudrücken. Dies würde geschehen, wenn man als Gewichtseinheit $1\,\mathrm{gr} \cdot 10^{-11}$ oder ein Undecimogramm, als Längeneinheit $1^{\mathrm{m}} \cdot 10^{7}$ oder ein Hebdomometer einführt. Den Vorwurf, welchen Clausius gegen Maxwell, wie oben besprochen, erhoben, eine unrichtige Formel in seinem Maasssystem benutzt zu haben, weisen verschiedene englische Physiker zurück, und auch Helmholtz sucht in der oben angegebenen Abhandlung darzutun, dass beide Auffassungen als gleichberechtigt anzusehen sind. In seiner letzten Erwiderung wiederholt Clausius im wesentlichen seine früheren Einwände, und weist darauf hin, dass nach Helmholtz noch eine dritte abweichende Formulirung für die Menge des Magnetismus möglich ist. Eine grosse Bedeutung glauben wir der Discussion dieses Gegenstandes nicht zuschreiben zu sollen, da man wohl selten mit Quantitäten vom Magnetismus im elektrostatischen System rechnen, sondern der Natur der Sache nach in diesem Fall das elektromagnetische System zu Grunde legen wird. Ok.

P. Volkmann. Zum absoluten Masssystem. Wiedemann Ann. (2) XVI. 481-489.

Der Verfasser schlägt zur besseren Veranschaulichung der elektrischen Grössen eine veränderte Fassung der Definition der Einheit der Elektricitätsmenge vor. Er definirt dieselbe derart, dass sie mit einer ponderablen Masse gleiche Dimension hat.

Daraus folgen andere Dimensionen für die übrigen Fundamentalgrössen, als man denselben gewöhnlich giebt.

Ok.

A. Ledieu. Objections d'ordre mécanique à la théorie actuelle de l'électricité. C. R. XCV. 619-623.

A. Ledieu. Conception rationnelle de la nature et de la propagation de l'électricité. C. R. XCV. 669-673, 753-757.

C. Decharme. Conclusions des expériences hydrodynamiques d'imitation des phénomènes d'électricité et de magnétisme. Réponse à une Note de M. Ledieu. C. R. XCV. 913-914.

A. Ledieu. Réponse aux objections de M. Decharme sur ma conception rationnelle de la nature de l'électricité. C. R. XCV. 1026-1030.

C. Decharme. Réponse à M. Ledieu, au sujet des analogies entre les phénomènes hydrodynamiques et électriques. C. R. XCV. 1273-1275.

Ledieu hebt die Schwierigkeiten hervor, welche in der Auffassung eines elektrischen Stromes als Flüssigkeitsstrom oder als Doppelstrom vom Standpunkt der Mechanik aus liegen. Dieselben sind indess nicht neu und auch von anderen Seiten schon präciser ausgesprochen worden. Nachdem in der zweiten Mitteilung die verschiedenen in der Elektricitätslehre vorkommenden Grössen, besonders in ihren Beziehungen zu den absoluten Maasssystemen besprochen worden sind, setzt der Verfasser in der dritten Mitteilung seine eigene Theorie auseinander. Die-

selbe beruht auf der Annahme, dass alle Veränderungen auf der Wechselwirkung der Atome und des Aethers beruhen. Nimmt man an, dass zwischen den ponderablen Atomen und den Aetherteilen unter sich und gegen einander nur conservative Kräfte wirken, so kann der Satz der Erhaltung der Energie für jedes körperliche System benutzt werden. Die potentielle Energie kann dann als Summe von drei Gliedern aufgefasst werden: Energie der Atome, Energie des Aethers, Energie der Wechselwirkung. Der Veränderung der letzteren Grösse schreibt Ledieu Veränderungen des elektrischen Zustandes zu. Den elektrischen Strom betrachtet er als eine Leitung von potentieller Energie. Ueber diese nur sehr skizzenhaft angedeutete Theorie hat sich eine Discussion zwischen Ledieu und Decharme entsponnen, indem Letzterer auf Grund seiner Versuche an der Analogie des elektrischen Stroms mit einer Flüssigkeitsbewegung festhält.

Ok.

C. Decharme. Expériences hydrodynamiques. C. R. XCIV. 440-442, 527-529, 643-646, 722-727, 1067; XCV. 340-342, 387-388, 913-914, 1273-1275.

Angeregt durch die interessanten Versuche von Bjerknes, welcher magnetische, elektrische und elektromagnetische Fernewirkungen durch die Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit nachgeahmt hat, hat der Verfasser es versucht, in anderen, hydrodynamischen Erscheinungen Analogien mit der Elektricität zu entdecken. So wird z. B. die Anziehung, welche eine Platte durch einen dieselbe vertical treffenden Strahl erfährt in Parallele mit einer elektromagnetischen Anziehung gesetzt. Dass ferner zwei unter einem spitzen Winkel sich treffende Wasserstrahlen sich zu einem Strahl vereinigen, soll eine Analogie der Anziehung zweier paralleler Ströme sein. Wird ein Wasserstrahl vertical gegen eine Platte gerichtet, welche mit einem feinen Pulver und einer dünnen Wasserschicht bedeckt ist, so häuft sich das Pulver in concentrischen Ringen um das Centrum des Strahls an. Diese Erscheinung vergleicht der Verfasser mit den Nobili-

chen Farbenringen. Wie man aus den angeführten Beispielen ur Genüge erkennt, sind die Aehnlichkeiten zwischen den beiden Erscheinungsgruppen rein äusserliche und jedenfalls in keiner Weise geeignet, irgend eine Aufklärung über elektrische und magnetische Phänomene zu geben. Ok.

I. A. Lorentz. De grondformules der electrodynamica. Versl. en Meded. XVII. 144-161; Arch. Néerl. XVII. 83-100

Einige Betrachtungen über die Grundformeln der Elektrodynamik, welche durch die Abhandlungen Korteweg's über denselben Gegenstand angeregt sind (s. F. d. M. XII. 1880. 783). Es wird hier ein einfacherer Weg eingeschlagen, um zu den dort erlangten Resultaten zu kommen, und es werden nicht mehr unbekannte Functionen eingeführt, als zum Endergebnis bestehen bleiben. Zuerst wird dargetan, auf welche Weise aus den Beobachtungen die Wirkung eines geschlossenen Stromkreises auf ein unvollständiges Stromelement abgeleitet werden kann, ohne von einer Formel für die Wirkung zweier Stromelemente auf einander Gebrauch zu machen. Hieraus werden sodann die allgemeinen Ausdrücke für die Wirkungen zweier Stromelemente auf einander aufgestellt, welche dem Grassmann'schen Gesetze genügen. Auch die secundäre Wirkung wird bestimmt und dabei von der Hypothese der Spiegelbilder Gebrauch gemacht, wodurch sich Ausdrücke für die allgemeinste Wirkung, die zwischen zwei Stromelementen angenommen werden kann, ergeben, welche drei unbekannte Funktionen enthalten. Diese werden auf nur eine zurückgeführt, wenn man die Bedingung einführt, dass Wirkung und Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt sind. Schliesslich wird die Uebereinstimmung dieser Resultate mit denen Korteweg's nachgewiesen. G.

M. Lévy. Sur le mouvement d'un système de deux particules de matière pondérable électrisées et sur l'intégration d'une classe d'équations à dérivées partielles. C. R. XCV. 956-988.

Der Verfasser nimmt an, dass zwei Massenteile, welche elektrisirt sind, sich bewegen und dabei in Wechselwirkung stehen. Letztere kann nach dem Weber'schen, Riemann'schen oder Clausius'schen Gesetz erfolgen. Es wird dann der Satz der lebendigen Kraft aufgestellt und daran einige Betrachtungen über die Möglichkeit einer weiteren Integration des Problems geknüpft. Ok.

H. Résal. Théorie de l'électrostatiqne. Liouville J. (3) VIII. 217-251.

Der Verfasser beginnt mit den Worten: „Die folgende Abhandlung macht keinen Anspruch auf Neuheit der Erfindung. Ich beabsichtige nur die Untersuchungen Poissons und seiner gelehrten Nachfolger Gauss, Green, etc. darzustellen". Wir haben also einen kurzen, übrigens klar und verständlich geschriebenen Abriss der Theorie des Potentials und seiner Anwendung auf die Elektrostatik vor uns. Ok.

R. Clausius. Sur une formule générale relative à l'électrisation par influence. Liouville J. (3) VIII. 73-79.

Vergl. F. d. M. IX. 1877. p. 740-741. Ok.

Croullebois. Sur quelques conséquences du principe de Gauss en électrostatique. C. R. XCIV. 74-76.

Als Princip von Gauss bezeichnet der Verfasser den Satz:

$$\Sigma(eV') = \Sigma(e'V).$$

In dieser Formel bedeuten die e Ladungen von Conductoren, die e' beliebige, andere Ladungen derselben, die V und V' die Potentialconstanten bei den entsprechenden Systemen von Ladungen. Mit Hilfe dieser Gleichung beweist der Verfasser den folgenden Satz von Maxwell: „Wenn ein System von Leitern seinen gegenseitigen Einwirkungen überlassen wird, so strebt die Energie des Systems einem Maximum zu." Ok.

F. MACHAI. Sur quelques théorèmes d'électricité, démontrés d'une manière inexacte dans les ouvrages didactiques. C. R. XCV. 210-213.

Die betreffenden Lehrsätze befinden sich in den Handbüchern von Maxwell und von Mascart und Joubert. Der erste Satz bezieht sich auf einen Punkt in einem elektrischen Kraftfeld, für welches die partielle Differentialgleichung:

$$\triangle V = 0$$

gilt. Legt man durch den Punkt eine Tangentialebene und wählt das Coordinatensystem so, dass die Normale derselben der z-Axe parallel ist, so gelten die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{F}{R_x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{F}{R_y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -F\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right) = -F\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

während Mascart die drei zweiten Differentialquotienten einzeln gleich Null setzt. Hier ist F die wirksame Kraft, R_x und R_y sind die Krümmungsradien der Normalschnitte der Niveaufläche. Bei einem zweiten Satz wird nur eine Verbesserung des Beweises, bei einem dritten (dem Earnschaw'schen Satz) ein correcterer Ausdruck gegeben. Ok.

E. BELTRAMI. Sulla teoria dei sistemi di conduttori elettrizati. Rend. Ist. Lomb. (2) XIV. 400-407.

Bezeichnet man mit L die Potentialwerte einer Reihe von Conductoren, welche mit den Elektricitätsmengen M geladen sind, so ist das Potential des ganzen Systems auf sich selbst:

$$P = \frac{1}{2}\Sigma LM.$$

Verändert man die Ladungen und die Potentialwerte, so ist hierzu eine äussere Arbeit nötig, deren Ausdruck:

$$dQ = \frac{1}{2}\Sigma(LdM - MdL).$$

Sind L und M rechtwinklige Coordinaten, so wird der Zustand eines geladenen Conductors durch einen Punkt der Ebene vollständig bestimmt. Die bei einer kleinen Aenderung jener beiden Grössen zu leistende Arbeit ist dann geometrisch dargestellt durch ein kleines Dreieck, dessen Ecken der Anfangspunkt und die beiden Punkte L, M und $L+dL$, $M+dM$ sind.

Nach einer Reihe von Zustandsänderungen dieser Art kann die Summe aller äusseren Arbeiten von Null verschieden sein. Der Verfasser erläutert diesen Satz durch das Beispiel einer Kugel, mit welcher er einen Carnot'schen Kreisprocess ausführt, wobei an Stelle der Veränderungen von Druck und Volumen hier Potential und Ladung treten. Eine Veränderung des Potentials bei gleichbleibender Ladung denkt sich der Verfasser durch Veränderung des Kugelradius bewirkt.

Aus den beiden obenstehenden Gleichungen folgt ferner, wenn man sich auf einen Leiter beschränkt:

$$\frac{dQ}{P} = \frac{dM}{M} - \frac{dL}{L} = d\log\frac{M}{L}.$$

Also für einen Kreisprocess:

$$\int \frac{dQ}{P} = 0.$$

Der Ausdruck $\log\frac{M}{L}$ entspricht der Emtropie in der Wärmelehre und ist nichts anderes als der Logarithmus der Capacität des Conductors. Ok.

A. G. Greenhill. On functional images in Cartesians. Quart. J. XVIII. 231-245, 346-363.

Die Arbeit schliesst sich an eine Abhandlung von Hicks an (F. d. M. XIII. 1881. 784). Es werden verschiedene Probleme der Strömung in einer Ebene behandelt, bei welchen das Strömungsgebiet durch zwei Curven eingeschlossen ist. Die hierbei in Betracht kommenden Functionen (Geschwindigkeitspotential und Strömungsfunction) lassen sich durch elliptische Functionen complexer Variabeln ausdrücken. Ok.

W. D. NIVEN. On a method of approximating to the solution of electrostatic problems. Quart. J. XVIII. 266-270.

Wird in die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0$$

anstatt v die Coordinate z als abhängige Variable eingeführt, so erhält man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left\{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$-2\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial v}\right)=0.$$

Diese Gleichung vereinfacht sich erheblich, wenn die Differentialquotienten von z nach x und y so klein sind, dass ihre Quadrate und Producte vernachlässigt werden können. Der Verfasser macht hiervon eine Anwendung auf die Verteilung der Elektricität auf einem Condensator, bei welchem die belegten Flächen nur wenig von zwei parallelen Ebenen abweichen. In ähnlicher Weise kann man in die auf Polarcoordinaten bezogene Gleichung an Stelle des Radius vector v einführen. Diese Transformation wird benutzt, um die Elektricitätsverteilung auf einem nahezu kugelförmigen Conductor zu berechnen. Ok.

R. COLLEY. Ueber die Existenz einer diëlektrischen Polarisation in Electrolyten. Wiedemann Ann. (2) XV. 94-112.

Wenn ein galvanischer Stromkreis eine Flüssigkeitszelle enthält, so findet an den Elektroden eine Potentialdifferenz statt, entsprechend der elektromotorischen Kraft der Polarisation. Man muss hierbei das Vorhandensein von je zwei sehr nahen, elektrischen Doppelschichten an den Elektrodenflächen annehmen. Bestehen letztere aus grossen, einander parallelen Platten, sieht man ferner die Flüssigkeit als diëlektrisch an, so bilden die beiden Elektroden ausserdem noch einen Condensator gewöhnlicher Art. Der Verfasser untersucht nun theoretisch und experimentell den Verlauf eines Ladungs- und eines Entladungs-

stromes, indem er die beiden oben angegebenen Ums
gleichzeitig berücksichtigt.

Die diëlektrische Polarisation lässt sich deutlich bei
Reihe von schlecht leitenden Flüssigkeiten nachweisen.

Ol

J. Klemenčič. Ueber die Capacität eines Plattencon
sators. Wien. Sitzungsber. LXXXVI (2. Abth.). 1190-1200

Die Capacität eines aus zwei kreisförmigen Platten bes
den Condensators ist annähernd:

$$c = \frac{F}{4\pi\delta},$$

wenn die Entfernung der Platten δ sehr klein ist im Ver
zu dem Radius der Platten. Die Ableitung einer genaueren F
durch G. Kirchhoff wurde F. d. M. IX. 1877. 741-744 bespr
Verfasser prüft dieselbe durch Versuche, indem er die Ca
ten bestimmt, wenn zwei Platten in verschiedene Entfern
gebracht werden. Zu dem Zweck wurden die Condens
durch 15 Daniell 63 Mal in einer Secunde geladen und en
und die Ladungsströme an einem Galvanometer gemessen
Versuche ergaben, dass die Formel sehr genau die Ca
wiedergiebt. Die Capacität einer einzelnen isolirten Metalls
ist $\frac{2R}{\pi}$. Auch diese Beziehung wurde in gleicher Wei
prüft. Die Uebereinstimmung war hier eine weniger gute,
diesem Fall der Einfluss des Zuleitungsdrahts ein bedeutend

Ol

E. Budde. Bemerkungen über die mechanischen G
lagen der Gesetze von Ohm und Joule. Wiedema
(2) XV. 558-576.

Unsere in ihren Grundzügen von G. Kirchhoff entwi
Theorie der constanten, galvanischen Ströme enthält trotz
unbestrittenen Uebereinstimmung mit der Erfahrung eine

von Fragen, welche noch als offen zu betrachten sind. Eine besondere Schwierigkeit bereitet zunächst die Tatsache, dass der Strom stationär ist, obgleich fortdauernd eine beschleunigende Kraft auf denselben wirkt. Man ist dabei gezwungen, einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand einzuführen. Ferner bleibt unentschieden, ob die Elektricität als compressibles oder incompressibles Fluidum anzusehen ist. Endlich ist fraglich, ob die an der Oberfläche der Leiter befindliche freie Elektricität an der Strömung teilnimmt. Obgleich der Verfasser keine endgültige Entscheidung dieser Fragen zu geben vermag, so ist es doch von Interesse, dass derselbe auf diese Lücken der bisherigen Theorie hingewiesen hat. Ok.

R. Colley. Ueber die in einem geschlossenen Stromkreise geleistete Arbeit äusserer Kräfte. Wiedemann Ann. (2) XVI. 39-56.

Der Verfasser weist nach, dass die durch einen galvanischen Strom geleistete mechanische oder chemische Arbeit eine electromotorische Gegenkraft in dem Stromkreis bedingt.

Ok.

G. Lippmann. Sur la théorie des couches doubles de M. Helmholtz. Calcul de la grandeur d'un intervalle moléculaire. C. R. XCV. 686-689.

Wenn das elektrische Potential auf beiden Seiten der Berührungsfläche heterogener Substanzen verschiedene Werte hat, so muss man annehmen, dass in der Berührungsfläche eine elektrische Doppelschicht sich befindet. Die Entfernung der beiden Schichten kann als Entfernung der Molecüle der einen und der anderen Substanz angesehen werden. Der Verfasser hat zur Erklärung früherer electrocapillarer Versuche (Annales de chemie et de phys. 1875) die Gleichung aufgestellt:

$$X = -\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

In derselben bedeutet A die Capillarspannung einer Quecksilberfläche in Berührung mit Wasser, welche bis zu dem Potential x geladen ist. X ist eine Constante, und repräsentirt die Capacität der Flächeneinheit der Doppelschicht oder ist: $\frac{1}{4\pi\varepsilon}$, wo ε die Entfernung der Schichten ist. Aus seinen Versuchen berechnet der Verfasser dieselbe zu $\frac{1}{35\,000\,000}$ mm.

Ok.

A. König. Ueber die Beziehungen zwischen der galvanischen Polarisation und der Oberflächenspannung des Quecksilbers. Wiedemann Ann. (2) XVI. 1-39.

Der Verfasser bestimmt nach einer sinnreichen, von v. Helmholtz angegebenen Methode die Oberflächenspannung des Quecksilbers in Berührung mit verschiedenen leitenden Flüssigkeiten und die Veränderungen, welche dieselbe durch die galvanische Polarisation, also durch Beladung der Quecksilberfläche mit Gasen erfahren. Zur Berechnung der Oberflächenspannung werden Formeln aus der Poisson'schen Capillaritätstheorie benutzt. Als Resultat der Versuche ergiebt sich, dass die Oberflächenspannung ein Maximum für einen mittleren Polarisationszustand zeigt und nach beiden Seiten mit wachsender Beladung abnimmt. Durch einfache theoretische Betrachtungen zeigt von Helmholtz im Anschluss an diese Untersuchung, dass die Oberflächenspannung T, der Potentialsprung P und die Ladung ε durch die Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial P} = -\varepsilon$$

verbunden sind. Daraus folgt, dass für $\varepsilon = 0$ die Oberflächenspannung ein Maximum sein muss. Ok.

C. Hildebrand. Ueber die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche. Diss. Göttingen. Pr Gandersheim.

Der Verfasser bespricht den Zusammenhang zwischen dem oblem der conformen Abbildung zweier Ebenen, resp. einer bene auf eine Kugeloberfläche und der Theorie der stationären, ektrischen Strömung und giebt hierzu eine grössere Anzahl von eispielen, bei denen er die isoëlektrischen und die Strömungsrven berechnet und construirt. Ok.

---

7. VOIGT. Theorie der electrochemischen Experimente des Herrn Guébhard. Wiedemann Ann. (2) XVII. 257-272.

. MACH. Ueber Herrn A. Guébhard's Darstellung der Aequipotentialcurven. Wien. Ber. LXXXVI. 8-14, Wiedemann Ann. (2) 858-865.

[. MEYER. Ueber die von Guébhard vorgeschlagene Methode der Darstellung aequipotentialer Linien. Gött. Nachr. 1881. 666-676.

Weitere Discussion der in F. d. M. XII. 1880. 796 beschriebeen Versuche. Die drei Physiker, deren Arbeiten oben angeben sind, stimmen mit der damals auch schon von dem Refenten geäusserten Ansicht überein, dass es sich bei den Guébrd'schen Farbencurven nur um eine in einzelnen Specialfällen treffende Aenlichkeit mit den Curven gleichen Potentials haneln kann. Diese Ansicht wird von W. Voigt theoretisch beründet, welcher die Formeln neben einander stellt, welche in em Fall einer reinen Horizontalströmung in der Platte und einer trömung in der Flüssigkeit mit partiellem Uebergang in die letallplatte gelten. Die Guébhard'schen Curven sind danach omplicirtere Fälle der Nobili'schen Ringe, d. h. Curven gleicher tromintensität. Die Berechnung derselben gelingt nur unter infachen Annahmen. Für den Fall von zwei punktförmigen lektroden von entgegengesetztem Zeichen würde den Guébhard'hen Curven die Gleichung:

$$K = \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2},$$

den Potentialcurven dagegen die Gleichung:

$$C = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

entsprechen. Hierin bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 die horizontalen Entfernungen eines Punktes der Metallplatte von den Elektroden. Einen etwas anderen Standpunkt vertritt Mach. Derselbe glaubt aus Versuchen und Rechnungen schliessen zu sollen, dass der Hauptteil des Stromes durch die Flüssigkeit geht und dabei nahezu horizontale Strömung stattfindet. Die Curven gleichen Potentials und gleicher Stromstärke an der Metallfläche würden hierbei nahezu zusammenfallen. Endlich hat H. Meyer einige Curven von Guébhard direct mit den von der Theorie geforderten Potentialcurven verglichen und dabei keine befriedigende Uebereinstimmung erhalten. Ok.

L. Ditscheiner. Ueber die Guébhard'schen Ringe. Wien. Anz. LXXXVI. 676-708.

Das in dem vorigen Referat auseinandergesetzte Problem wird von dem Verfasser ebenfalls ausführlich behandelt. Derselbe geht von der Voraussetzung aus, dass zwei punktförmige Elektroden sich in einem nach der einen Seite zu unbegrenzten, nach der anderen von einer dünnen, ebenen Platte begrenzten Medium befinden. Die Platte hat eine erheblich grössere Leitungsfähigkeit, wie das Medium. Die Potentiale, von welchen die gesammten Strömungen in den beiden Leitern abhängen, lassen sich durch Summen reciproker Entfernungen ausdrücken. Die entsprechenden Punkte erhält man durch fortgesetzte Spiegelung.

Berücksichtigt man, dass das Leitungsvermögen der Flüssigkeit sehr klein ist im Vergleich zu demjenigen des Metalls, so erhält man für die Curvensysteme angenähert die folgenden Gleichungen:

a) wenn die Metallplatte dick ist:

$$\frac{1}{\varrho_1^3} - \frac{1}{\varrho_2^3} = \text{const.}$$

(übereinstimmend mit dem Resultat von W. Voigt),

b) wenn die Metallplatte sehr dünn ist,

$$\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \text{const.}$$

Der Verfasser discutirt beide Resultate unter der allgemeinen Annahme, dass es sich um ebene Curven handelt, deren Gleichung durch

$$\frac{1}{\varrho_1^n} - \frac{1}{\varrho_2^n} = \text{const.}$$

ausgedrückt ist.

Es werden auch noch andere Fälle behandelt, welche den Guébhard'schen Versuchen entsprechen, wobei der Verfasser zu dem Resultat kommt, dass dieselben im Allgemeinen vollständig durch die Theorie erklärt werden, dass ferner zwischen den Guébhard'schen Curven und den Curven gleichen Potentials zwar eine gewisse Aehnlichkeit besteht, aber von einer Identität beider keine Rede sein kann. Ok.

A. Witkowski. Ueber den Einfluss der Deformation auf die elektrische Leitungsfähigkeit. Wiedemann Ann. (2) XVI. 161-166.

Wird ein homogener Leiter durch allseitigen Druck comprimirt, so dass sein Volumen im Verhältnis $\frac{1}{1-\vartheta}$ verkleinert wird, so wächst seine Leitungsfähigkeit im Verhältnis $\frac{1}{1+\varrho\vartheta}$, wo ϱ eine für den Leiter charakteristische Constante ist. Tritt eine Verlängerung eines Leiters um $\frac{\alpha}{2}$ in einer Richtung und eine entsprechende Compression in einer dazu senkrechten Richtung ein, so nimmt die Leitungsfähigkeit im Verhältnis $\frac{1}{1-\sigma\alpha}$ in der ersten Richtung ab, und im Verhältnis $\frac{1}{1+\sigma\alpha}$ in der zweiten zu.

Der Verfasser hat nach Methoden, welche W. Thomson an-

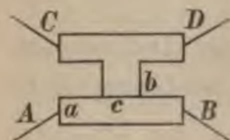
gegegeben hat, Versuche zur Bestimmung der Constanten ϱ und σ angestellt und findet für dieselben die Zahlenwerte bei Messing:

$$\sigma = 0,158,$$
$$\varrho = 0,217.$$

Ok.

E. Dieterici. Ueber Messung kleiner elektrischer Widerstände. Wiedemann Ann. (2) XVI, 234-247.

Der Widerstand eines kurzen, dicken Kupferdrahts wird mit einem Normalwiderstand nach der Methode von Kirchhoff (F. d. M. XII. 1880. 791-793) verglichen, indem von beiden Widerständen Zweigleitungen zu den beiden Rollen eines Differentialgalvanometers geführt werden und durch Einschaltung passender Widerstände in die beiden Zweige eine Ablenkung der Magnetnadel verhindert wird.



Als Vergleichswiderstand benutzte der Verfasser eine Quecksilberschicht, welche in der Form eines doppelten T (vergl. die beistehende Figur) auf einer Glasplatte ausgebreitet war und durch passende Stücke von Glasplatten begrenzt wurde. Der Hauptstrom steht mit den Punkten A und B, die Zweigleitung mit C und D in Verbindung.

Der Widerstand der Quecksilberschicht kann dann dadurch berechnet werden, dass das Feld $ABCD$ conform auf einer unendlich grossen Halbebene abgebildet wird.

Dies geschieht mit Benutzung einer Methode von Kirchhoff (F. d. M. IX. 1877. 741-744), wenn zwischen den complexen Veränderlichen t und z die Differentialgleichung

$$N\frac{dz}{dt} = \lambda^2\mu^2\frac{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}{(1-\lambda^2t^2)(1-\mu^2t^2)}$$

besteht. Dieselbe liefert bei passender Bestimmung der Constanten:

$$z = c\frac{u}{K} - \frac{a}{\pi}\log\frac{\vartheta(\beta-u)\vartheta_1(\beta-u)}{\vartheta(\beta+u)\vartheta_1(\beta+u)},$$

wo $t = \sin\mathrm{am}(u, k)$ gesetzt ist. Zur Berechnung der übrigen Grössen dienen die Gleichungen:

$$\frac{\pi\beta}{2K} = \gamma,\ q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

$$\frac{c}{a} = \mathrm{tg}\gamma - 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^m q^m \sin(2m\gamma)}{1-q^m},$$

$$\log\frac{1}{q} = \frac{b}{c}\pi + 4\gamma\frac{a}{c}.$$

Für den Widerstand des Leiterstücks mit Rücksicht auf die Zweigleitung BC erhält man schliesslich den angenäherten Ausdruck:

$$P = \frac{2}{\pi\lambda\varepsilon}\cdot\lg\frac{1}{\sqrt[4]{q}\,.\,\sin\mathrm{am}\beta}.$$

In demselben bedeutet λ die Leitungsfähigkeit, ε die Dicke der Quecksilberschicht. Die Grössen q und β hängen von den horizontalen Dimensionen der Schicht ab, indem c die Breite und b die Länge des Querstreifens, a die Breite der beiden Längsstreifen bedeutet. Ok.

E. Dorn. Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass. Wiedemann Ann. (2) XVII. 773-816.

Die von dem Verfasser benutzte Methode ist als eine Modification der Dämpfungsmethode von W. Weber anzusehen. Versetzt man den Magnet eines Galvanometers in Schwingungen und beobachtet Schwingungsdauer (T_0 und T) und logarithmisches Decrement (λ_0 und λ) bei offenen und bei geschlossenen Galvanometerrollen, so hängt der Widerstand w des Kreises mit diesen Grössen durch die Formel

$$q^2 = 2wK\left\{\frac{\lambda}{T} - \frac{\lambda_0}{T_0}\right\}$$

zusammen. Hierin bedeutet noch K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems, und q das Drehungsmoment der Rollen, auf den Magnet, wenn dieselben vom Strom 1 durchflossen werden.

Diese letzte Grösse wird bestimmt, indem ein Strom durch eine Tangentenbussole und ein Zweigstrom davon durch das Galvanometer geleitet und beide Ablenkungen beobachtet werden. Die Messung des Stromes nach absolutem Mass erfordert gleichzeitig die Kenntnis der Horizontalcomponente.

Die einzelnen Messungen erfordern besondere Vorsichtsmassregeln, auf welche einzugehen hier nicht der Ort ist. Ebenso müssen wir die Einzelheiten der vollständig mitgeteilten Beobachtungsdaten übergehen.

Als Endresultat ergiebt sich:

$$1 \,.\, S \,.\, E = 0{,}9482 \,.\, 10^{10} \;\frac{\text{mm.}}{\text{sec.}}$$

Ok.

F. Kohlrausch. Ueber die Messung der Windungsfläche einer Drahtspule auf galvanischem Wege und über den absoluten Widerstand der Quecksilbereinheit. Gött. Nachr. 1882. 654-661.

Leitet man einen galvanischen Strom durch eine Drahtrolle, so ist die Wirkung derselben aus grosser Entfernung vergleichbar mit derjenigen eines Magnets. Indem der Verfasser denselben Strom gleichzeitig durch eine Tangentenbussole mit einem Drahtkreis und die zu untersuchende Rolle gehen lässt und die ablenkende Wirkung derselben auf die Magnetnadel beobachtet, kann er hieraus die Windungsfläche der Rolle im Vergleich zu der leicht genau zu messenden Fläche des Drahtkreises bestimmen. Ok.

H. Weber. Der Rotationsinductor, seine Theorie und seine Anwendung zur Bestimmung des Ohm in absoluten Maassen. Leipzig. G. Teubner. 1882.

Eine mehrfach angewandte Methode der absoluten Widerstandsbestimmung beruht auf der Rotation einer Rolle um eine Axe, während in ihrem Mittelpunkt eine Nadel aufgehängt ist,

elche durch die in der Rolle entstehenden Inductionsströme ablenkt wird. Der Verfasser entwickelt zunächst die allgemeinen ormeln, welche bei der Ausführung eines solchen Versuches verwenden sind, indem er annimmt, dass die Rotationsaxe r Rolle einen beliebigen Winkel mit der magnetischen Axe der adel bildet. Es ergiebt sich aus dieser Rechnung, dass es am veckmässigsten ist, die Rolle um eine horizontale Axe rotiren lassen, welche fortdauernd mit der Nadelaxe zusammenfällt. ei dieser Anordnung werden in der Rolle Ströme nur durch die erticalcomponente des Erdmagnetismus und durch gegenseitige nwirkung der Windungen auf einander, nicht aber durch die adel inducirt. Die Berücksichtigung der erwähnten Selbstduction bereitet bei solchen Versuchen die Hauptschwierigkeit. e Berechnung des Inductionscoefficienten der Rolle nach Foreln von Maxwell liefert wesentlich andere Werte, als der Verch. Die getroffene Versuchsanordnung wird auf die Bestimmng eines Widerstandes nach absolutem Maass angewandt. er Verfasser hat hierzu einen Etalon der British Association wählt und findet für denselben:

$$0{,}9877 \,.\, 10^{10} \frac{\text{Millimeter.}}{\text{Secunde}}.$$

Ok.

. Dorn. Zur Multiplications- und Zurückwerfungsmethode. Wiedemann Ann. (2) XVII. 654-673.

Werden auf eine in Schwingung befindliche Magnetnadel in m Augenblick ihres Durchgangs durch die Gleichgewichtslage össe durch momentane Inductionsströme ausgeführt, so nähern h die beobachteten Ausschläge bei Fortsetzung dieses Verhrens nach einiger Zeit einem gewissen Grenzwerte. Aus mselben erhält man ein Maass für die Stärke der angewandten ductionsstösse.

Die Ausdrücke, nach denen dieselben aus den Ablenkungen rechnet werden können, werden gewöhnlich unter der Vorauszung entwickelt, dass die Inductionsstösse genau im Augen-

blick des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage erfolgen. Dies ist praktisch schwer auszuführen. Der Verfasser giebt daher allgemeinere Formeln, bei welchen eine gewisse Abweichung von dem angegebenen Augenblick vorausgesetzt wird. Er gelangt hierbei zu dem folgenden Resultat.

Ist die Schwingungsgleichung des Magnets von der Form:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\varphi}{dt} + \beta^2\varphi = 0,$$

setzt man ferner:

$$\varrho^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

so ist die Ablenkung der Nadel zur Zeit t:

$$\varphi = e^{-\alpha t}\left\{\varphi' \cos\varrho t + \frac{v' + \alpha\varphi'}{\varrho}\sin\varrho t\right\},$$

seine Geschwindigkeit

$$v = e^{-\alpha t}\left\{v' \cos\varrho t - \frac{\alpha v' + (\varrho^2 + \alpha^2)\varphi'}{\varrho}\sin\varrho t\right\}.$$

Hierin bedeutet:

$$\varphi' = \varphi_0 - \frac{1}{\varrho}\sum_1^n h\gamma_h e^{\alpha t_h}\sin\varrho t_h,$$

$$v' = v_0 + \sum_1^n h\gamma_h e^{\alpha t_h}\left\{\cos\varrho t_h + \frac{\alpha}{\varrho}\sin\varrho t_h\right\},$$

wo φ_0 und v_0 Ablenkung und Geschwindigkeit für $t = 0$ bedeuten; und angenommen wurde, dass die Geschwindigkeit v in den Zeitmomenten $t_1, t_2 \ldots t_n$ um $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ vermehrt wurde. Die Constanten φ' und v' erhalten etwas andere Werte, wenn die Induction nicht durch Momentanstösse, sondern durch Drehung eines Erdinductors erfolgte. Aus den allgemeinen Formeln werden dann weiter passende Näherungsformeln entwickelt und für specielle Fälle durchgerechnet. Es zeigt sich dabei, dass bei der Multiplicationsmethode die Ausschläge stets zu klein sind, wenn die Stösse nicht momentan und rechtzeitig erfolgen, während bei der Zurückwerfungsmethode die Ausschläge bei unrechtzeitigen Momentanstössen zu gross werden, bei Benutzung eines Erdinductors aber Abweichungen nach beiden Seiten erfolgen können. Ok.

M. Brillouin. Comparaison des coëfficients d'induction. Ann. d. l'Éc. N. (2) VI. p. 339-425, C. R. XCIV. 436-437.

Die umfangreiche Abhandlung enthält eine experimentelle Prüfung verschiedener von Maxwell (Treatise on electricity II. 355-357) angegebenen Methoden, die Inductionscoefficienten von Rollen zu prüfen. Hierbei kann es sich handeln entweder um die Inductionswirkung einer Rolle auf eine zweite, wenn durch erstere ein Strom geleitet wird, oder um die Selbstinduction einer Rolle, bei Oeffnung und Schliessung eines durch dieselbe fliessenden Stromes. Man kann daher vergleichen:

1) Die gegenseitigen Inductionscoefficienten zweier Rollenpaare,

2) die Selbstinductionscoefficienten zweier Rollen,

3) einen Coefficienten der ersten und der zweiten Art.

Eine eingehendere Besprechung der hierbei angewandten Methoden dürfte hier nicht am Orte sein. Wir wollen daher nur kurz erwähnen, dass die beiden letzten Bestimmungen durch eine Wheatstone-Brückenanordnung ausgeführt werden, bei welcher durch passende Widerstandsbestimmung der Brückendraht nicht allein bei einem constanten Strom, sondern auch bei Oeffnung und Schliessung desselben stromlos bleibt. Die Berechnung der in Frage kommenden Coefficienten geschieht nach den schon von Maxwell gegebenen Formeln. Eine nicht unwichtige Fehlerquelle hat der Verfasser ausführlicher untersucht. Dieselbe besteht in der Eigenschaft enggewundener Rollen, als Condensatoren zu wirken. Der Einfluss dieser Erscheinung auf die Bestimmung der Inductionscoefficienten wird in dem letzten Abschnitt der Abhandlung erörtert. Ok.

A. Oberbeck. Ueber die Phasenunterschiede elektrischer Schwingungen. Berl. Ber. 1882. 125-131, 1065-1074.

A. Oberbeck. Ueber elektrische Schwingungen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Phasen. Wiedemann Ann. (2) XVII. 816-841, 1040-1042.

Durch Versuche mit schnell wechselnden elektrischen Strö-

men, welche der Verfasser nach dem Vorgange von W. Weber als elektrische Schwingungen bezeichnet, wurde derselbe darauf geführt, eine bisher nicht beachtete Eigenschaft des Electrodynamometers zu Untersuchungen auf den verschiedensten Gebieten der Elektricität zu benutzen. Bei dem genannten Instrument wird bekanntich eine aufgehängte Drahtrolle durch die electrodynamische Wirkung fester Rollen gedreht. Das Drehungsmoment ist dem Product der Intensitäten der beiden Ströme proportional. Wechseln dieselben schnell ihr Vorzeichen, so erfolgt auch dann noch eine Ablenkung, welche dem Mittelwerte dieses Products proportional ist. Lassen sich die Stromintensitäten durch die Formeln

$$J = A \,.\, \cos\frac{\pi t}{T}, \quad J' = A' \cos\left(\frac{\pi t}{T} - \varepsilon\right)$$

ausdrücken, so ist.

$$\frac{1}{T}\int_0^T JJ'\,dt = \frac{AA'\cos\varepsilon}{2}.$$

Wenn daher der Phasenunterschied ε den Wert $\frac{\pi}{2}$ beträgt, so erfolgt keine Ablenkung.

Elektrische Schwingungen mit regulirbarem Phasenunterschied kann man auf verschiedene Weise experimentell herstellen. In der ersten Abhandlung (ausführlicher in Wiedem. Ann. (2) XVII.) entwickelt der Verfasser zunächst die Theorie der Verbreitung elektrischer Schwingungen in einem verzweigten Leitersystem. Es wird dabei angenommen, dass in den Zweigen Selbstinduction vorkommt und dass Condensatoren mit Verzweigungspunkten verbunden sind. Von besonderem Interesse ist dabei die Verzweigung nach dem Schema der Wheatstone'schen Brücke, speciell die Untersuchung des Phasenunterschieds zwischen dem Hauptzweig und dem Brückenzweig. Die Bedingungen für den Phasenunterschied $\frac{\pi}{2}$ zwischen den Schwingungen in den genannten beiden Zweigen führen in speciellen Fällen zu einer Reihe bemerkenswerter Formeln, welche die Bestimmung und Vergleichung von Inductionscoefficienten und Condensatorcapacitäten ge-

ɜn. Diese Formeln werden durch Versuche geprüft, auf he hier nicht näher eingegangen werden kann.

In der zweiten Abhandlung wird eine directere Methode hrieben, zwei elektrische Schwingungen mit Phasenunter-ɜden herzustellen. Ein Magnet wird in schnelle Rotation ver-, während derselbe sich im Innern zweier Drahtrollen be-t, welche gegen einander um die Rotationsaxe des Magnets eht werden können.

Eine einfache Rechnung liefert Formeln für den Verlauf der ɜn inducirten Wechselströme. Aus denselben ergiebt sich zu-st eine neue Methode, Inductionscoefficienten von Draht-n zu messen.

Durch Einschaltung einer Flüssigkeitszelle in einen der nkreise erfolgt eine schnell wechselnde Polarisation der troden. Diese erzeugt eine Phasenverschiebung in dem Strom-. Auch hier wird eine Berechnung derselben auf Grund einfachen Annahme über die Natur der galvanischen Pola-on gegeben. Die Versuche zeigen indess, dass dieselbe genau zutreffend ist, so dass weitere Untersuchungen hier-auszuführen sind. Ok.

DEPREZ. Des actions électriques dans les systèmes ›nducteurs semblables. C. R. XCIV. 431-434.

)EPREZ. Sur le transport de la force aux grandes .stances. C. R. XCIV. 434-436.

DEPREZ. Nouvelles expressions du travail et du ɜndement économique des moteurs électriques. R. XCV. 778-781.

Mit Rücksicht auf das Problem der Kraftübertragung be-elt der Verfasser in der ersten Notiz die Frage, in welcher ɜe die elektrodynamische Wirkung eines Systems von Leitern ändert, wenn die Dimensionen derselben, bei gleichbleiben-Stromintensität, sämmtlich in einem bestimmten Verhältnis ıdert werden. Die zweite Notiz enthält eine kurze Wieder-

gabe der Versuchsresultate bei einer Kraftübertragung auf grosse Entfernungen, während in der letzten Mitteilung der öconomische Coefficient bei demselben Vorgang durch die Tourenzahl der empfangenden Maschine und eine an derselben zu messende Arbeitsgrösse ausgedrückt wird. Ok.

M. Lévy. Sur la solution pratique du problème du transport de la force à de grandes distances. C. R. XCIV. 511-512.

Um das Verhältnis der nutzbaren Arbeit an der einen Station zu der aufgewandten Arbeit an der anderen Station möglichst gross zu machen, schlägt der Verfasser vor, an der einen Station mehrere Maschinen neben einander zu setzen und eine entsprechende Anordnung an der anderen Station zu treffen. Dann soll man den öconomischen Coefficienten bis nahezu zur Einheit steigern können. Von praktischem Nutzen dürfte eine solche Anordnung kaum sein. Ok.

M. Lévy. Sur la relation entre la force électromotrice d'une machine dynamo-électrique et sa vitesse de rotation. C. R. XCV. 832-864.

M. Deprez. Sur les moteurs électriques. C. R. XCV. 1056-1058.

M. Levy. Sur une communication de M. M. Deprez, relative au transport de la force. C. R. XCV. 1230-1232.

In der ersten Mitteilung führt der Verfasser den Beweis, dass die elektromotorische Kraft einer dynamo-elektrischen Maschine nicht der Winkelgeschwindigkeit proportional gesetzt werden darf, sondern dass dieselbe jedenfalls eine complicirtere Function derselben ist und etwa in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen entwickelt werden kann. Deprez bestreitet dies und behauptet, dass das Gesetz der Proportionalität wenigstens für die Praxis durchaus zureichend ist, eine Behauptung, welche Lévy in der letzten Mitteilung in Zweifel zieht. Ok.

G. Basso. Sopra un caso particolare d'equilibrio per un solenoide soggetto all' azione magnetica terrestre ed a quella d'una corrente elettrica. Torino Atti XVII. 358-368.

Ein Solenoid ist so aufgehängt, dass es sich um eine verticale Axe frei drehen kann. In der Ebene des magnetischen Meridians befindet sich ein Strom, welcher drei Seiten eines Rechtecks durchläuft. Die eine Seite desselben fällt mit der Axe des Solenoids im Ruhezustand zusammen, die zweite ist vertical über derselben; die beiden andern sind vertical. Der Strom soll nur die drei letzten Seiten durchlaufen. Der Verfasser berechnet die neue Gleichgewichtslage des Solenoids unter dem gemeinsamen Einfluss des Erdmagnetismus und des Stromes.

Ok.

F. Kohlrausch. Absolute Messungen mittels bifilarer Aufhängung, insbesondere zwei Methoden zur Bestimmung der erdmagnetischen Horizontal-Intensität ohne Zeitmessung. Wiedemann Ann. (2) XVII. 737-773.

Die im Principe so schöne Gauss'sche Methode der Messung des Erdmagnetismus nach absolutem Maass hat bei der Ausführung den Nachteil, dass die Gesammtheit aller Beobachtungen eine verhältnismässig lange Zeit in Anspruch nimmt, innerhalb deren die zu messende Grösse möglicher Weise sich verändern kann. Deshalb ist die hier beschriebene Methode (eigentlich sind es zwei Modificationen einer Methode) von Wichtigkeit, da bei derselben diejenigen Messungen, bei denen der Erdmagnetismus direct betheiligt ist, in sehr kurzer Zeit ausgeführt werden können.

Die vom Verfasser als bifilar galvanometrische bezeichnete Methode besteht in Folgendem. Eine Drahtrolle ist bifilar aufgehängt. Die Windungsebene fällt mit dem magnetischen Meridian zusammen. Durch die Windungen wird ein Strom i geleitet. In Folge der Wirkung des Erdmagnetismus wird die Rolle

um einen kleinen Winkel gedreht, welcher zu beobachten ist. Gleichzeitig wirkt die vom Strom durchflossene Rolle ablenkend auf einen Magnetstab, welcher nördlich oder südlich davon im Meridian hängt. Es gelten dann die beiden Gleichungen:

$$D.\mathrm{tg}\alpha = fiH,$$

$$a^3.\mathrm{tg}\varphi = \frac{fi}{H}.$$

In denselben ist D das bifilare Drehungsmoment, α die Ablenkung der Bifilarrolle, φ diejenige des Magnetometers, a die Entfernung der Rollen- und Magnetmittelpunkte. Aus beiden Gleichungen lässt sich die Horizontalcomponente H berechnen.

Ersetzt man die vom Strom durchflossene Rolle durch einen Magnetstab, so erhält man die andere bifilar magnetische Methode. Die Abhandlung enthält ausführlich alle bei beiden Methoden in Betracht kommenden Rechnungen, besonders die Bestimmung des bifilaren Drehungsmoments mit Berücksichtigung der Elasticität der Drähte. Zwei ausgeführte Messungen gaben gut übereinstimmende Resultate. Ok.

J. Stefan. Ueber die magnetische Schirmwirkung des Eisens. Wien. Ber. LXXX.; Wiedemann Ann. (2) XVII. 928-956.

Die Poisson'sche Theorie der magnetischen Induction führt zu dem Schluss, dass ein in einer eisernen Hohlkugel befindlicher Magnet nach aussen eine viel schwächere Wirkung ausübt, als ohne die Hülle. Da diese Schirmwirkung bei der Gramme'schen Maschine eine wichtige Rolle spielt, so hat der Verfasser dieselbe experimentell untersucht. Zu dem Zweck wurde zuerst die ablenkende Wirkung eines Magnetstabs auf eine Nadel beobachtet und dann ein Eisenring um den Stab gelegt, wodurch die Wirkung erheblich geschwächt wurde.

Ferner wurde die Schwingungsdauer eines aufgehängten Magnetstabes bestimmt und derselbe ebenfalls mit einem eisernen Hohlcylinder umgeben. Hierdurch wurde die Schwingungsdauer vergrössert. Die erhaltenen Resultate werden durch ein-

sche Rechnungen erklärt. Zunächst zeigt der Verfasser, dass die Poisson'sche Theorie und die Faraday'sche Vorstellung der Kraftlinien zu demselben Ergebnis führen. Es wird dann angenommen, dass ein unbegrenzter eiserner Hohlcylinder in ein gleichförmiges, magnetisches Kraftfeld gebracht wird. Es zeigt sich, dass die magnetische Wirkung im Innern des Cylinders erheblich verkleinert ist. Die Rechnungen, zu welchen das erwähnte Problem führt, geben gleichzeitig die Lösung eines Strömungsproblems. Denkt man sich in ein mit geradlinigen Strömen erfülltes Feld einen unendlich grossen Hohlcylinder von anderem resp. besserem Leitungsvermögen eingeführt, so werden dadurch die Stromlinien verändert. Das berechnete magnetische Potential giebt in diesem Fall das Potential der elektrischen Strömung. Zum Schluss beschreibt der Verfasser noch einige Inductionsversuche, welche ebenfalls einen Beweis der Schirmwirkung einer hohlen Eisenmasse liefern.

Ok.

J. STEFAN. Ueber die Kraftlinien eines um eine Axe symmetrischen Feldes. Wien. Anz. 1882. 116-117; Wien. Ber. LXXXV. 987-996; Wiedemann Ann. (2) XVII. 956-964.

Ist die betreffende Axe die x-Axe und setzt man

$$\varrho^2 = y^2 + z^2,$$

so nimmt bekanntlich die Laplace'sche Differentialgleichung die Form an:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho^2} = 0.$$

Das System der Kraftlinien, welche die Potentialflächen senkrecht schneiden, ist dann durch eine Function $U =$ Const. gegeben, welche den Gleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\varrho\frac{\partial V}{\partial \varrho}, \quad \frac{\partial U}{\partial \varrho} = \varrho\frac{\partial V}{\partial x}$$

genügen muss.

Der Verfasser bespricht eine Reihe naheliegender Beziehungen zwischen den beiden Functionen.

1) Gehören zu den Potentialfunctionen $V_1, V_2, V_3 \ldots$ die Stromfunctionen $U_1, U_2, U_3 \ldots$, so entspricht auch dem Potential $V = C_1 V_1 + C_2 V_2 + \cdots$ die Stromfunction $U = C_1 U_1 + C_2 U_2 + \cdots$.

2) Ist V in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickelt, so dass

$$V = \frac{A_0}{r} + \frac{A_1 P_1}{r^2} + \frac{A_2 P_2}{r^3} + \cdots,$$

wo $P_n(\cos\vartheta)$ eine Kugelfunction n^{ter} Ordnung bedeutet, so ist die zugehörige Strömungsfunction

$$U = A_0 \frac{dr}{dx} - \frac{A_1}{1} \frac{d^2 r}{dx^2} + \frac{A_2}{1.2} \frac{d^3 r}{dx^3} - \cdots.$$

3) Ist endlich das Potential durch die Reihe

$$V = Q - \frac{\varrho^2}{2^2} \frac{d^2 Q}{dx^2} + \frac{\varrho^4}{2^2 4^2} \frac{d^4 Q}{dx^4} - \cdots$$

gegeben, so ist die zugehörige Strömungsfunction

$$U = \frac{\varrho^2}{x} \frac{dQ}{dx} - \frac{\varrho^4}{2^2.4} \frac{d^3 Q}{dx^3} + \frac{\varrho^6}{2^2.4^2.6} \frac{d^5 Q}{dx^5} - \cdots.$$

Für diese allgemeinen Beziehungen giebt der Verfasser noch eine Anzahl von Beispielen. Ok.

M. Abria. Sur les unités de Gauss. Bord. Mém. (2) V. 15-27.

Der Verfasser bespricht die Gauss'sche Methode, den Erdmagnetismus nach absolutem Maass zu bestimmen, und legt besonderes Gewicht auf die genauere Feststellung der zu Grunde liegenden Einheiten. Ok.

A. Wassmuth. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. Wien. Ber. (2) LXXXVI. 539-550.

A. Wassmuth. Ueber den inneren aus der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen. Wien. Ber. (2) LXXXVII. 82-97.

Den Ausgangspunkt der Betrachtungen des Verfassers bilden einige Versuche über die Einwirkung eines allseitigen Drucks auf die Magnetisirung eines Eisenstabs, wobei derselbe zu dem Resultat gelangt ist, dass eine Vermehrung des Drucks die entgegengesetzte Wirkung wie eine Erhöhung der Temperatur hat. Der Verfasser wendet nun hierauf die beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie an. Von grösserem Interesse ist der Fall, wo von Druckänderungen abgesehen wird. Hierbei lässt sich die Temperaturerhöhung berechnen, welche der Stab durch die Magnetisirung erfährt. Endlich folgt eine Anwendung auf die Magnetisirungsänderungen durch einseitigen Zug eines Stabes. In der zweiten Abhandlung bilden ebenfalls die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie den Ausgangspunkt. Als unabhängige Variable wird die Temperatur und eine in besonderen Fällen näher zu bestimmende Grösse z gewählt. So wird bei den beiden weiter betrachteten Beispielen für z ein einseitiger Zug auf den Stab in seiner Längsrichtung und eine Torsionskraft genommen. Hierbei lassen sich einige Schlüsse ziehen, welche die Beziehungen zwischen Torsion und Magnetisirung zu erklären geeignet sind. Ok.

A. Wassmuth. Ueber elektromagnetische Tragkraft. Wien. Anz. 1882. 12-13.

Kurzer Bericht über eine Experimentaluntersuchung. Zwei Ringe waren in ihrer Mitte durchschnitten. Es werden die Kräfte bestimmt, durch welche dieselben auseinander gerissen werden können, ebenso wie die magnetischen Momente der Ringe.

Ok.

G. Jung. Sul pseudofoco del paraboloide e sul centro magnetico. Rend. Ist. Lomb. (2) XV. 407-418.

Geometrische Betrachtungen über den Pseudofocus eines Paraboloids, worunter der Verfasser einen Punkt versteht, welcher gleich weit entfernt ist von den Scheiteln der beiden Focal-

parabeln und über den Zusammenhang desselben mit einem Punkt, welchen Beltrami (Annali di Matematica X. 1882) als magnetisches Centrum bezeichnet hat. Ok.

Quet. Les forces d'induction que le Soleil développe dans les corps par sa rotation, varient, toutes choses égales d'ailleurs, en raison inverse des carrés des distances. C. R. XCV. 682-685.

Der Verfasser stellt den Satz auf: „Für einen Körper, welcher sich um die Sonne in der Ebene ihres Aequators in einem Kreise bewegen würde, ist das Verhältnis der beiden auf ihn ausgeübten Inductionskräfte, von welchen die eine durch die Umdrehungsgeschwindigkeit und die andere durch die Drehung des Gestirnes bedingt ist, gleich dem Verhältnis jener Zeit, welche die Sonne zu einer vollständigen Drehung um ihre Axe gebraucht, zu der Zeit, während welcher der Conductor seinen Umlauf vollführt. Wenn Conductoren sich gleichzeitig auf einer Geraden befinden, welche durch den Mittelpunkt der Sonne geht, sind ihre Inductionskräfte, welche von der Rotation des Gestirnes herrühren, parallel unter sich und ändern sich im umgekehrten Quadrat der Entfernung. Unter diesen Bedingungen und allein mit Rücksicht auf die Intensität ist das Gesetz dasselbe wie für das Licht, die Wärme und die Sonnenanziehung." Dieser Satz folgt aus Formeln, welche der Verfasser 1878 (s. C. R. LXXXVII. 860-862 und F. d. M. X. 747) veröffentlicht hat. Der Verfasser berechnet nach obigem Satze die Inductionswirkung für verschiedene Planeten und Cometen. Rs.

G. Ricci. Sulla funzione potenziale di conduttori di correnti galvaniche costanti. Ven. Ist. Atti (5) VIII. 1025-1048.

Durch Benutzung der Methode von Beltrami, welche dieser in seiner „Nota sulla teoria matematica dei solenoidi elettrodinamici" (Cim. (2) VII. u. VIII.) anwendete, könnte man be-

weisen, dass zu jeder Verteilung der magnetischen Materie innerhalb eines Körpers oder auf dessen Oberfläche eine äquivalente Verteilung constanter galvanischer Ströme gefunden werden kann. Der Verfasser zieht es vor, die Bedingung dafür direct herzuleiten, dass eine galvanische Verteilung und eine magnetische Verteilung für einen Raum S, welcher von den beiden Flächen $\mu = \mu_1$ und $\mu = \mu_2$ begrenzt ist, äquivalent seien. Darauf werden allgemeinere Betrachtungen angestellt, nämlich in Bezug auf zwei Räume S und S_0, deren erster von den Flächen (μ_0), (μ_1), (ν_0), (ν_1) und deren zweiter von den Flächen (μ_0), (μ_1), (ν_0) begrenzt ist. Diese Rechnungen und die weiteren speciellen Entwickelungen müssen im Original nachgelesen werden. Rs.

Capitel 4.

Wärmelehre.

A. Mechanische Wärmetheorie.

E. A. Rowland. Relazione critica sulle varie determinazioni dell' equivalente meccanico della caloria. Opera premiata dal Reale Istituto Veneto di scienze, e tradotta dall' inglese. Appendice al Tomo VII. dell Serie V. degli Atti del R. Ist. Ven. Venezia. G. Antonelli.

Die bisherigen Bestimmungen des mechanischen Wärmeäquivalentes sind systematisch geordnet und kritisirt. Der Verfasser berichtet besonders ausführlich über seine Abhandlung: „On the Mechanical Equivalent of Heat with subsidiary Researches on the variation of the Mercurial from the Air Thermometer, and on the variation of the Specific Heat of Water,“ welche in Boston Proc. (2) VII. 75-200 veröffentlicht wurde. Von den erhaltenen Werten des mechanischen Aequivalentes der Wärme

wählt der Verfasser einige aus, er legt jedem derselben ein entsprechendes Gewicht bei und findet bei Berücksichtigung dieser Gewichte als Mittelwert 427,62 bei 13°,9 C in der Breite von Baltimore. Bei dieser Berechnung war dem Rowland'schen Werte 427,7 bei 14° C ein bedeutendes Gewicht beigelegt. Wenn man diesen Wert weglässt, bekommt man als Mittel der anderen Werte, unter Berücksichtigung der diesen vorhin beigelegten Gewichte, 427,5 bei 13°,8 C. Rs.

E. H. Amagat. Sur une forme nouvelle de la relation $F(vpt) = 0$ relative aux gaz et sur la loi de dilatation de ces corps à volume constant. Ann. d. Chim et Phys. (5) XXVIII. 500-507.

E. H. Amagat. Sur la relation $\varphi(v, p, t) = 0$ relative aux gaz, et sur la loi de dilatation de ces corps sous volume constant. C. R. XLIV. 847-851.

1) Der Verfasser stellt die Werte des Dilatationscoefficienten der Kohlensäure bei normalem Drucke, wie Korteweg sie nach den Formeln von Clausius und van der Waals berechnet hat, mit dem Werte von Regnault und den Werten zusammen, welche er im Jahre 1872 erhalten hat. Die Uebereinstimmung zwischen den Werten des Verfassers und den nach der Formel von van der Waals berechneten, lässt nichts zu wünschen übrig. Trotzdem reicht diese Formel eben so wenig aus, die Gesammtheit der auf dasselbe Gas bezüglichen Resultate darzustellen, wie die von Clausius.

Nicht durch theoretische Betrachtungen, wie van der Waals und Clausius, gelangt der Verfasser zu einer Gleichung $\varphi(p,v,t)=0$, sondern durch Berücksichtigung geometrischer Eigenschaften einer gewissen Curvenschaar, welche er für Kohlensäure und Aethylen nach seinen Versuchen gezeichnet hat. Bei jeder Curve entsprechen die Abscissen den Drucken p, die Ordinaten den Producten pv für eine gewisse Temperatur. Die Curven sind für je 10° Temperaturunterschied gezeichnet. Daher schneidet jede gerade Linie, welche durch den Coordinatenanfangspunkt geht, die Curven in

Punkten, welche demselben Volumen der Gasmasse entsprechen, sie sind Linien gleichen Volumens.

Als der Verfasser die Curvenschaaren für Kohlensäure und Aethylen, welche wegen der Nachbarschaft des kritischen Punktes lehrreicher als die anderen sind, genau prüfte, fand er, dass die Linien gleichen Volumens durch die den verschiedenen Temperaturen entsprechenden Curven in wesentlich gleiche Teile zerschnitten werden. Da die Temperatur sich von einer Curve zur nächsten um 10° ändert, bedeutet jene Eigenschaft, dass die Linien gleichen Volumens durch die Curven in Abschnitte geteilt werden, welche proportional den Differenzen der bezüglichen Temperaturen sind. Dies gilt für den complicirtesten Teil der Curvenschaar ebenso, wie für den, wo die Curven im Wesentlichen parallel und gerade sind. Da keine anderen Geraden, als die durch den Anfangspunkt gehenden, diese Eigenschaft besitzen, hat der Verfasser diese als eine charakteristische Eigenschaft der Netze angesehen. Man hat daher $d\mu = C.dt$, folglich $p = C(t-t_0)$, wenn der Anfangsdruck $p_0 = 0$ gesetzt wird. C und t_0 hängen nur von der willkürlich gewählten Linie gleichen Volumens ab, sie sind Functionen des Volumens allein, und sie seien mit $f(v)$ und $F(v)$ bezeichnet. Der Verfasser konnte seine experimentellen Resultate, welche er für die Kohlensäure erhalten hatte, gut darstellen, wenn er

$$F(v) = \frac{M(v-\alpha)}{v^m + \alpha v^{m-1} + \cdots + K}$$

setzte, wo M wenigstens 2 und α das Atomvolumen bedeutet. Die Function $f(v)$ muss so beschaffen sein, dass für genügend grosse Werte von v die gesuchte Beziehung sich auf $p(v-\alpha) = AT$ reducirt, wenn T die absolute Temperatur bezeichnet. $F(v)$ verschwindet dann, und man kann setzen $f(v) = \frac{\varphi(v)}{v-\alpha}$. Folglich bekommt der Verfasser für die gesuchte Beziehung

$$p(v-\alpha) = \varphi(v)\left[T - \frac{M(v-\alpha)}{v^m + \alpha v^{m-1} + \cdots + K}\right].$$

Die Formel von van der Waals ist ein specieller Fall von dieser.

Die Gleichung $p = C(t-t_0)$ enthält das Dilatationsgesetz der

Gase bei constantem Volumen: „Wenn man eine bestimmte Gasmasse erhitzt und das von ihr eingenommene Volumen constant erhält, ist der Druck beständig der um eine constante Grösse verminderten, absoluten Temperatur proportional. Jene Grösse ändert sich mit dem willkürlich gewählten Volumen und hängt allein von diesem ab." Aus dem für $F(v)$ gewählten Ausdrucke folgt, dass für die vollkommenen Gase die constante Grösse Null und daher der Druck der absoluten Temperatur proportional ist.

Die vorstehenden Betrachtungen sind nur auf Gase anwendbar, d. h. auf eine Curvenschaar, welche sich auf Temperaturen bezieht, die oberhalb des kritischen Punktes liegen, oder auf Drucke unterhalb jener, welche die Verflüssigung erzeugen. Wenn dagegen eine Beziehung $\varphi(v, p, t) = 0$ gewonnen werden soll, die sich auf den flüssigen und gasförmigen Zustand bezieht, würde man nicht mehr $dp = f(v)dt$ haben. Die Grössen C und t_0 würden nicht nur vom Volumen, sondern auch von der Temperatur abhängen. Das Glied in der Formel von Clausius, welches t_0 entspricht, erscheint dem Verfasser als eine zu einfache Function der Temperatur, und ferner hat die Formel nur eine Constante dividirt durch $(v-\alpha)$ an Stelle von C.

Der Verfasser wird die numerischen Coefficienten seiner Formel für die verschiedenen von ihm untersuchten Gase erst geben, nachdem er sich jenen Teil der Curvenschaar, welcher den kritischen Punkt enthält, durch eine specielle und besonders sorgfältige Untersuchung verschafft hat; denn dort fallen die Curven mit einer so bedeutenden Geschwindigkeit ab, dass die bestimmten Punkte jener Curve weit von einander entfernt sind, obgleich die Beobachtungen bei ziemlich benachbarten Drucken ausgeführt waren.

Die zweite Arbeit ist ein Auszug der ersten. Rs.

G. Lippmann. Expressions générales de la température absolue et de la fonction de Carnot. C. R. XCI. 1058-1061.

Es wird daran erinnert, dass die absoluten Temperaturen T und T' durch die Gleichung

$$\frac{Q}{T} - \frac{Q'}{T'} = 0$$

definirt sind, wobei Q und Q' zwei Wärmemengen bedeuten. Der Verfasser will die absolute Temperatur als Function der thermischen Eigenschaften irgend eines Körpers ausdrücken. Ein beliebiges Thermometer zeige x, wenn es den betrachteten Körper berührt, y sei eine von x unabhängige Variable (Druck, Volumen, etc.), welche mit x den Zustand des Körpers vollständig bestimmt; dq sei die unendlich kleine absorbirte Wärmemenge während der Aenderung (dx, dy). Es wird angenommen

$$dq = Pdx + Qdy$$

und hinzugefügt, dass alle Werte von P und Q zwischen gewissen Grenzen von x und y experimentell oder in anderer Weise bestimmt sind. Für geschlossene Kreisprocesse findet man

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{T}\left(Q\frac{\partial T}{\partial x} - P\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Der gesuchte Wert T ist eine von y unabhängige Temperaturfunction und daher hat man

$$(1) \qquad \frac{\frac{\partial T}{\partial x}}{T} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}$$

und folglich durch Integration, durch welche eine Constante T_0 eingeführt wird,

$$(2) \qquad T = T_0 e^{\int_{x_0}^{x} \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} dx}.$$

Es wird bewiesen, dass der Wert von T nicht davon abhängt, wie das benutzte Thermometer graduirt ist. Um die Gleichung (2) zu prüfen, wird sie auf zwei Fälle angewendet, von welchen das Resultat bereits bekannt ist, nämlich 1) auf vollkommene Gase, und 2) auf den Fall, wo y das Volumen der Gewichtseinheit irgend eines Körpers bezeichnet. Im letzteren Falle führt die

Gleichung (2) zu der von Sir W. Thomson gegebenen Formel

$$R = \frac{T-T_0}{T} = 1 - e^{-\frac{1}{E}\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{c}}.$$

Aus Gleichung (1) kann man den allgemeinen Ausdruck der Carnot'schen Function C_x in Bezug auf den Thermometerausschlag x gewinnen; denn es ist

$$C_x = E\,\frac{\frac{dQ}{dx}}{Q} = E\,\frac{\frac{dT}{dx}}{T} = E\,\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q}.$$

Wenn man $y = v$, $x = T$ nimmt, giebt der letzte Ausdruck eine Formel, welche Sir W. Thomson kürzlich auf anderem Wege erhalten hat (W. Thomson, Reprint of math. and phys. papers Cambridge 1882. S. 188). Rs.

A. Walter. Ueber die molecular-kinetischen Gesetze der Verdampfungswärme und der specifischen Wärme der Körper in verschiedenen Aggregatformen. Wiedemann Ann. (2) XVI. 500-528.

Der Verfasser will die Continuitätstheorie der Aggregatformen, welche van der Waals gegeben hat, verbessern. Er stellt den Satz auf: „Die Verallgemeinerung des idealen Gasgesetzes oder die für Gase, Dämpfe, Flüssigkeiten gültige Beziehung zwischen Druck, Volumen und Temperatur ist gegeben durch:

$$(1) \qquad (p+f)ve^{-\frac{\beta}{v}} = \frac{2}{3}T,$$

wo

$$T = kt, \quad k = \frac{3}{2}h \quad \text{und} \quad f = \frac{\partial \Pi}{\partial v}.\text{"}$$

Hierin bedeutet Π die potentielle innere Energie des Körpers im Zustande eines Gases, eines Dampfes oder einer Flüssigkeit unter beliebigen Druckverhältnissen, T die mittlere kinetische Energie der Translation der Körpermolecüle, t die absolute Temperatur, welche für das Experiment zum Maasse der Bewegungs-

ıergie T mittels eines constanten Coefficienten k dient. Die Con-ınte des idealen Gasgesetzes, welches aus (1) durch die ınahme $f = 0$, $\beta = 0$ sich ergiebt, ist mit h bezeichnet. ist eine Temperaturfunction, deren Bedeutung näher dar-legt wird. Es wird gezeigt, wie man zu der Gleichung (1) ge-ıgen kann.

Indem für Kohlensäure die Formel

$$\left(p + \frac{0{,}00874}{v^2}\right) v e^{-\frac{\beta}{v}} = 1{,}00646 (1 + 0{,}00371 . \vartheta)$$

nommen und die Grösse β aus den älteren Versuchen von ıdrews (Phil. Trans. for 1869, 575; Poggendorff Ann. Ergbd. V.) stimmt wird, bekommt der Verfasser für β gut übereinstimmende erte. Ferner teilt er mit, dass er mit den Versuchsresultaten n Janssen, Amagat, Ansdell und F. Roth bezüglich der Körper $)_2$, NH_3, N_2O, CH_4 und C_2H_4 entsprechende Rechnungen aus-führt habe, welche „gleich günstige Resultate" ergeben haben llen. „Das Resultat derartiger Prüfungen scheint mir da-n ausgesprochen werden zu können; dass die Correction f s äusseren Druckes in der Tat bei Gasen sehr nahezu m Quadrate des specifischen Volumens umgekehrt propor-nal, ausserdem aber auch von der Temperatur abhängig zu nken ist."

An der Grundformel werden weitere Betrachtungen für den ll angestellt, dass der Stoff sich im kritischen Zustande be-det. Misst man die Veränderlichen p, t, v durch die kritischen nstanten Werte, setzt man daher

$$\frac{p}{p^*} = \pi, \quad \frac{t}{t^*} = \tau, \quad \frac{v}{v^*} = \bar{v},$$

hat man zwischen diesen Grössen die Beziehung

$$(2) \qquad \pi = \frac{2e^{\nu+\nu^*}}{1-\nu^*} \frac{\tau}{\bar{v}} - \frac{1+\nu^*}{1-\nu^*} \left(\frac{1}{\bar{v}}\right)^2,$$

)

$$\nu = \frac{\beta}{v} \text{ und } \nu^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

:.

Gesetze der Wärmecapacität gesättigter Flüssigkeiten und Dämpfe" und über „die allgemeinen thermodynamischen Grundgesetze der Gase, Dämpfe, Flüssigkeiten"; im letzten derselben wird für den Cohäsionsdruck f, welcher in (1) eingeführt wurde, der Ausdruck aufgestellt:

$$f = \frac{h}{v^2} \cdot \int_{t_0}^{t} t e^{\frac{\beta}{v}} \frac{d\beta}{dt} dt.$$

Rs.

G. Schmidt. Ueber die innere Pressung und die Energie überhitzter Dämpfe. Wien. Anz. 154-155; Wien. Ber. LXXXVI. 511-538.

Als Zustandsgleichung überhitzter Dämpfe wird angenommen

$$(1) \qquad pv = B(T-\theta),$$

indem θ eine zu bestimmende Function von p und v bezeichnet und $T = a+t = 274{,}6+t$ die absolute Temperatur ist, „weil der Ausdehnungscoefficient vollkommener Gase sowie für hoch verdünnte atmosphärische Luft nach Rankine mit 0,0036416 = 1:274,6 angenommen werden kann." Ferner sei „A = 1:423,5 das calorische Aequivalent der Arbeitseinheit, U die Energie in Calorieen gemessen", $c = c_v$, $C = c_p$ (nach Clausius'scher Bezeichnungsweise), $\varkappa$ der „Grenzwert des Quotienten der beiden Wärmecapacitäten für unendliche Ueberhitzung", ε die von Hirn (siehe Mémoire sur la thermodynamique, 2. partie, Ann. d. Chim. et Phys. (4) XI. 5-111) eingeführte „innere Pressung", „welche die Molecularanziehung des Inneren auf die Oberflächeneinheit misst und in demselben Sinne wirkt, wie der äussere specifische Druck p." Die innere Pressung kann als Analogon des Elasticitäsmoduls fester Körper betrachtet werden. Indem gesetzt wird

$$\theta - p\frac{\partial \theta}{\partial p} = \varphi,$$

wo φ im Allgemeinen eine Function von p und v bedeutet, ergiebt sich u. A.

$$\varepsilon = \frac{p\varphi}{T-\varphi}, \quad \frac{C}{\varkappa c} = \frac{p}{p-(\varkappa-1)\varepsilon},$$

$$dU = \frac{A}{\varkappa-1}\,pdv + \frac{c}{p}(T-\varphi)\,dp = cdt + \frac{Ap\varphi}{T-\varphi}\,dv$$

$$= \frac{C}{\varkappa}\,dt - \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{C\varphi}{p}\,dp \text{ oder } = \frac{T}{\varkappa}\left[dt-(\varkappa-1)\frac{\varphi}{p}\,dp\right].$$

Auf der adiabatischen Linie ist $dQ = 0$, also

$$T = D'p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Für zwei verschiedene Zustände auf der adiabatischen Linie ist

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

Der Verfasser erhält für α_p, den Ausdehnungscoefficienten bei constanter Spannung, und für α_v, den bei constantem Volumen, die Werte

$$\alpha_p = \frac{1}{a-\theta+v\dfrac{\partial\theta}{\partial v}} \quad \text{und} \quad \alpha_v = \frac{1}{a-\varphi}.$$

Die Werte von ε, dQ, dU, α_p, α_v werden für folgende Fälle berechnet: 1) für die Annahme von Zeuner $C = \text{const.}$, 2) für die Annahme des Verfassers $c = \text{const.}$, 3) für Ritter's Hypothese $\theta = \dfrac{b}{pv\sqrt{v}}$, 4) für Rankine's Zustandsgleichung $pv = TR - \dfrac{D}{Tv}$.

„Die Hypothese von Clausius $p = \dfrac{BT}{v-\alpha} - \dfrac{D}{T(v+\beta)^2}$ zeigt einen anderen Typus, als in (1) vorausgesetzt wurde, lässt sich also hier nicht behandeln, und scheint bis jetzt nur für Kohlensäure nothwendig geworden zu sein.“

Der Verfasser giebt als Resultate seiner Untersuchung u. A. an: „Die Hypothese $C = \text{const.}$ oder $p(v + Dp^{n-1}) = BT$ ist für das numerische Rechnen am bequemsten.

Die Hypothese $c = \text{const.}$ oder $v(p+\varepsilon) = BT$ hat die grösste innere Wahrscheinlichkeit, ist aber nicht bis zum Sättigungspunkte anwendbar.

Eine Entscheidung über die numerisch bestpassende Formel

wird am einfachsten durch das Studium der Coefficienten α_p und α_v herbeigeführt werden" oder durch die Untersuchung von

$$\eta = \frac{a - \frac{1}{\alpha_p}}{a - \frac{1}{\alpha_v}} = \frac{1}{\varphi}\left[\theta - (T-\theta)\left(\frac{AB}{mC} - 1\right)\right],$$

worin $m = \frac{x-1}{x}$ ist.

Rs.

J. Stefan. Ueber die Verdampfung aus einem kreisförmig oder elliptisch begrenzten Becken. Wiedemann Ann. (2) XVII. 550-560.

Abdruck von Wien. Ber. LXXXIII. 953-954. Siehe F. d. M. XIII. 1881. 805-807. Rs.

H. Helmholtz. Thermodynamik chemischer Vorgänge. Berl. Ber. 1882. 22-31, 825-836.

Da eine Fortsetzung dieser Mitteilungen im Jahre 1883 veröffentlicht ist, wird das Referat im nächsten Jahrgange gegeben werden. Rs.

A. Wassmuth. Ueber die specifische Wärme des stark magnetisirten Eisens und das mechanische Aequivalent einer Verminderung des Magnetismus durch die Wärme. Wien. Ber. LXXXV. 997-1003.

Stefan hat in seiner Abhandlung „Ueber die Gesetze der elektrodynamischen Induction" (Wien. Ber. LXIV. 193-224) auf Seite 220 den Satz gegeben: „Zur Erwärmung des magnetischen Eisens ist mehr Wärme erforderlich als zur gleich starken Erwärmung des unmagnetischen." Falls keine freien Magnetismen auftreten, während das bei 0° magnetische Eisen das Maximum m seines Momentes erhalten hat, ist für ein Milligramm Eisen die Magnetisirungsarbeit

$$A_0 = \int_0^m x\,d\mu = J(C_{0\tau} - c_{0\tau})\tau,$$

indem J das magnetische Aequivalent der Wärme, $C_{0\tau}$ die mittlere specifische Wärme zwischen 0° und τ^0 des magnetischen Eisens, $c_{0\tau}$ die analoge Grösse für das unmagnetische Eisen ist. Denkt man sich das Eisen nicht bei 0°, sondern bei t_1^0 bis zum Maximum magnetisirt, und dazu die Arbeit A_1 aufgewendet, so ist $t_1 + \tau_0 = \tau$, „falls τ_1 die Temperaturerhöhung des Eisens von der Temperatur t_1 vorstellt, die jetzt zur Vernichtung des Magnetismus nothwendig ist." Man hat daher

$$A_1 = J(C_{t_1\tau} - c_{t_1\tau})\tau_1,$$

und analog für die Temperatur t_2

$$A_2 = J(C_{t_2\tau} - c_{t_2\tau})\tau_2.$$

Für die weiteren Rechnungen wird angenommen, dass die mittleren specifischen Wärmen des magnetischen und des unmagnetischen Eisens in den Intervallen 0 bis τ, t_1 bis τ, t_2 bis τ als gleich angesehen werden können, und dass sie kurz mit C und c bezeichnet werden. Dann ist

$$\frac{A_0 - A_1}{A_0 - A_2} = \frac{t_1}{t_2}.$$

Aus Versuchen mit zwei Eisenstäben leitet der Verfasser als Mittelwert

$$C - c = 2{,}7 \cdot 10^8$$

ab. Darauf berechnet er die Temperatur τ, bei welcher das Eisen sich auch den stärkeren Kräften gegenüber als unmagnetisch erweisen würde, und findet als Mittelwert

$$\tau = 1346^0.$$

Vom Verfasser angestellte Experimente widerlegen den Einwand, welchen man gegen die gegebene Ableitung des mechanischen Aequivalentes der Abnahme des Magnetismus mit der Temperatur erheben könnte, dass neben der ursprünglichen axialen Magnetisirung in Folge der Erwärmung auch eine transversale Magnetisirung dazu käme, welche von bleibender oder von wechselnder Richtung sein könnte. Rs.

A. WASSMUTH. Ueber eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. Wien. Anz. 167-168; Wien. Ber. LXXXVI. 539-550.

Wenn ein Milligramm Eisen unter dem Einflusse der magnetisirenden Kraft x das Moment μ erhält, ist letzteres eine Function der Temperatur. Der Verfasser hat in seinen Mitteilungen „Ueber die Magnetisirbarkeit des Eisens bei höheren Temperaturen“ (Wien. Ber. LXXXII. 217-230) und „Ueber die Magnetisirbarkeit bei hohen Temperaturen“ (Wien. Ber. LXXXIII. 332-345, siehe auch F. d. M. XIII. 1881. 767) gezeigt, wie der Einfluss der Temperatur berücksichtigt werden kann. Weitere theoretische Betrachtungen haben ihn „zu dem Schlusse geführt, dass das durch die Kraft x erzielte Moment μ auch abhängig sein müsse von dem Drucke p, unter dem sich das Eisen befindet; es lässt sich sogar von vornherein erkennen, dass eine Vermehrung des Druckes die entgegengesetze Wirkung ausüben müsse, wie eine Erhöhung der Temperatur.“ „Wächst der Druck, so nimmt im Allgemeinen das Moment ab, nur für stärkere Magnetisirungen, d. i. solche, die dem Maximum nahe liegen, findet eine Zunahme des Momentes statt.“ Der Verfasser kennt keinen früher angestellten Versuch, bei welchem der Einfluss einer allseitigen Druckänderung auf die Magnetisirbarkeit untersucht wäre; er beschreibt einige von ihm ausgeführte Versuche, welche eine Bestätigung des letzten Satzes liefern. Bei den folgenden theoretischen Betrachtungen wird angenommen, dass das von der Kraft x erzeugte Moment μ sowohl von der absoluten Temperatur, als auch von dem auf die Einheit der Oberfläche ausgeübten Druck p abhängig ist. Mit Benutzung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie und bei den Annahmen, dass

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)_T = -\frac{L}{x} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial x}{\partial T}\right)_p = +\frac{K}{x}$$

gesetzt werden darf, wenn L und K positive Constanten bedeuten, gelangt der Verfasser zu dem Satze: „Durch Compression des Eisens wird nahe die gleiche Wärme erzeugt, ob sich das Eisen im magnetischen oder unmagnetischen Zustande befindet.“

Ferner wird gefunden: „Wird Eisen durch schwächere magnetische Kräfte im luftleeren Raume magnetisirt, so kühlt es sich ab. Für stärkere Magnetisirungen tritt, wie bei dem gewöhnlichen Luftdrucke, eine Erwärmung auf.“ Hierzu wird bemerkt, dass das Verhalten des Eisens bei der Magnetisirung im luftleeren Raume ganz analog ist dem des Kautschucks, wenn derselbe durch schwächere oder stärkere Kräfte gedehnt wird. Aus der Gleichung

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T}{MC}\left(C\frac{\mu}{x} - B\mu\right),$$

wo B und C gewisse Constanten bedeuten, ergiebt sich die Temperaturänderung, welche beim Magnetisiren durch die Kraft x hervorgebracht wird. Durch Rechnung erhält der Verfasser dasselbe Resultat, welches verschiedene Beobachter gewannen: „Die einseitige Vermehrung eines Zuges wirkt auf den Magnetismus des Stabes im Allgemeinen so wie eine Temperaturerhöhung.“ Am Schlusse der Abhandlung wird angegeben, die Ausführung welcher Versuche nach diesen Untersuchungen als wünschenswert erscheint. (Siehe auch S. 882). Rs.

A. Ritter. Untersuchungen über die Höhe der Atmosphäre und die Constitution gasförmiger Weltkörper. Abteilung 13 u. 14. Wiedemann Ann. (2) XVI. 166-192; XVII. 322-342.

Fortsetzung der theoretischen Betrachtungen, über welche in F. d. M. XIII. 1881. 822-824 berichtet ist. Bei der „statischen“ Theorie war die Hypothese aufgestellt, „dass die adiabatische Zustandslinie als diejenige zu betrachten ist, welche dem natürlichen Gleichgewichtszustande der frei im Raume schwebenden, ihrer eigenen Gravitationswirkung überlassenen Gaskugel entspricht.“ Durch Wärmeübertragung von den inneren heisseren zu den äusseren kälteren Schichten kann eine Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie erfolgen. „Bei Aufstellung der „dynamischen“ Theorie wird man zu berücksichtigen haben, dass die fortgesetzte Wärmeabgabe nach aussen hin ebenfalls zu den-

jenigen Ursachen gehört, welche eine dauernde Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie hervorbringen können." Der Verfasser findet, „dass die „isothermische" Zustandslinie die äusserste Grenze repräsentirt, bis zu welcher eine dauernde Abweichung von der adiabatischen Zustandslinie sich erstrecken kann." Daher untersucht er zunächst die Eigenschaften der isothermischen Zustandslinie. Die hierbei gefundenen Gleichungen und Tabellen würde man zur Lösung der folgenden, von der mechanischen Wärmetheorie ganz unabhängigen Aufgabe benutzen können: „In einem gegebenen (von fester Fläche umschlossenen) Kugelraume soll eine gegebene (gasförmige) Masse so verteilt werden, dass (τ) das Verhältnis der Druckes zur Dichtigkeit einen überall gleich grossen vorgeschriebenen Wert annimmt." Bezeichnet Ng die Gravitationsbeschleunigung im Abstande r und m eine Constante, so ist

$$\tau = mNr = \frac{p}{\gamma} = RT,$$

und der Verfasser erhält die beiden Sätze: „Eine gegebene Masse kann in einem gegebenen Kugelraume auf unendlich viele verschiedene Arten so verteilt werden, dass das Verhältnis des Druckes zur Dichtigkeit den überall gleich grossen Wert $\frac{1}{2} Nr$ annimmt."

„Die absolute Temperatur einer im Gleichgewichtszustande befindlichen isothermischen Gaskugel kann niemals kleiner als $0{,}4 \frac{Nr}{R}$ sein."

„Den zum Gleichgewichtszustande der isothermischen Gaskugel erforderlichen Oberflächendruck p_1 kann man sich, anstatt durch eine feste Oberfläche, auch durch das Gewicht einer auf die Oberfläche gelegten Schicht hervorgebracht denken, welche die isothermische Gaskugel als Rinde umhüllt." Nach entsprechender Lösung dieser Aufgabe untersucht der Verfasser die adiabatische Gaskugel mit isothermischem Kerne, den Einfluss der Temperaturausgleichung auf die Form der Zustandslinie, radiale Strömungen im Innern der Sonnenmasse, Grenzen

der Strömungsgeschwindigkeiten. Bezüglich der Constitution der Sonnenflecken wird u. A. bemerkt: Es würden „die Kerne der Sonnenflecken als diejenigen Regionen zu deuten sein, in welchen von dem totalen Energieinhalte der Sonnensubstanz ein beträchtlicher Teil zeitweise die Form von lebendiger Kraft, anstatt von Wärme, angenommen hat, und die dunklen Poren der Photosphäre als kleinere Flecken, bei welchen infolge geringen Volumens und geringen Verdichtungsgrades der sinkenden Massen die sinkende Bewegung schon in geringer Tiefe zum Stillstande gelangt.“ Die beiden folgenden Paragraphen beziehen sich auf die heliographische Verbreitung und auf das Rotationsgesetz der Sonnenflecken. Rs.

B. Gastheorie.

A. Ledieu. Considérations sur la théorie cinétique des gaz et sur l'état vibratoire de la matière. C. R. XCIV. 691-695.

Mit Rücksicht auf die Experimente Hirn's über den Luftwiderstand (siehe Faye: Sur un nouveau Mémoire de M. Hirn intitulé „Recherches experimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température.“ C. R. XCIV. 377-380) ist der Verfasser geneigt, die jetzige kinetische Gastheorie zu verwerfen. „Man wusste bereits, dass die experimentellen Gesetze über die Reibung der Gase und über ihre Leitungsfähigkeit mit dieser Theorie nicht übereinstimmen.“

Die allgemeine kinetische Hypothese ist: Die einfachen wie die zusammengesetzten Körper bestehen aus Molecülen und diese sind aus vibrirenden Atomen gebildet. Ausserdem denkt man sich die Molecüle wie feste Körper, welche eigene Bewegungen innerhalb des kosmischen Aethers besitzen. Für die flüssigen und und für die festen Körper nimmt man an, dass die Schwerpunkte der Molecüle um mittlere Lagen schwingen; dagegen möchte man für die Gase haben, dass diese Schwerpunkte sich in sehr schnellen

Translationen nach allen Richtungen hin bewegen, und zwar in den Intervallen zwischen den Stössen der Molecüle unter sich oder gegen die Wände, welche das Gas einschliessen, grösstenteils geradlinig und gleichförmig. Die jetzige Gastheorie beruht auf dieser letzten Hypothese, welche a priori durch Nichts gerechtfertigt sei. Die Bestätigung dieser „secundären, ganz willkürlichen kinetischen Hypothese“ a posteriori besteht in der Ableitung des Boyle'schen Gesetzes. Aber dieses Resultat werde nur durch mehrere falsche Anwendungen des Gesetzes der grossen Zahlen gewonnen. Kurz „die Gastheorie ist von Anfang an neu zu entwickeln, indem man von besseren Grundlagen ausgeht. Die allgemeine kinetische Hypothese bleibt von vorstehender Kritik unberührt.“ Rs.

J. W. Häussler. Beiträge zur mechanischen Wärmetheorie insbesondere die mathematische Behandlung der von der Wärme geleisteten inneren Arbeiten. Leipzig. B. G. Teubner.

Nach allgemeinen Betrachtungen über die Darstellungen der Bewegungen von Körpern, im Speciellen von Molecülen, verschafft sich der Verfasser einen Ausdruck für den „gesammten Wärmewert eines Körpers“ als die Summe aus der Energie seiner Molecüle und der geleisteten äusseren Arbeit. Um also die Veränderungen zu bestimmen, welche die in einen Körper von beliebiger Temperatur eintretende Wärme hervorbringt, drückt der Verfasser den Wärmewert des Körpers im Anfangszustande und den nach der Wärmezufuhr durch Gleichungen aus, und die Differenz dieser Gleichungen giebt ihm dann den Ausdruck für die Veränderungen. Die allgemeine Gleichung wird für eine Flüssigkeit specialisirt, und diese specielle Gleichung wird zur Bestimmung des Nullpunktes der absoluten Temperatur benutzt, wobei die Kenntnis der mittleren specifischen Wärme erforderlich ist. Nach dem Verfasser befindet sich der Nullpunkt der absoluten Temperatur etwa 162° C unter dem Gefrierpunkte des Wassers. Die weiteren Betrachtungen führen u. A. zu dem Satze: „Die specifische Wärme

der festen Substanz ist gleich derjenigen der flüssigen Substanz, vermindert um den Quotienten aus der Schmelzwärme und der wahren absoluten Schmelztemperatur." Der nächste Paragraph (§6) bezieht sich auf die „Arbeitsleistung der Verdampfungswärme." Bei der Untersuchung der „specifischen Wärme der gesättigten Dämpfe" (§ 7) erhält der Verfasser ein anderes Resultat als Clausius; er ist der Ansicht, dass die bezüglichen Versuche von Hirn und Cazin zur Entscheidung nicht ausreichend sind, und wünscht, dass ausführlichere Versuche über die specifische Wärme angestellt werden möchten. Es folgen wieder theoretische Betrachtungen über die Bewegungen der Molecüle; eine specialisirte Formel entspricht dem Dulong'schen Gesetze. Der Verfasser fügt einige Gedanken über die Cohäsion und Elasticität fester Substanzen hinzu und weist im letzten Paragraphen (§ 14) „auf einige Widersprüche hin, welche sich in der Clausius'schen Theorie finden."

Rs.

H. A. Lorentz. Over de bewegingen, die onder den invloed der zwaartekracht, ten gevolge van temperatuurverschillen in eene gasmassa optreden. Versl. en Meded. XVII. 179-205; Arch. Néerl. XVII. 193-219.

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verfassers (siehe F. d. M. XII. 1880 814), in welcher er aus den Grundsätzen der kinetischen Gastheorie die Bewegungsgleichungen gasförmiger Körper ableitete. Hier beschäftigt er sich mit den Bewegungen, welche unter dem Einfluss der Schwerkraft in Folge von Temperaturunterschieden in einer Gasmenge auftreten, und findet hierzu die Anleitung in den Untersuchungen von Oberbeck und Lorenz über die Wärmeströmungen, welche in Gasen durch Temperaturunterschiede verursacht werden. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht, dass sowohl die Temperaturunterschiede, als auch die dadurch verursachten Strömungen unendlich klein angenommen werden.

Aus den erhaltenen Resultaten, welche von sehr zusammengesetzter Natur sind, ergiebt sich, dass bei Versuchen, wie die

von Kundt und Warburg, der Einfluss der Wärmeströme durchaus nicht erklärt werden kann, wenn man den Temperaturunterschied unendlich klein annimmt. Auch bei Schallerscheinungen, welche z. B. durch eine Stimmgabel hervorgerufen werden, darf die Gleichgewichtsstörung nicht mehr als unendlich klein aufgefasst werden, sobald man Reibung und Wärmeleitung in Rechnung bringt. Kann aber eine Gleichgewichtsstörung nicht als unendlich klein betrachtet werden, so ist die Auflösung von Aufgaben über die Bewegung der Gase sehr schwierig, und es kann nur angegeben werden, wie sie von verschiedenen Umständen abhängt.

G.

E. Warburg und L. v. Babo. Ueber den Zusammenhang zwischen Viscosität und Dichtigkeit bei flüssigen Körpern. Berl. Ber. 1882. 509-514; Wiedemann Ann. (2) XVII. 390-427.

Für Kohlensäure wurden bei constanten Temperaturen zusammengehörige Werthe des Reibungscoefficienten, welcher nach der Methode der Strömung durch Capillarröhren gefunden wurde, der Dichte und des Druckes bestimmt. Die Resultate sind in Tabellen zusammengestellt und graphisch dargestellt. Bezüglich der Viscosität wurde gefunden I. für gasförmige Kohlensäure (oberhalb der kritischen Temperatur 30,° 9):

1. Dem Maximum der Compressibilität $\left(\frac{1}{s\frac{dp}{ds}}\right)$, d. i. dem Minimum der Elasticität $\left(s\frac{dp}{ds}\right)$, welches die Beobachtung ergiebt, entspricht kein Minimum der Viscosität (μ), welche vielmehr mit wachsender Dichte in stets wachsendem Verhältnis zunimmt.

2) Bei der Dichte 0,1, ungefähr der 500-fachen der normalen, übertrifft der Reibungscoefficient den normalen (0,000165 für 40,° 3) nur um etwa 9 Procent des letztern.

3) Bei den Temperaturen 32,° 6 und 40,° 3 zeigt die Substanz bei gleicher Dichte wenig verschiedene Werthe von μ, sehr ver-

schiedene von p. Danach scheint die Viscosität mit der Dichte viel einfacher, als mit dem Druck zusammenzuhängen.

4) Der Einfluss der Temperatur auf die Viscosität bei constanter Dichte ist so klein, dass er aus den ein Temperaturintervall von nur 8° umfassenden Beobachtungen nicht mit voller Sicherheit zu entnehmen ist. Da indessen die Isotherme für 40°,3 ganz oberhalb der 32°,6 entsprechenden verläuft, so scheint die Viscosität bei constanter Dichte langsam mit der Temperatur wachsen.

II. Für tropfbar flüssige Kohlensäure:

5) Die tropfbar flüssige Kohlensäure zeigte eine weitaus kleinere Viscosität, als alle bisher untersuchten Flüssigkeiten. Der Reibungscoefficient bei 15° ist beispielsweise für Wasser 14,6 mal so gross, als für tropfbare Kohlensäure, welche unter dem Druck ihres gesättigten Dampfes steht.

6) Die Viscosität der tropfbaren Kohlensäure von 25,1 wächst mit der Dichte. Durch weitere Ausdehnung dieser Untersuchung besonders auch auf andere Flüssigkeiten, beabsichtigen die Verfasser den Einfluss der Temperatur auf die Viscosität tropfbarer Flüssigkeiten bei constanter Dichte, d. i. den specifischen Einfluss der Temperatur zu ermitteln.

7) Bei Dichtigkeiten, welche 0,8 nahe liegen, verläuft die 25°,1 entsprechende Isotherme unterhalb sowohl der 33°,6 als der 15° und 20° entsprechenden. Hieraus folgt, das Kohlensäure von solcher Dichte, von 15° an erwärmt, ein zwischen 20° und 32°,6 liegendes Minimum der Viscosität zeigen muss.

Nach der Poisson'schen Theorie der Flüssigkeitsreibung ist der Reibungscoefficient $\mu = KT$. Maxwell fand für ein ideelles Gas $K = p$, daher T bei constanter Temperatur der mittleren Weglänge proportional. Die Verfasser nehmen an, dass in erster Annäherung T diese Eigenschaft auch dann noch habe, wenn das Volumen der Molecüle und die Anziehung zwischen ihnen berücksichtigt wird, und finden, dass „die Raumerfüllung der Molecüle eine Abnahme der Reibung mit zunehmer Dichte hervorbringt, also die entgegengesetzte Abweichung vom Maxwell'schen Gesetze, wie die Anziehung zwischen den Molecülen." Rs.

L. Boltzmann. Zur Theorie der Gasdiffussion. Wien. Ber. LXXXVI. 63-99.

Im Anschlusse an des Verfassers „Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht" (Wien. Ber. LXVI. s. F. d. M. IV. 1872. 566) kann eine Theorie der Diffusion in analoger Weise gegeben werden, wie eine Theorie der Gasreibung bereits mitgeteilt wurde (bezüglich der letzteren s. F. d. M. XII. 1880. 819-821 u. XIII. 1881. 819-820). Die Molecüle werden wieder als undeformirbare, vollkommen elastische Kugeln vorausgesetzt. Ferner wird angenommen, dass die Geschwindigkeit des Diffusionsstromes verschwindend klein gegen die mittlere Geschwindigkeit der Molecüle ist.

Diese Untersuchung ist noch nicht abgeschlossen, sie soll fortgesetzt werden, und daher wird eventuell im nächsten Jahrgange auf dieselbe zurückzukommen sein. Rs.

K. Waitz. Ueber die Diffusion der Gase. Wiedemann Ann. (2) XVII. 201-236, 351-352.

Der Verfasser hat die Diffusion der Gase experimentell untersucht, sich dabei einer optischen Methode, der Beobachtung der Interferenzerscheinungen an dicken Glasplatten, bedient. Er teilt die Beobachtungen mit, zeigt, wie aus diesen der Diffusionscoefficient berechnet werden kann. und gelangt zu dem Resultate: „Der Diffusionscoefficient für die freie Diffusion zweier Gase ineinander ist keine constante Grösse; er nimmt nach Beginn der Diffusion in einem bestimmten Querschnitt des Gefässes mit der Zeit ab und erreicht bald einen für jeden Querschnitt constanten Grenzwerth. Die Aenderung dieser Grenzwerthe von einem Querschnitt zum anderen erfolgt proportional dem Abstande der Querschnitte von der freien Oberfläche des Diffusionsgefässes."

Im Nachtrage wird bemerkt, dass die Angabe v. Obermayer's (in Wien. Ber. 1882), der Diffusionscoefficient nehme mit wachsender Zeit bis zu einem Grenzwerte zu, sich auf den mittleren Diffusionscoefficienten der ganzen diffundirenden Gasmasse bezieht, und es wird gezeigt, dass jene scheinbar widersprechende Angabe sich mit der des Verfassers verträgt. Rs.

---

sein könnte." Nach dem Verfasser dürfte es am zweckmässigsten sein, ein Gemisch von halb Kohlensäure und halb Luft in reine Luft und in reine Kohlensäure diffundiren zu lassen. Rs.

C. Wärmeleitung und Wärmestrahlung.

A. Dronke. Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung unter Benutzung der hinterlassenen Papiere der Herren Professoren Dr. A. Beer und Dr. J. Plücker. Leipzig. G. B. Teubner.

Die Schrift ist ein Analogon zu den beiden anderen Schriften Beer's „Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik" und „Einleitung in mathematische Theorie der Elasticität und die Capillarität." Herr Dronke hat „gesucht, die analytische Theorie der Wärmeverbreitung nach dem Beer'schen Plane wiederherzustellen und zwar wohl so, wie die Schrift zur Zeit von Beer's Tode etwa abgefasst sein würde." Rs.

H. Résal. Commentaire à la théorie analytique de la chaleur de Fourier. Résal J. (3) VIII. 79-124.

Weil Fourier's Théorie de la chaleur in Frankreich selten geworden ist, giebt Résal einen Auszug der wesentlichen Teile dieser Theorie und fügt Anmerkungen hinzu, damit einige Beweise einfacher oder strenger als im Texte gegeben werden können. Rs.

H. Lagarde. Recherches analytiques sur la méthode de M. Thoulet, relatives à la conductibilité thermique. Ann d. Chim. et Phys. (5) XXXVI. 552-568.

H. Lagarde. De l'évaluation de la conductibilité thermique par la mesure des temps pendant l'état variable. C. R. XCIV. 1048-1051.

Thoulet beschreibt in seiner Abhandlung „Recherches expérimentales sur la conductibilité thermique des minéraux et des

roches“ (Ann. Chim. et Phys. (5) XXVI. 261-285; Auszug C. R. XCIV. 1047-1748) eine Methode zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeit und teilt die Resultate mit, welche er durch Benutzung derselben bekommen hat. Die Methode besteht darin, dass man die Zeit bestimmt, welche erforderlich ist, damit die Temperatur der oberen Fläche einer Platte von einer bestimmten Temperatur θ_1 bis zu einer anderen bestimmten Temperatur θ_2 zunimmt, während die Temperatur der unteren Fläche der Platte constant erhalten wird.

1) Lagarde will aus der allgemeinen Theorie der Wärmeleitung die Formeln entwickeln, welche zur Berechnung der Experimente von Thoulet dienen können, und zeigen, welche Beobachtungen notwendig sind, um den „thermischen Widerstand“ Thoulet's und den Coefficienten der Wärmeleitungsfähigkeit zu bestimmen.

2) ist ein Auszug von 1). Rs.

E. Lecher. Ueber Ausstrahlung und Absorption.

Wien. Ber. LXXXV. 441-490; Wien. Anz. 1882. 57-59; Wiedemann Ann. (2) XVII. 477-518.

Der Verfasser geht davon aus, dass die mit Absorptions- und Ausstrahlungsvermögen bezeichneten Begriffe keine einfachen Begriffe, sondern aus vielen physikalischen Einzelwirkungen zusammengesetzt seien. Er unterscheidet deshalb scheinbares und wirkliches Absorptionsvermögen, scheinbares und wirkliches Ausstrahlungsvermögen. Um die Beziehungen zwischen diesen Begriffen zu entwickeln, denkt er zwei einander einschliessende Kugelschalen, die innere ideal schwarz, die äussere (von sehr grossem Radius) ideal reflectirend; auf die Innenfläche der letzteren ist ein absorbirender Körper von sehr geringer Dicke aufgetragen. Die von der inneren Kugel ausgestrahlte Wärme [oder Licht] wird nun an dem genannten Körper zum Teil regelmässig, zum Teil diffus reflectirt; nur ein Teil tritt in den absorbirenden Körper ein und durchläuft denselben bis zur äusseren Kugelfläche und zurück. Auf diesem Wege findet die wirkliche Absorption

statt. Der an die Oberfläche zurückgelangende Teil tritt zum Teil aus, ein zweiter Teil wird regelmässig, ein dritter diffus reflectirt. Der zweite Teil wird einer ähnlichen Betrachtung unterworfen, wie sie eben angedeutet, etc. Die diffus reflectirten Teile werden schliesslich auch absorbirt; aber für diese kommt das wirkliche Absorptionsvermögen nicht in Betracht. Schliesslich werden alle absorbirten Ausdrücke addirt, und das Verhältnis dieser Summe zur ursprünglichen auffallenden Wärmemenge giebt den gewöhnlichen, scheinbaren Absorptionscoefficienten. Analoge Betrachtungen werden für die Strahlung angestellt, wobei als wirkliches Ausstrahlungsvermögen die ideelle Summe der Wirkungen der einzelnen Strahlencentra angesehen wird. Das Kirchhoff'sche Gesetz lautet nach Einführung der neuen Begriffe:

$$-4 \log \text{nat.}(1-a) = \frac{\varphi(t)}{F(t)},$$

wenn a der wirkliche Absorptionscoefficient ist, $\varphi(t)$ das (von der Temperatur t abhängige) wirkliche Strahlungsvermögen, $F(t)$ die Strahlung eines ideal schwarzen Körpers. Es folgt ferner aus den obigen Betrachtungen, dass bei genügender Dicke der Unterschied des Ausstrahlungsvermögens verschiedener Körper nur herrührt von dem Unterschiede des Reflexionsvermögens.

Die so entwickelten Beziehungen gelten nur für eine bestimmte Wellenlänge und eine bestimmte Temperatur. Im zweiten Teile wird dann die Ausstrahlung und Absorption bei verschiedener Temperatur betrachtet. Dabei wird die Annahme gemacht, dass das wirkliche Absorptionsvermögen sich mit der Temperatur nicht ändert. Dann ergiebt sich, dass die Strahlung eines jeden Körpers schon bei der tiefsten Temperatur alle Wellenlängen besitzt, die sie bei höheren Temperaturen hat, und dass die relative spectrale Verteilung der ausgestrahlten Energie von der Temperatur des strahlenden Körpers unabhängig ist. Hierbei wirkt jedoch die Aenderung des Reflexionsvermögens mit der Temperatur störend ein.

Den Schluss der Arbeit bilden experimentelle Erläuterungen.

Wn.

ADAN. Quelques mots sur une méthode de détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) III. 69-74.

FOLIE. Un mot encore sur la détermination de la latitude. Belg. Bull. (3) III. 350-352.

Herr Folie verteidigt gegen Herrn Adan, der ein graphisches rfahren vorschlägt, eine Bessel'sche Methode. Mn. (O.).

J. VAN DEN BERG. Over de onderlinge afwijking van den grooten cirkelboog en de loxodromische kromme tusschen twee naby gelegen plaatsen op de bolvormige aarde. Nieuw Arch. IX. 15-31.

Die Arbeit handelt von der Abweichung des grössten Kreisgens von der Loxodrome zwischen zwei benachbarten Orten ? der kugelförmigen Erde. Janse (siehe F. d. M. XIII. 1881. 338) hatte diesen Unterschied durch Rechnung gefunden, hier ·d er auf einfachem geometrischem Wege abgeleitet und auf selbe Art die Formeln für beide Kurswinkel bestimmt. Zum ılusse werden einige Fehler in den Rechnungen Janse's nachwiesen und verbessert. G.

HALL. The density of the earth. Analyst IX. 129-132.

Formeln für die Abweichung von der Verticalen durch die ıziehung einer Wasserflut, mit einer numerischen Anwendung nlich dem Falle der Bai von Fundy. Der Verfasser findet, ss die Abweichung ungefähr 0°,348 sei, ein Bogen, „der schwie· genau zu bestimmen sein würde.“ Jn. (O.).

ELMERT. Der Einfluss der Lothablenkung bei einem Gebirgsrücken auf die Ergebnisse geometrischer Nivellements. Jordan Z. f. V. XI. 233-243, 249-255.

Verfasser knüpft an das von Zachariä (Astr. Nachr. 1916) wählte schematische Beispiel zur Schätzung des genannten

Einflusses an, veranlasst durch einen in der erwähnten Arbeit enthaltenen sehr wesentlichen principiellen Fehler. Es werden für einen prismatischen Gebirgsrücken von dreieckigem Querschnitt die Formeln vollständig entwickelt und der genannte Einfluss für eine Reihe von Zahlenbeispielen berechnet, um eine Schätzung seines Betrages zu ermöglichen. B.

A. VOGLER. Die Grundzüge der Ausgleichungsrechnung. Braunschweig. Vieweg und Sohn. 1883.

Siehe F. d. M. XIV. 1882. 157. B.

ZAJÍČEK. Lehrbuch der praktischen Messkunst mit einem Anhang über Entwässerung und Bewässerung des Bodens. 8°. Wien. 1882. W. Braunmüller.

B.

G. DE BERNARDINIS. Sulla livellazione geometrica. Batt. G. XX. 101-143.

Enthält eine Exposition bekannter Sätze über die theoretischen Grundlagen und die Ausgleichungsvorschriften für geometrische Nivellements, zum Teile unter wörtlicher Benutzung der Quellen.
B.

O. SCHREIBER. Die Anordnung der Winkelbeobachtungen im Göttinger Basisnetz. Jordan Z. f. V. XI. 129-161.

Von theoretischem Interesse in dieser Abhandlung ist folgende Aufgabe: In einem Dreiecksnetz, dessen Winkel noch angenähert bekannt sind, soll eine gegebene Anzahl von Messungen so auf die einzelnen Winkel verteilt werden, dass das Gewicht des plausibelsten Wertes einer bestimmten Function der Winkel ein Maximum wird. Diese Aufgabe reducirt sich, wie gezeigt wird, auf folgende andere: $L_1, L_2, \dots L_n$ sind ganze lineare Functionen von p Variabeln $x_1, \dots x_p$ $(p < n)$ mit gegebenen Coefficienten,

gesucht dasjenige System der x, für welches die Summe der absoluten Werte der L ein Minimum wird. Ferner zeigt sich, dass in den Fällen, wo die Aufgabe unendlich viele Lösuugen zulässt, unter diesen immer eine vorkommt, bei der durch die entsprechend verteilten Messungen nur gerade die notwendige Anzahl von Winkeln im Netze bestimmt wird. B.

JORDAN. Teilung eines Vierecks. Jordan Z. f. V. 421-428.

Aufstellung trigonometischer Formeln für die in der Praxis vorkommenden Fälle der genannten Aufgabe. B.

JORDAN. Bemerkung zur Rectification eines Meridianbogens. Jordan Z. f. V. 622-625.

B.

A. SCHELL. Der Einschneide-Transporteur von Victor von Reitzner. 8°. Wien. Seidel und Sohn. 1882.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus drei um dasselbe Charnier drehbaren Linealen, deren Kanten durch den Drehungsmittelpunkt des Charniers gehen. Die Brochure behandelt den Gebrauch dieser Instrumente zur graphischen Lösung der Pothenotschen Aufgabe auf dem Messtische. B.

DORNA. Relazione sopra una memoria del prof. Jadanza. Atti di Torino XVII. 647.

JADANZA. Alcuni problemi di Geodesia. Atti di Torino XVII. 742.

CH. M. SCHOLS. Studien over kaartprojectien. Nieuw Arch. VIII. 113-222.

Diese umfangreiche Abhandlung über die Kartenprojection wurde veranlasst durch eine Preisfrage nach der Projection mit

parabolischen Meridianen und Parallelen. Der Verfasser hat indess seiner Untersuchung eine grössere Bedeutung gegeben, indem er noch vier andere conforme Kartenprojectionen behandelt, nämlich die Kreisprojection von Lagrange; eine Projection, bei welcher die Meridiane und Parallelen durch homofokale Ellipsen und Hyperbeln gebildet werden, eine Kartenprojection mit einfachen Formeln für die Berechnung der Coordinaten, eine nicht symmetrische Kartenprojection mit Minimalabweichung von der mittleren Vergrösserung. Alle diese Projectionen werden auf die Karte der Niederlande angewendet.

Voran gehen einige allgemeine Betrachtungen über conforme Kartenprojectionen, die hauptsächlich den Zweck haben zu untersuchen, in wie fern es bei einem Terrain von geringem Umfang möglich ist, die Veränderung, welche die Vergrösserungen dabei erfährt, in möglichst enge Grenzen zu schliessen. Ausführliche Zahlentabellen sind der Abhandlung beigegeben, mit deren Hülfe eine Landkarte bequem in jede der genannten Projectionen übergeführt werden kann. G.

Capitel 2.

Astronomie.

J. C. Houzeau et A. Lancaster. Bibliographie générale de l'Astronomie. T. II. Bruxelles.

J. C. Houzeau. Annonce bibliographique. Belg. Bull. (3) III. 447-449.

Dieser Band enthält in dreissigtausend Artikeln Abhandlungen und Notizen aus den academischen Publicationen und wissenschaftlichen Zeitschriften. Mn. (O.).

J. C. Houzeau. Vademecum de l'Astronomie. Bruxelles. 1882.

. THIRION. Compte rendus. Qu. sc. XIV. 594-602.

Das Vademecum hat über 1100 Seiten: es ist die zweite nd durch das Repertorium der Constanten in der Astronomie iehe F. d. M. X. 1878. 773) vermehrte Auflage. Herr Thirion at einige in solchem Werke verzeihliche Fehler gefunden; im ebrigen rühmt er das Buch als sehr brauchbar.

Mn. (O.).

. SCHELLE. Lehrgang der populären Astronomie und mathematischen Geographie für Gymnasien bearbeitet. 2. Aufl. 8°. Kempten. J. Kösel. 1882.

B.

. J. STUDNIČKA. Mathematische Geographie. Prag. (Böhmisch).

Diese Schrift bildet den II. Teil einer umfangreichen allgeeinen Geographie und behandelt auf historischer Grundlage im . Abschnitt die Form der Erde, im 2. Abschnitt die Messung der rde, im 3. Abschnitt die Grösse der Erde, im 4. Abschnitt die artographische Darstellung der Erde, in einen Anhang endlich ine Erklärung des Princips der Lehmann'schen Schraffirmethode ie der Isohypsen Ducarla's. Die mathematischen Formeln sind, obald sie mit Differentialausdrücken zu tun haben oder complicirt erden, unter den Strich in Anmerkungen verwiesen worden.

Std.

. ISRAEL-HOLTZWART. Abriss der mathematischen Geographie für höhere Lehranstalten. 1882. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

B.

K. ISRAEL-HOLTZWART. Elemente der sphärischen Astronomie für Studirende bearbeitet. 1882. Wiesbaden. J. F. Bergmann.

Behandelt in sieben Abschnitten: die astronomischen Coordinaten, die Differentialformeln für sphärische Dreiecke, Strahlenbrechung, Aberration, Parallaxe, Dimensionen des Erdsphäroids, Dämmerung. Die Darstellung ist für Nichtastronomen berechnet.

B.

J. Mayenberg. Aufgaben der sphärischen Astronomie. Pr. Hof. Studienanstalt. 1882.

Bekanntes für Unterrichtszwecke dargestellt. B.

C. Israel. Ueber gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit und der Schiefe der Ekliptik. Halle a. S. H. W. Schmidt.

C. Israel. Astronomische Anwendung eines Satzes der Transversalenlehre. Halle a. S. H. W. Schmidt.

C. Israel. Gleichzeitige Bestimmung der Sternzeit, Ekliptik, Schiefe und geographischen Breite. Die Horizontalparallaxe des Mondes aus Beobachtungen ausserhalb des Meridians. Halle a. S. H. W. Schmidt.

B.

E. Collignon. Note sur la résolution, au moyen de tableaux graphiques de certains problèmes de cosmographie. Nouv. Ann. (3) I. 490-508.

In einem früheren Aufsatze hatte der Verfasser die Construction einer graphischen Tafel entwickelt, welche Auf- und Untergänge der Sonne direct für jeden Beobachtungsort und jede Sonnendeclination zu entnehmen gestattet. Es wird gezeigt, dass man dieselbe Tafel auch zur Bestimmung des Durchganges durch den Ost- West-Vertical benutzen kann. Ferner wird gezeigt, wie sich derselbe Grundgedanke verwenden lässt, um die Dämmerung mit zu berücksichtigen. Daran schliesst sich eine Behandlung des Problemes der kürzesten Dämmerung. B.

L. Janse Bz. Oplossing eener prijsvraag. Nieuw Arch. IX. 141-179.

Die Preisfrage, welche hier beantwortet wird, ist die folgende: „Welcher Teil der kugelförmigen Sonnenoberfläche wird bei einer Sonnenfinsterniss durch den Mond für das Auge bedeckt?" Auf analytischem Wege wird die Rechnung durchgeführt, und es werden die Resultate in Zahlentabellen gebracht. Fortsetzung in folgendem Jahrgange. G.

Ch. Rouget. Observations astronomiques sans mesure d'angles. C. R. XCV. 95, 120-123.

Weitere Entwickelungen zu einer bereits früher von dem Verfasser auseinander gesetzten Methode, welche darauf hinauskommt, den Moment zu beobachten, wo sich zwei Gestirne auf demselben Höhen- oder Verticalkreise befinden. (Cfr. F.d.M. XIII. 1881. 855). B.

N. Herz. Zur Berechnung der scheinbaren Sternörter. Astr. Nachr. 2416.

Differentialformeln für die bei der genannten Aufgabe vorkommenden Sternkonstanten. B.

Th. von Oppolzer. Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Cometen und Planeten. I. Bd. Zweite und völlig umgearbeitete Auflage. 8°. Leipzig. 1882. W. Engelmann.

Der vorliegende Band, doppelt so stark wie sein Vorgänger, behandelt die Bahnbestimmung ohne Berücksichtigung der Störungen und ist als das vollständigste und ausführlichste Compendium über diesen Gegenstand anzusehen. Da der Stoff, der in ein Werk über einen so viel bearbeiteten Gegenstand hineingehört, seit langem feststeht, so wird es genügen zu bemerken, dass der Verfasser in Bezug auf die Schärfe der Entwickelungen soweit als irgend zulässig gegangen ist und an einigen Stellen durchaus

Eigenes gebracht hat, dass er ferner durch Beifügung zahlreicher Tafeln die Anwendung der von ihm bevorzugten Methoden möglichst bequem zu machen gesucht hat. B.

K. Israel-Holtzwart. Elementare Darstellung der Gauss'schen Methode zur Bestimmung elliptischer Bahnelemente aus geocentrischen Beobachtungen. Halle a. S. H. W. Schmidt.

B.

De Gasparis. Nuove serie, per esprimere le coordinate eliocentriche in funzione dell' anomalia media. Rom. Acc. L. (3) VI. 65.

De Gasparis. Serie fra anomalia e raggio vettore nella ellisse planetaria. Nap. Rend. XXI. 12-19.

De Gasparis. Prima approssimazione di un orbita con 5 dati. Nap. Rend. XXI. 104-107, 154-155.

De Gasparis. Sur la théorie du mouvement des planètes. C. R. XCIV. 32-33.

De Gasparis. Sur le problème de Kepler. C. R. XCV. 446.

B.

J. Morrison. On the compensation of the eccentric anomaly from the mean anomaly of a planet. Analyst IX. 17-19.

In der Gleichung $m = E - e \sin E$ setzt der Verfasser $E = m + x$ und giebt als erste Annäherung

$$r = \sqrt{2}.\tan\frac{1}{2}\theta, \quad \text{wo} \quad \tan\theta = e\sqrt{2}\frac{\sin m}{1-e\cos m};$$

und als zweite Näherung

$$E = m+x+\frac{m-m_1}{1-e\omega E_1},$$

wo E_1 die erste Näherung und $m_1 = E_1 - e\sin E_1$ ist.

Jn. (O.).

Ch. V. Zenger. On the solution of Kepler's problem.
Monthl. Not. XLII. 446-449.

J. C. Adams. On Newton's solution of Kepler's problem.
Monthl. Not. XLIII. 43-49.

In der ersten Arbeit giebt Professor Zenger eine Näherungsmethode für die Kepler'sche Gleichung, indem er Reihen benutzt, die u in steigenden Potenzen von sin u geben, und wendet sie auf Beispiele an.

In der zweiten Arbeit macht Professor Adams darauf aufmerksam, dass von allen Methoden, die zur Lösung dieses Problems in Vorschlag gebracht worden sind, diejenige, welche am schnellsten zu irgend welchem verlangten Grade von Genauigkeit führt, die von Newton in den „Principia" 2. Bd. p. 109-116 gegebene ist. In dieser Methode ist die Ordnung der Fehler bei jeder folgenden Näherung mehr als verdoppelt, und dies erklärt den ausserordentlichen Vorteil gegenüber dem Gebrauch von Reihen, die nach Potenzen von e fortschreiten, wenn grosse Genauigkeit für das Resultat verlangt wird; da in der letzteren Methode die Hinzufügung eines neuen Gliedes die Ordnung des Fehlers nur um eine Einheit vermehrt.

Herr Adams bemerkt ferner, dass der Grad der Schnelligkeit der Näherung durch eine Veränderung in dem Verfahren noch vermehrt werden kann. Er giebt eine Geschichte der Methode und zeigt, dass die ungewöhnliche Form, in welcher Newton dies Verfahren geboten hat, die folgenden Schriftsteller verleitet hat, ihn nicht für den Verfasser zu halten. Er spielt auch auf eine merkwürdige Tatsache betreffs der Veröffentlichung dieses Verfahrens von Newton an. Zum Schluss giebt er eine eigene graphische Methode.

Der Arbeit von Adams folgt eine kurze Note, in der er von Professor Zenger's Lösung Notiz nimmt und auf ein Missverständnis aufmerksam macht. Glr. (O.).

R. Radau. Remarques concernant le problème de Kepler.
C. R. XCV. 274-276.

Besprechung verschiedener Formen für die Lösung der Gleichung

$$M = E - e \sin E.$$

Dieselben gehen aus den Gleichungen

$$\cot E = \cot M - \frac{\sin(e \sin E_0)}{\sin M \sin E_0},$$

$$\frac{\operatorname{tg}\left(E - \frac{1}{2} M\right)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} M} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} E\right)^2, \quad \sin E = \frac{\sin(e \sin E_0)}{\sin E_0}$$

hervor, wo E_0 einen angenäherten Wert von E_0 bedeutet. Für die extremen Annahmen $E_0 = 0$ und $E_0 = \frac{1}{2}\pi$ erhält man die Formeln von Wolfers und Zenger. B.

Ch. V. Zenger. Solution rapide du problème du Kepler. C. R. XCV. 171-174.

Ch. V. Zenger. Tables auxiliaires pour calculer l'anomalie vraie des planètes. C. R. XCV. 208-210.

Ch. V. Zenger. Solution du problème de Kepler pour des excentricites considérables. C. R. XCV. 416-417.

Die Kepler'sche Gleichung

$$E - e \sin E = M$$

wird umgeformt in

$$\cot E = \cot M - \frac{e \operatorname{cosec} M}{1 + \frac{1}{6}\sin(E-M)^2 + \frac{3}{40}\sin(E-M)^4 + \cdots},$$

wo der Nenner die Reihe für

$$\frac{E - M}{\sin(E - M)}$$

ist. (Cfr. auch die oben erwähnte Arbeit von Radau.)

B.

STIELTJES. Sur un théorème de M. Tisserand. C. R. XCV. 901-903.

Der Aufsatz bezieht sich auf die Untersuchung von Herrn Tisserand in C. R. LXXXVIII. und LXXXIX. (cfr. F. d. M. XI. 1879. p. 804).

Ist
$$\cos\varphi = \cos u \cos u' \cos(x-x') + \sin u \sin u' \cos(y-y'),$$
so handelt es sich um die Entwickelung von
$$\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$$
in eine trigonometrische Reihe nach Vielfachen von $x-x'$ und $y-y'$. Unter Benutzung einer partiellen Differentialgleichung gelingt die Darstellung der Coefficienten durch Producte von hypergeometrischen Reihen, ein Resultat, das für den speciellen Fall $u=u'$, $x'=y'=0$ von Herrn Tisserand zuerst gefunden worden war. B.

HARZER. Eine neue Methode, die negativen und ungraden Potenzen der Entfernungen der Himmelskörper zu entwickeln. Astr. Nachr. 2425.

Setzt man in der aus der Theorie der Thetareihen folgenden Formel
$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} = \frac{1+2\Sigma e^{-nn\pi\varrho}}{1+2\Sigma e^{-nn\frac{\pi}{\varrho}}}$$
für ϱ den Wert $\Delta^2 : \mathfrak{f}^2$, wo Δ die gegenwärtige Distanz zweier Planeten und $\mathfrak{f}$ eine sehr grosse Constante bedeutet, so erhält man die angenäherte Formel
$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\mathfrak{f}}\left(1+2\Sigma e^{-nn\pi}\frac{\Delta\Delta}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}}\right).$$
Durch Differentiationen nach ϱ giebt die ursprüngliche Formel analoge Ausdrücke für die negativen ungraden Potenzen von Δ. Die trigonometrische Entwickelung von Δ^2 in den Exponenten bietet keine Schwierigkeit, während die weitere tri-

gonometrische Entwickelung der Exponentialgrössen sich mit Hülfe von Bessel'schen Functionen erledigen lässt, deren Argument rein imaginär ist. Der grössere Teil der Arbeit beschäftigt sich damit, diesen Grundgedanken in einer für die praktische Anwendung geeigneten Form auszuführen. B.

Scheibner. Ueber einige Arbeiten C. G. J. Jacobi's auf dem Gebiete der Störungstheorie. Astr. Nachr. 2444.

Der Aufsatz enthält zunächst eine Reihe von historischen Notizen und giebt sodann eine ausführliche Analyse von dem Inhalte eines in Hansen's Nachlass vorgefundenen Manuscripts betitelt „Entwickelungen und Rechnungen zu Jacobi's Theorie der Störungen der Hauptplaneten". Der Grundgedanke für die Entwickelung der reciproken Distanz $1:\Delta$ zweier Planeten ist dabei folgender. Man entwickle Δ^2 nach den mittleren Anomalien μ und μ' in eine trigonometrische Reihe

$$L+M\cos(\mu-\mu'+\alpha)+N,$$

wo L das konstante Glied ist und N die höheren Vielfachen von μ und μ' enthält und nach den Vielfachen von $\psi=\mu-\mu'+\alpha$ und μ geordnet zu denken ist. Dann wird die Elongation y durch die Gleichung

$$y\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{L+M\cos x}}=\pi\int_0^{\psi}\frac{dx}{\sqrt{L+M\cos x}}$$

eingeführt, und $1:\Delta$ nach y und μ entwickelt. Diese Entwickelung wird nicht analytisch, sondern rein numerisch durch mechanische Quadratur über aequidifferente Werte von y resp. μ ausgeführt. B.

R. Radau. Sur un point de la théorie des perturbations. C. R. XCV. 117-120.

Vergleichende Zusammenstellung der verschiedenen Formeln, welche man für die Bewegung in der gestörten Bahn aufgestellt hat. B.

TISSERAND. Sur les déplacements séculaires des plans des orbites de trois planètes. C. R. XCIV. 997-1004.

Anknüpfend an eine frühere Abhandlung (Cfr. F. d. M. XIII. 81. 844) untersucht der Verfasser den bereits von Leverrier rvorgehobenen Fall, dass die Neigung eines kleineren Planeten rch die Störungen von Jupiter und Saturn sehr erhebliche cillationen ausführen kann, wenn die Halbaxe desselben nahe einem gewissen Werte liegt. Durch ein gemischtes, teils anaisches, teils numerisches Verfahren gelingt es, die Grenzen angeben, innerhalb deren die Neigung oscilliren kann.

B.

ɪLDÉN. Sur l'équation différentielle, qui donne immédiatement la solution du problème des trois corps jusqu'aux quantités de deuxième ordre inclusivement. C. R. XCV. 55-58.

Reduction einer in den Strömungsformeln des Verfassers ftretenden Differentialgleichung zweiter Ordnung auf die Form

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Py=Q.$$

B.

ɪLDÉN. Eine Annäherungsmethode im Probleme der drei Körper. Act. Math. I. 77-92.

Die behandelte Aufgabe besteht darin, zu der Differentialichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+X_1y=\psi_0+\psi_2y^2+\psi_3y^3+\cdots$$

ter gewissen Voraussetzungen über die Form und die Grössenlnung von y und den Coefficienten X_1, ψ eine nur aus periodien Gliedern bestehende Lösung durch successive Approximation finden. Der Nerv des Verfahrens, welches an dem Beispiel

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\alpha\cos\lambda x.y=\psi_0+\cdots$$

(α und λ konstant) erläutert wird, besteht in einer passenden Spaltung des Coefficienten X_1, um die auftretenden nichtperiodischen Glieder zu beseitigen. B.

GYLDÉN. Ueber die absoluten Elemente der Planetenbahnen. Astr. Nachr. 2452.

Verfasser ist bei der Verfolgung der von ihm aufgestellten Methode der intermediären Bahnen auf den von ihm als wichtig hervorgehobenen Umstand gestossen, dass bei der Integration der Störungsglieder Terme auftreten, die die störende Masse als Factor nicht enthalten, aber von derselben Ordnung wie die Glieder für die ungestörte Bewegung sind. Diese Glieder bezeichnet er als elementäre Glieder und die durch die von der Masse freien Glieder bestimmte Bahn als absolute Bahn, deren Elemente dann die absoluten Elemente sind. Hierzu mag bemerkt werden, dass dieser Umstand, wenn auch in etwas anderer Gestalt, längst bekannt und auch nicht an die Methode der intermediären Bahnen gebunden ist. Er tritt z. B. auf, wenn man, wie es bei der Mondtheorie aus zwingenden Gründen immer geschehen ist, von vornherein die Elemente Knoten und Perihel in der ersten Approximation als variable Grössen einführt. Ueberdies werden, sobald mehr als eine störende Masse vorhanden ist, die „elementaren Glieder" nicht frei von den störenden Massen, sondern homogene Functionen nullter Ordnung derselben. Der Aufsatz giebt zunächst eine Darlegung der Resultate, zu denen der Verfasser in seinen Entwickelungen gelangt ist, und schliesst daran Vergleichungen der alten Methode der Variation der Constanten mit dem neuen Verfahren, sowie Raisonnements über die Stabilität des Sonnensystems, welche letztere nach Ansicht des Referenten nicht concludent sind. B.

LINDSTEDT. Ueber die Integration einer für die Störungstheorie wichtigen Differentialgleichung. Astr. Nachr. 2462.

LINDSTEDT. Bemerkungen zur Integration einer gewissen Differentialgleichung. Astr. Nachr. 2465.

GYLDÉN. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Dr. Lindstedt in den Astr. Nachr. Nr. 2465. Astr. Nachr. 2469.

BACKLUND. Zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varrho}{dv^2}+(1-\beta_1)\varrho=\beta_0+\beta_2\varrho^2+\beta_3\varrho^3+\cdots.$$

Astr. Nachr. 2469.

In 1) wird die Integration der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dv^2}+\varrho=\beta_0+\beta_1\varrho+\beta_2\varrho^2+\cdots,$$

wo die β kleine Grössen erster Ordnung sind, dadurch integrirt, dass unter der in diesem Falle zu erreichenden Voraussetzung $\beta_0=0$, in dem sich unmittelbar ergebenden ersten Integral

$$\left(\frac{d\varrho}{dv}\right)^2+\varrho^2=\frac{2}{2}\beta_1\varrho^2+\frac{2}{3}\beta_2\varrho^3+\cdots+\eta_0^2$$

die Substitution

$$\varrho=\eta\cos x,\quad \frac{d\varrho}{dv}=\eta\sin x$$

eingeführt wird, mittelst welcher sich η als trigonometrische Reihe von x und v in der Form cx plus einer trigonometrischen Reihe in x ergiebt. Die Elimination von x ergiebt dann für ϱ eine trigonometrische Reihe nach Vielfachen einer linearen Function von v. Die Coefficienten werden durch Potenzreihenentwickelungen dargestellt. In 2) wird dieses Verfahren mit dem von Herrn Gyldén für dieselbe Aufgabe verglichen und daran eine Polemik gegen letzteres geknüpft, die jedoch später vom Verfasser zurückgezogen worden ist. 3) enthält die Abwehr von Herrn Gyldén gegen die erwähnte Polemik, während in 4) ein Verfahren mitgeteilt ist, die Lösung der Differentialgleichung nach der Methode der unbestimmten Coefficienten zu bestimmen, wenn die Existenz der Lösung in Form einer trigonometrischen Reihe feststeht. Hierbei mag noch erwähnt werden, dass 4)

einen mit den Principien der Functionentheorie in Widerspruch stehenden Versuch die Existenz nachzuweisen enthält.

B.

Weiler. Bemerkung zu dem Aufsatze in No. 2388: „Ueber die Theorie der Bewegungen der Himmelskörper.“ Astr. Nachr. 2428.

Bezieht sich auf die Gyldén'sche Methode, als erste Approximation eine von der Ellipse verschiedene Curve zu Grunde zu legen. B.

T. N. Thiele. Ueber Professor Gyldén's intermediäre Bahnen. Astr. Nachr. 2429.

Verfasser zeigt, dass der Gyldén's intermediären Bahnen zu Grunde liegende Gedanke, nämlich aus der Störungsfunction einen nur von einem Radiusvector abhängigen Teil abzusondern, sich noch auf verschiedene andere Weisen verwirklichen lässt, von denen eine bereits von Newton empfohlen worden ist.

B.

Weiler. Nachträge zu der Abhandlung in No. 2311 bis 2317: „Das Problem der drei Körper in der neuen Störungstheorie.“ Astr. Nachr. 2432-2433.

Der Aufsatz enthält im Wesentlichen eine Abänderung der Herleitung und Gestalt früherer von dem Verfasser gegebener Formeln. Es möge deshalb hier nur bemerkt werden, dass bei dessen Methode die Excentricität als fest und die mittlere Anomalie als lineare Function der Zeit angenommen, d. h. die Störungen dieser Elemente auf die übrigen Parameter, Neigungen, Knoten und Perihel geworfen worden. B.

O. Callandreau. Sur la détermination des variations séculaires et des éléments moyens des orbites. Astr. Nachr. 2435.

Bezieht sich auf die von Herrn Hill dem Gauss'schen Verfahren gegebene Gestalt. (Astronomical papers prep. for the use of the Amer. Ephemeris etc. Vol. I, 5). B.

E. Neison. Note on a term in the perturbations of the moon, due to the action of Mars. Monthl. Not. XLII. 267-269. (1882).

In einer früheren Arbeit hatte der Verfasser erklärt, dass er gefunden habe, dass der Coefficient des Gliedes mit dem Argument $l-24l''+20l'''$, wo l, l'', l''' die mittleren Längen des Mondes, der Erde und des Mars bezeichnen, sich auf mehrere Sekunden beläuft. Diesen Tatbestand hatte er nur als einen vorläufigen gegeben; jetzt zieht er ihn nach genauerer Prüfung zurück. Der genaue Wert des Gliedes ist von Gogou untersucht und als unmerklich gefunden worden. Glr. (O.).

G. W. Hill. Review of the „theory of the moons motion deduced from the law of universal gravitation" by John N. Stockwell. Analyst IX. 41-47.

J. N. Stockwell. On Mr. Hill's review of the theory of moons motion. Analyst IX. 82-90.

Verteidigung der Theorie durch Herrn Hill und Erwiderung auf seine Kritik von Herrn Stockwell. Jn. (O.).

P. Lehmann. Tafeln zur Berechnung der Mondphasen. 8°. Berlin 1882. K. Statistisches Bureau.

B.

TH. VON OPPOLZER. Syzygientafeln für den Mond nebst ausführlicher Anweisung für den Gebrauch derselben. Publication XVI der Astr. Gesellschaft. 4°. Leipzig, 1881. W. Engelmann. B.

BACKLUND. Ueber Störungen durch ein widerstehendes Mittel. Astr. Nachr. No. 2414.

In der zweiten Abhandlung über die Theorie des Encke'schen Cometen (Peterb. Abh. 1878) hatte von Asten unter Zugrundelegung der Encke'schen Hypothese über das widerstehende Mittel zum Teil ein von Encke abweichendes Verfahren benutzt, welches darin bestand, dass er die mittlere Bewegung und den Excentricitätswinkel sich bei jedem Periheldurchgange sprungweise um constante Grössen ändern liess. Verfasser kritisirt zunächst dieses Verfahren mit guten Gründen und entwickelt dann für den vorliegenden Fall hinreichend strenge Formeln, deren Anwendung an einem numerischen Beispiel erläutert wird. Zum Schlusse wird dann noch gezeigt, dass man die Widerstandshypothese innerhalb ziemlich weiter Grenzen variiren kann, ohne dass dadurch ein Widerspruch mit den Beobachtungen eintritt. B.

TH. VON OPPOLZER. Lösung des Kometenproblems. Wien. Anz. 1882. 227; Wien. Ber. LXXXVI. 885-892.

Beschäftigt sich mit dem vom Verfasser in seinem Lehrbuche über Bahnbestimmung aufgestellten Satze, dass, wenn beim Kometenproblem eine mehrfache Lösung auftritt, diese immer eine dreifache ist. Dieser Gegenstand hat dadurch ein grösseres Interesse gewonnen, dass bei den Erscheinungen der letzten Jahre ein derartiger Fall in der Tat vorgekommen ist. B.

N. HERZ. Zur Theorie der Bahnbestimmung eines Kometen. Wien. Anz. 1882. 213-214; Wien. Ber. LXXXVI. 794-834.

N. Herz. Ueber die Möglichkeit einer mehrfachen Bahnbestimmung aus drei geocentrischen Beobachtungen.
Wien. Anz. 1882. 248; Wien. Ber. LXXXVI. 1125-1131.

Die erste Abhandlung giebt eine Lösung des Kometenproblems unter Benutzung von drei vollständigen Beobachtungen, ein Gedanke, der schon früher, jedoch mit unnötigen einschränkenden Voraussetzungen, benutzt worden ist. Das Wesentliche hierbei ist, dass die Relation zwischen den beiden äusseren Distanzen ϱ_1 und ϱ_3 in aller Strenge sich auf die Form $\varrho_3 = M\varrho_1$ bringen lässt. Die Brauchbarkeit des Verfahrens wird an einem Beispiel nachgewiesen.

Der zweite Aufsatz weist darauf hin, dass bei mehrfachen Lösungen die Zahl derselben drei oder zwei ist, jenachdem man die Excentricität gleich Eins setzt oder aus den Beobachtungen bestimmt, dass ferner die allein richtige Lösung in beiden Fällen angenähert dieselbe sein müsse, dass also hierin ein Kriterium zur Ausscheidung der unzulässigen Lösungen liege. B.

Th. von Oppolzer. Ueber die Kriterien des Vorhandenseins dreier Lösungen beim Cometenproblem.
Astr. Nachr. 2468.

Mitteilung der Formeln ohne Beweis. B.

Gyldén. Ueber die von dem Maltheserritter d'Angos im Jahre 1784 mitgeteilte Cometenentdeckung.
Astr. Nachr. 2445-2446

Verfasser geht bei der Behandlung dieser vielberufenen Frage von der Voraussetzung aus, dass die beiden ersten Beobachtungen der betreffenden Reihe nicht von vornherein als apokryph zu verwerfen seien ,nur dass dann wegen der sich dabei ergebenden ausserordentlich starken Annäherung an die Erde der Versuch Bahnelemente abzuleiten einen von den gewöhnlichen Methoden abweichenden Weg einschlagen müsse. Verfasser giebt eine auf der Benutzung der von ihm eingeführten intermediären Bahn beruhende Behandlung des Falles, wo die Anziehung des stören-

den Planeten von derselben Ordnung ist wie die der Sonne. Bei der Anwendung auf die vorliegenden zwei Beobachtungen lässt sich ausser der Lage der Bahn nur noch ein Datum bestimmen, während die vollständige Bestimmung der Bahn nur unter hypothetischen Annahmen über zwei andere Stücke zu erreichen ist.

B.

F. Folie. Sur un critérium astronomique certain de l'existence d'une couche fluide à l'intérieur de l'écorce terrestre. Belg. Bull. (3) III. 20-23.

F. Folie. Existence et grandeur de la précession et de la nutation diurne, dans l'hypothèse d'une terre solide. Belg. Bull. (3) III. 739-753.

Der Behauptung von Laplace entgegen giebt es eine berechenbare tägliche Präcession und Nutation, deren Wert grösser ist; dieselbe rührt von einer flüssigen Schicht im Innern der Erdkugel her. Mn. (O.).

C. Rozé. Des termes à courte période dans le mouvement de rotation de la Terre. Extrait par l'auteur. C. R. XCV. 327-330.

B.

Glauser. Ueber das Rotationsgesetz der Sonne und der grossen Planeten. Astr. Nachr. 2415.

Verfasser giebt eine Berichtigung zu der von Zöllner (Astr. Nachr. 1849) entwickelten Rotationstheorie. Zöllner hatte seine Schlüsse u. A. darauf gestützt, dass der Quotient aus den linearen Rotationsgeschwindigkeiten für die Oberfläche und tiefere Schichten von den Polen nach dem Aequator zu abnehmend am letzterem ein Minimum besitze. Verfasser zeigt, dass wenigstens im vorliegenden Falle dieser Satz nicht zutrifft. B.

PECHÜLE. Sur la favorabilité des stations relativement à l'ensemble des mesures micrométriques à faire pendant le passage de Vénus (1882). Astr. Nachr. 2440.

Die in der Ueberschrift vollständig umschriebene Aufgabe wird für folgende vier Beobachtungsmethoden behandelt: 1) Messung von Höhendifferenzen, 2) von Distanzen, 3) von Rectascensionsdifferenzen, 4) von Declinationsdifferenzen der Centra von Sonne und Venus. Eine beigegebene Hülfstafel gestattet ohne Schwierigkeit zu entscheiden, wie weit sich eine gegebene Combination von Stationen dem günstigsten Falle nähert. B.

PERRY. Sur la future observation du passage de Vénus à Madagascar. Brux., S. sc. VI. A. 103-109.

Mn.

LEHMANN - FILHÈS. Kritischer Beitrag zur Geschichte der meteorischen Astronomie. Astr. Nachr. 2410.

Verfasser zeigt, dass der Schluss, durch welchen Erman (Astr. Nachr. No. 385) aus seinen Beobachtungen der Augustmeteore für die Bahnneigung zwei Grenzwerte herleitete, und der für die weitere Entwickelung der Theorie nicht ohne Folgen geblieben ist, bezüglich der unteren Grenze fehlerhaft war und auf einem Versehen beruhte, das vom Verfasser richtig gestellt wird. Der Fehler war übrigens bereits früher von B. Peirce bemerkt worden (Transactions Amer. Phil. Soc. Vol. VIII).

B.

H. GEELMUYDEN. Remarques sur la théorie de la lumière zodiacale. Lie Arch. 54-108.

Beitrag zu einer Discussion über die Theorie des Zodiacallichtes zwischen Serpieri, Gelmuyden und Groneman.

L.

Kerber. Refractionstheorie auf geometrischer Grundlage. Wiedemann Ann. XV, 140-165, 308-329.

Verfasser behandelt die astronomische Strahlenbrechung, indem er die Atmosphäre als ein System von sphärischen Schichten ansieht, und darauf die Gauss'schen Begriffe der Haupt- und Brennpunkte etc. anwendet. Soweit ist alles gut, wenigstens so lange die Voraussetzungen jener Gauss'schen Theorie erfüllt sind. Dagegen ist der Versuch des Verfassers, daran eine neue Refractionstheorie zu knüpfen, einfach als verfehlt zu bezeichnen; ebenso zeigen Bemerkungen, wie die über die Bestimmung der Refractionsconstante p. 161 und über die Beobachtung von Bouguer p. 314 trotz aller Citate von weitgehender Unbekanntschaft mit dem Gegenstande. B.

Harzer. Untersuchung über die astronomische Strahlenbrechung auf Grund der Differentialgleichungen der elastischen Lichtbewegungen in der Atmosphäre. Astr. Nachr. 2477.

Verfasser setzt voraus, dass auf concentrischen Kugeln um den Erdmittelpunkt die Dichtigkeit und Elasticität des Aethers constant sei, dass ferner ein unendlich kleines Element als isotrop anzusehen sei. Es gelingt dann für die Bewegungsgleichungen Lösungen zu finden, welche mit den directen Folgerungen aus dem gewöhnlichen Brechungsgesetz übereinstimmen.

B.

W. Meyer. Ueber die Strahlenbrechung im Innern eines Cometen.

Als von theoretischem Interesse ist hervorzuheben die Aufstellung der Formeln nach Herrn Cellerier für die genannte Refraction unter der Voraussetzung, dass das brechende Medium aus homogenen cylindrischen Schichten zusammengesetzt sei und dass sich dasselbe optisch wie ein vollkommenes Gas verhalte.

B.

Ceraski. Ueber die Bestimmung der Vergrösserung eines Fernrohrs. Astr. Nachr. 2416.

Verfasser benutzt den Abstand der sich in Ocularprismen zeigenden dunkeln Segmente von der Mitte des Gesichtsfeldes, um die Vergrösserung zu bestimmen.

B.

Anhang.

HALLER VON HALLERSTEIN. Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 8. Aufl. von Maier. Berlin. Nauck & Co.

Neue unveränderte Auflage des bekannten Werkes.

O.

GREX. Lehrbuch der Mathematik. Berlin. A. Stubenrauch.

Das vorliegende Buch enthält den dritten Cursus und den zweiten Teil der Arithmetik. Dem Ganzen geht eine Inhaltsübersicht und Zeiteinteilung voran, wie der Inhalt nach Meinung der Herrn Verfassers passend auf ein ganzes Schuljahr verteilt werden kann. Für das Sommerhalbjahr ist das Radiciren, die Proportionslehre, Anwendungen und Repetitionen, — für das Winterhalbjahr Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren Unbekannten, quadratische Gleichungen mit einer und zwei Unbekannten, Repetitionsfragen und Aufgaben bestimmt. Die Darstellung ist überall kurz und deutlich, der Druck gut; besonders Wichtiges wird auch äusserlich durch den Druck hervorgehoben. Ferner sind sehr viel passende Aufgaben und zwar zur mündlichen und auch zur schriftlichen Behandlung eingereiht.

Mz.

Ad. Hochheim. Leitfaden für den Unterricht in der Arithmetik und Algebra an höheren Lehranstalten. Heft I. Dritte vermehrte Aufl. Berlin. E. S. Mittler & Sohn.

Das bekannte Lehrbuch, dessen erste Auflage im Jahre 1871 erschien, umfasst das arithmetische Pensum der höheren Lehranstalten, und zwar in dem vorliegenden ersten Hefte das Pensum des Gymnasiums und des Real-Progymnasiums, also „Arithmetik bis zur Entwickelung des binomischen Lehrsatzes und Algebra bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschliesslich". Im zweiten Hefte, das bei der Bearbeitung der neuen Auflage dieses Leitfadens besonders ausgegeben wird, soll das Pensum des Realgymnasiums und der Ober-Realschule behandelt werden. Die Theorie der Gleichungen zweiten Grades, welche 1) Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten, 2) grösste und kleinste Werte von Trinomien, 3) Reductionen von Gleichungen höheren Grades, und 4) quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten umfasst, ist in der neuen Auflage erweitert worden; ebenso die Combinationslehre. Zugleich wurde das eingefügte Uebungsmaterial wesentlich vermehrt. M.

A. Büttner. Die Elemente der Buchstabenrechnung und Algebra. Nebst einem Anhange, enthaltend Logarithmentafeln für die Zahlen von 1 bis 10000. Sechste Auflage. Berlin. Stubenrauch.

Ausser der angefügten fünfstelligen Logarithmentafel für die Zahlen 1 bis 10000 unterscheidet sich die neue Auflage durch eine ausführlichere Behandlung der Exponentialgleichungen und der geometrischen Reihen und die Anwendung derselben auf die Rentenrechnung. Die Methode des wohl am besten für Mittelschulen geeigneten Buches besteht darin, dass die Gesetze zuerst an einzelnen Zahlenbeispielen hergeleitet und dann erst allgemein bewiesen werden. M.

F. Wallentin. Lehrbuch der Arithmetik für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Wien. J. Klinkhardt.

Das vorliegende Lehrbuch, welches sachgemäss auf der allmäligen Entwickelung und Erweiterung des Zahlbegriffes sich aufbaut, enthält das bekannte Pensum der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten bis zu den Gleichungen zweiten Grades einschlieslich, die arithmetischen und geometrischen Reihen mit ihrer Anwendung auf die Rentenrechnung, die Combinationslehre mit dem binomischen Satze, die Wahrscheinlichkeits- und Versicherungsrechnung und die ersten Elemente der complexen Zahlen. In den Anmerkungen finden sich zahlreiche historische Notizen. M.

H. C. E. Martus. Mathematische Aufgaben. 5te Aufl. Leipzig. C. A. Koch.

Neue unveränderte Auflage der bekannten Aufgaben. Die Resultate sind in einem besonderen Bande beigefügt. O.

S. Dickstein. Die Geometrie in der Schule. I. Pädagog. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

L. W. Meech. Complementary division. Analyst IX. 97-103.

Leichte Divisionsart durch eine Zahl mit kleinem arithmetischen Complement, wie z. B. 996. Jn. (O.).

S. Dickstein. Ueber Cubikwurzelausziehung. Pädagog. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

A. Jurgielewicz. Der Unterricht im Rechnen. Pädagog. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

A. Jurgielewicz. Ueber den mathematischen Unterricht in den Töchterschulen. Pädagig. Zeitschr. (Polnisch.). Dn.

J. Henrici. Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Leipzig. Teubner.

Die Tafeln sind auf steifem Papier gedruckt und empfehlen sich deshalb für den Handgebrauch. Sie enthalten die Briggischen Logarithmen der Zahlen, die Logarithmen der trigonometrischen Functionen und die goniometrischen Functionen. O.

E. Becker. Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf fünf Decimalen. Leipzig. Tauchnitz.

Die Tafel unterscheidet sich von anderen fünfstelligen Tafeln vorteilhaft dadurch, dass sich je 100 Reihen auf jeder aufgeschlagenen Seite finden. Sie enthalten das gewohnte Material in der übersichtlichen Form des Bruhns'schen logarithmischen Handbuches. O.

Weitere Logarithmentafeln sind:

1) J. G. Böhm. Kleines logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. (5-stellig). 4te Aufl. Innsbruck. Wagner.
2) Th. Wittstein. 5-stellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 10te Aufl. Hannover. Hahn. O.

W. C. Wittwer. Grundzüge der mathematischen Chemie. Schlömilch Z. XXVII. 289-309, 329-345.

Die speciellen Betrachtungen (siehe F. d. M. XII. 1880. 872—873 und XIII. 1881. 868) werden fortgesetzt; analoge Rechnungen wie früher werden ausgeführt in Bezug auf die drei Alkalimetalle Kalium, Natrium und Lithium, sowie deren Verbindungen mit Sauerstoff, mit Wasserstoff, mit Sauerstoff und Wasserstoff. Am Schlusse der Mitteilung (von Seite 342 ab) werden die Resultate zusammengestellt, um die Analogien, welche zwischen den drei Metallen bestehen, sowie die Verschiedenheiten besser hervortreten zu lassen. Rs.

Namenregister.

*) Siehe auch unter Berichtigungen.

*) Siehe unter Berichtigungen.

Berichtigungen.

Band XIV.

Seite 14 Zeile 3 von unten füge hinzu: „Mathesis II, 243-245“.
„ 32 „ 9 „ oben lies „Lesage“ statt „Lagrange“.
„ 87 „ 7 „ „ „ „Marks“ statt „Marcks“ und „Buck“ statt „Busk“.
„ 99 „ 8 „ unten „ „Anhang“ statt „Anfang“.
„ 197. Gegen unser sonstiges Princip ist es leider vorgekommen, dass in dem Referat über das Lehrbuch des Herrn Pasch die Grenzen einer rein sachlichen Besprechung überschritten worden sind. Wir heben bei dieser Gelegenheit noch einmal hervor, dass die Verantwortung hierfür ganz allein dem Herrn Referenten anheimfällt.
Seite 309 Zeile 8 von oben lies „Laupp“ statt „Laapp“.
„ 365 „ 15 „ „ „ „de periodicke“ statt „der periodiche“
„ 365 „ 20 „ „ „ „$n = 2$“ statt „$n = z$“.
„ 367 „ 1 „ „ „ „2“ statt „1“.
„ 368 „ 1 „ unten „ „Referat im folgenden Bande“.
„ 379 „ 1 „ oben „ „de“ statt „der“.
„ 398 „ 7 „ unten „ „$\mathrm{sn}\,\gamma u$“ statt „$\sin 8n$“.
„ 414 „ 5 „ „ „ „Multiplicatorgleichungen“ statt „Multiplicationsgleichungen“.
„ 416 „ 12 „ oben „ „Elliot“ statt „Elliott“.
„ 430 „ 10, 7, 5 und 3 von unten lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„ 431 „ 6 und 14 von oben lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„ 431 „ 1 von unten lies „Kegelfunctionen“ statt „Kugelfunctionen“.
„ 520 „ 16 „ „ „ „transformaties“ statt „transformatics“.
„ 547 „ 11 „ oben „ „Vietor“ statt „Victor“.
„ 802 „ 13 „ „ „ „Castigliano“ statt „Castegliano“.
„ 848 „ 11 „ „ „ „licht“ statt „lieht“.

Dr. Carl Ohrtmann

geboren am 15. November 1839 zu Berlin,
gestorben am 22. April 1885 zu Berlin.

Kurz vor Vollendung dieses Bandes wurde uns zu unserem grossen Schmerze unser lieber Freund, der Oberlehrer Dr. Carl Ohrtmann, nach langen schweren Leiden durch den Tod entrissen.

Auf dem Königlichen Friedrich-Wilhelms-Gymnasium zu Berlin durch Professor Schellbach für die mathematischen Wissenschaften gewonnen, studirte Carl Ohrtmann von 1859 bis 1862 zu Berlin, Heidelberg und Göttingen, wurde 1863 Mitglied des unter Schellbach's Leitung stehenden mathematisch-pädagogischen Seminars und 1866 Lehrer der Mathematik am Königlichen Realgymnasium zu Berlin. Bei seinen weiteren mathematischen Studien vermisste er lebhaft ein Hülfsmittel, das die Jünger der Mathematik in den Stand setzte, sich wenigstens einen allgemeinen Ueberblick über das Fortschreiten ihrer Wissenschaft zu verschaffen. Ihm war es vorbehalten, diese Lücke in der mathematischen Litteratur auszufüllen.

Im Jahre 1869 begann Carl Ohrtmann die ersten Vorarbeiten zur Begründung des „Jahrbuches über die Fortschritte der Mathematik", das nach dem Muster der von der hiesigen Physikalischen Gesellschaft herausgegebenen „Fortschritte der Physik" eine Uebersicht über alle neuen Erscheinungen auf dem umfangreichen Gebiete der mathematischen Wissenschaften zu geben bestimmt war. „Nicht weil er sich für den Fähigsten zur Herausgabe desselben hielt", wie er in dem Vorworte zum ersten Bande bescheiden hervorhebt, sondern weil er durchdrungen war von der Unentbehrlichkeit eines solchen Werkes, machte er sich an die Ausführung seines Planes. Die stets wachsenden Schwierigkeiten, welche ein solches Unternehmen mit sich bringt, schreckten ihn nicht zurück. Unterstützt von einer erfreulichen

Zahl von Berufsgenossen, welche er für seine Idee zu begeistern wusste, und ermutigt durch den wohlwollenden Rat wissenschaftlicher Autoritäten, sammelte er mit unermüdlichem Fleisse Journalabhandlungen und selbständige Werke mathematischen Inhalts, ordnete sie nach den einzelnen Disciplinen und verteilte sie unter die Mitarbeiter, deren Berichte dann in systematischer Reihenfolge gedruckt wurden. Im Februar 1871 erschien der erste Band, welcher die Litteratur des Jahres 1868 umfasst.

Um das angefangene Werk fortzusetzen und immermehr in einer der Wissenschaft würdigen Weise zu vervollkommnen, opferte Ohrtmann alle Kräfte und alle Zeit, welche ihm seine amtliche Thätigkeit übrig liess. Es war ihm vergönnt, 15 Jahrgänge fertig zu stellen, die jetzt in 14 Bänden erschienen sind. Auch der XV. Band (Jahrgang 1883) wurde von ihm fast bis zum Druck gefördert, Band XVI vorbereitet.

Selbst auf dem schmerzensreichen Krankenlager, auf das er vor fast einem Jahre geworfen wurde, arbeitete Ohrtmann an dem Jahrbuche unermüdlich weiter. In der Beschäftigung mit dieser seiner Schöpfung fand sein Geist Trost und Erhebung, wenn der gebrechliche Körper den schweren Leiden zu erliegen drohte. Mit inniger Freude erfüllte ihn auf seinem Sterbebette die Nachricht, dass es uns, die wir fünfzehn Jahre hindurch mit ihm an der Redaktion des Jahrbuches gemeinschaftlich gearbeitet haben, gelungen war, durch Hinzuziehung neuer Kräfte die Gewähr für das Fortbestehen seines Unternehmens zu erhöhen.

In dem „Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik" gründete Carl Ohrtmann sich ein schönes ewiges Denkmal und verpflichtete alle Jünger der Wissenschaft zu bleibendem Danke. Wir aber halten es für eine heilige Pflicht der Freundschaft, sein Andenken auch dadurch zu ehren, dass wir ferner nach Kräften an dem mit ihm begonnenen Werke fortarbeiten.

Berlin, den 27. April 1885.

Felix Müller. Albert Wangerin.



